

1등급 두뇌 장착,
스스로의 힘으로!

수학

4
Grade

'23
Since

Alize

김주현 (단국대학교 의예과)

수학에서 '건물의 기반이 되는 격'인 개념 학습의 중요성은 제가 굳이 강조하지 않아도 잘 아시리라 생각합니다. <맑은개념>은 이러한 개념학습을 이끄는 최고의 독학서입니다.

전대원 (미적분 백분위 100)

저는 일격필살팀의 인투더 중학도형/ 인투더 수학1&2/ 인투더 미적분/ 트윈기출(2022수능대비) 수1, 수2, 미적분/ 일격필살 N제 시즌1 수1&수2, 미적/ 일격필살 N제 시즌2 수1&수2&미적/ 일격필살 파이널 모의고사를 모두 풀었습니다. 일격필살팀의 콘텐츠를 읽고 풀어 나가며 어떤 새로운 문제가 나오더라도 풀어낼 수 있는 힘을 기를 수 있었던 것 같습니다.

윤찬민 (대구한의대학교 한의예과 재학, 문과 → 이과 첫 해 기하 96점)

<맑은개념>은 개념에 친숙해지는 데에 있어서 큰 도움이 되는 교재입니다. <맑은개념>은 개념공부를 속도 있게 할 수 있도록 돕습니다. 경제적인 설명이 되어 있으며, 깊은 이해가 필요한 부분에 추가설명과 증명을 수록하여 이를 활용하면 개념공부를 빠르지만 놓치는 부분 없이 할 수 있습니다.

윤준서 (나형 5등급 / 가형 6등급 → 미적 2등급 성적향상)

<맑은개념>은 책 제목에 걸맞게 불필요한 내용을 다루지 않습니다. 논리적인 책의 구성을 따라가면 자연스럽게 수학을 어떻게 공부해야 할지 감을 잡을 수 있으며 가독성도 매우 훌륭하기에 회독도 쉽습니다. 성적이 낮았을 때부터 <맑은개념>에서 제시하는 방향대로 공부했고 끈질기게 공부한 결과 유의미하게 성적을 올릴 수 있었습니다. 책을 회독할수록 수학 실력 향상에 초점을 맞춘 책의 구성이 공감되었고 문장 하나하나 저자의 정성과 고민의 깊이를 엿볼 수 있었습니다.

값 11,000원



9 791167 026507 54410
ISBN 979-11-6702-650-7
ISBN 979-11-6702-649-1 (시리즈)

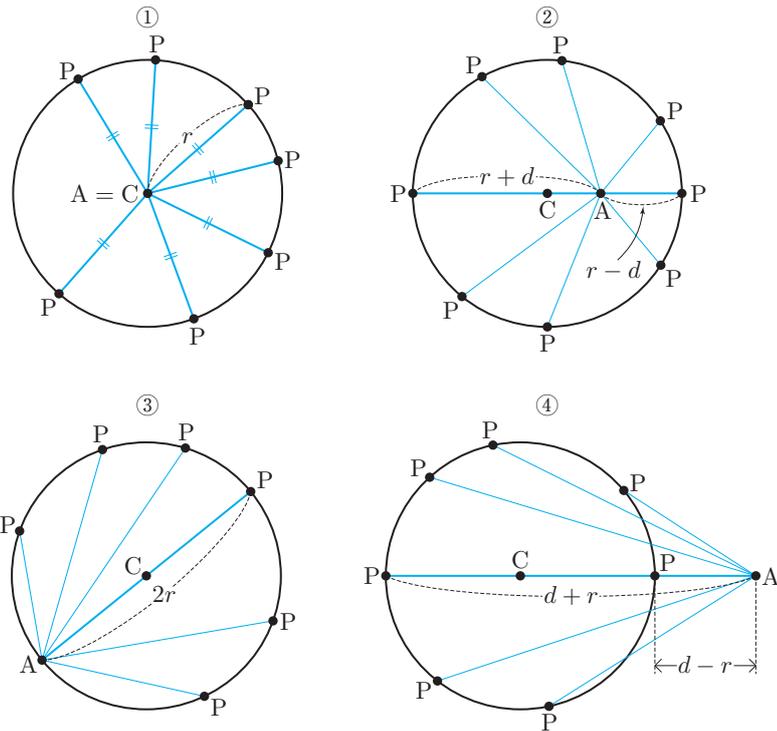
180 너 180

마음
개념
INTO THE MATH
Collector's Edition

송지은 편저

원과 점

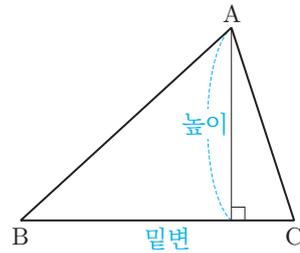
어떤 점을 A라 하고 중심이 C인 원에 대하여 $\overline{AC} = d$ 라 합시다. 그러면 점 A의 위치에 따른 \overline{AP} 의 범위는 다음과 같습니다.



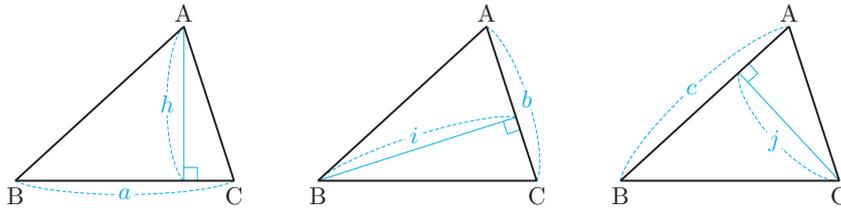
- ① A가 원의 중심 C와 일치 : $\overline{AP} = r$
- ② A가 C가 아닌 원 내부의 점 : $r - d \leq \overline{AP} \leq r + d$
- ③ A가 원 위의 점 : $0 \leq \overline{AP} \leq 2r$
- ④ A가 원 외부의 점 : $d - r \leq \overline{AP} \leq d + r$

즉 점 A의 위치와 관계없이, $|d - r| \leq \overline{AP} \leq d + r$ 라 할 수 있습니다.

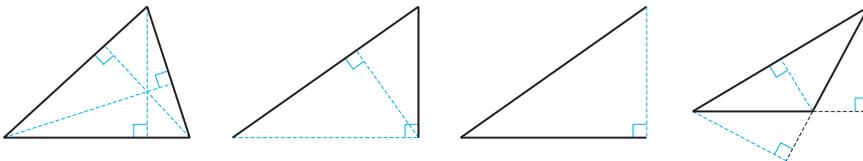
삼각형의 넓이



삼각형의 넓이를 구하려면 '밑변의 길이'와 '높이'를 알아야 합니다. '삼각형의 세 변 중에서 넓이를 구하기 위해 선택한 변'을 삼각형의 밑변이라고 합니다. 예를 들어 삼각형 ABC에서 BC를 밑변으로 취할 수 있습니다. 삼각형에서 높이는 '밑변을 포함하는 직선과 밑변을 대변으로 갖는 꼭짓점 사이의 거리'를 말합니다. 예를 들어 밑변 BC를 대변으로 갖는 꼭짓점은 A이므로, 높이는 직선 BC와 A 사이의 거리입니다.



밑변의 길이가 a , 높이가 h 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}ah$ 입니다. 이때 $\triangle ABC$ 의 다른 변을 밑변으로 잡아도 넓이를 구할 수 있습니다. 밑변의 길이가 각각 b , c 이고 높이가 각각 i , j 일 때 $\triangle ABC$ 의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}bi$, $\frac{1}{2}cj$ 이고, 어느 방법으로 구하든 넓이의 값은 서로 같습니다.



예각삼각형은 어느 변을 밑변으로 잡더라도 높이의 보조선이 삼각형 내부에 그려집니다. 직각삼각형은 빗변을 밑변으로 잡으면 높이의 보조선이 삼각형 내부에 그려지고, 다른 변을 밑변으로 잡으면 빗변이 아닌 나머지 한 변의 길이가 높이입니다. 둔각삼각형은 둔각의 대변을 밑변으로 잡으면 높이의 보조선이 삼각형 내부에 그려지고, 둔각이 아닌 각의 대변을 밑변으로 잡으면 높이의 보조선이 삼각형 외부에 그려집니다.



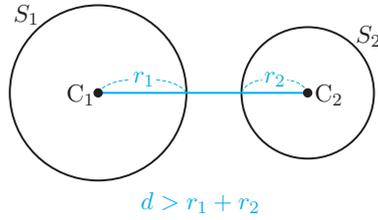
그림과 같이 밑변과 높이가 같은 삼각형은 모양이 다르더라도 넓이가 같습니다.

두 개의 원

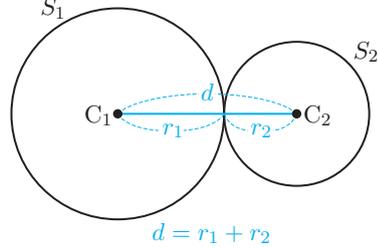
반지름이 r_1, r_2 인 두 원 S_1, S_2 에 대하여 두 원의 중심 사이의 거리를 d 라 하면 위치관계는 다음과 같습니다. (단, 그림에서는 $r_1 > r_2$)²²⁾

22) $r_1 = r_2$ 인 경우 ①, ②, ③은 동일하고, ④, ⑤와 같은 경우는 존재하지 않으며, ⑥의 경우 두 원이 일치합니다.

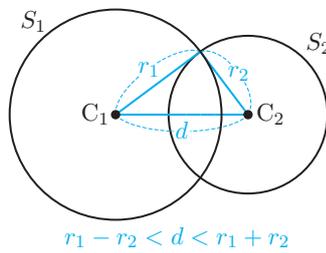
① 만나지 않는다.



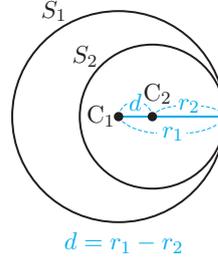
② 한 점에서 외접한다.



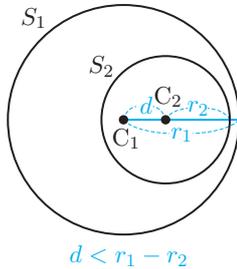
③ 두 점에서 만난다.



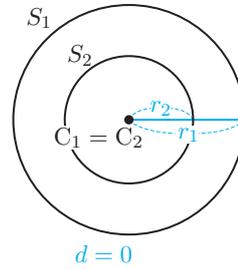
④ 한 점에서 내접한다.



⑤ 내부에 있으면서 중심이 일치하지 않는다.

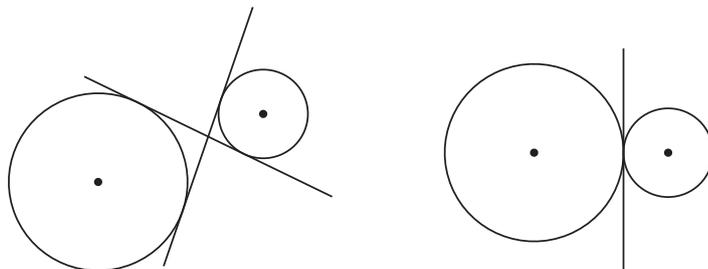


⑥ 내부에 있으면서 중심이 일치한다.

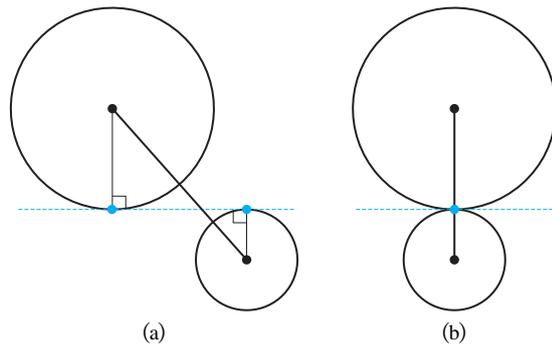


두 개의 원에 동시에 접하는 직선(공통접선, 내접과 외접)

서로 내접하지 않는 두 원에 대하여, 두 원의 외부의 공통영역에 있는 한 점을 P라 합시다. P를 지나고 두 원에 동시에 접하는 직선(공통접선)에 대하여 알아보시다.

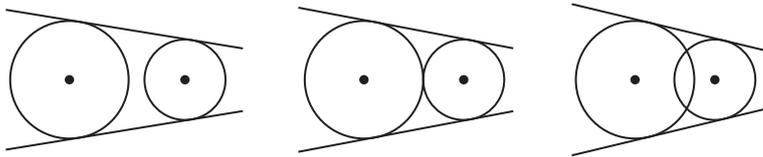


두 원이 만나지 않거나 외접할 때, 어떤 직선이 두 원의 사이에 끼이면서 접할 수 있습니다. 이를 직선이 두 원에 **내접**한다고 부르기로 합시다.

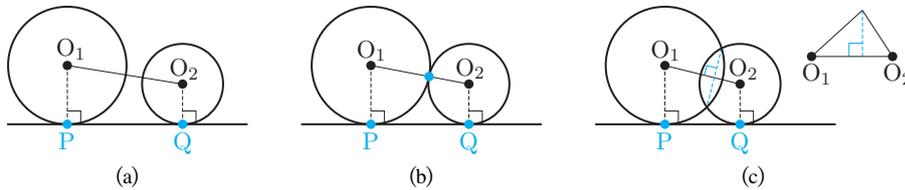


한 직선이 두 원에 내접하는 상황을 좀 더 보기 편한 그림으로 나타내면 (a), (b)와 같습니다. 두 원 중 한 원은 직선의 위쪽에, 나머지 한 원은 직선의 아래쪽에 놓이게 됩니다. 즉 직선이 두 원에 내접하는 경우, 두 원은 직선을 기준으로 서로 반대편에 위치하게 됩니다.

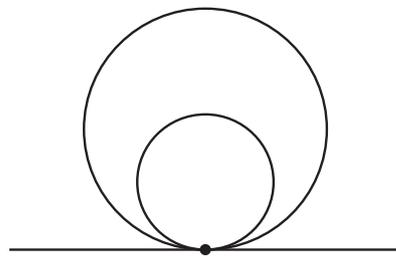
두 가지 경우에서 합동 또는 닮음비를 이용하여 각각의 길이를 구하는 과정을 물을 수 있습니다.



두 원이 만나지 않거나 외접하거나 두 점에서 만날 때, 어떤 직선은 두 원의 사이에 끼이지 않으면서 접할 수 있습니다. 이를 직선이 두 원에 외접한다고 부르기로 합시다.



한 직선이 두 원에 외접하는 상황을 좀 더 보기 편한 그림으로 나타내면 (a), (b), (c)와 같습니다. 두 원은 직선을 기준으로 서로 같은 편에 위치하게 됩니다.

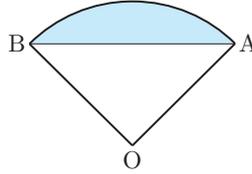


두 원이 내접할 때, 이 두 원의 공통접선은 외접하는 공통접선뿐입니다.

실전적 측면에서 원, 거리, 삼각형, 닮음을 돌아봅시다.

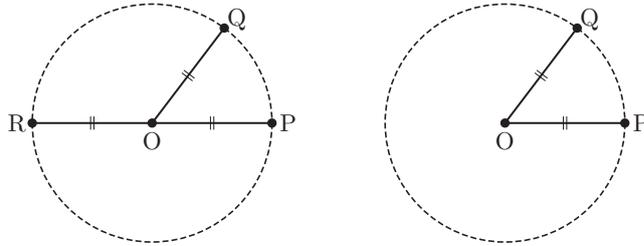
원에 관련된 정보

활꼴의 넓이

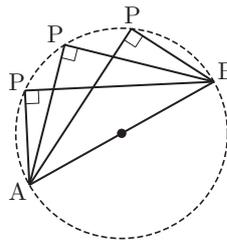


활꼴의 넓이인 $\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$ 를 외워두면 계산 단축에 유용합니다.

원의 발견



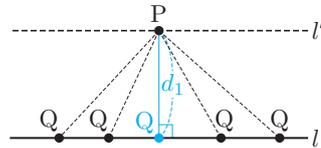
문제에서 한 점 O에 대하여 $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR}$ 이 주어지면 세 점은 중심이 O이고 반지름이 \overline{OP} 인 원 위의 점임을 이용할 수 있습니다. 오른쪽 그림과 같이 두 점만 주어지더라도 원을 생각할 수 있을 것입니다.



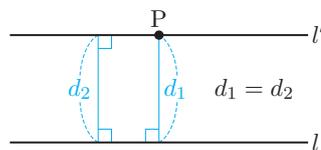
한 선분 AB가 고정되어 있을 때 어떤 점 P가 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 를 만족시키면 P는 AB를 지름으로 하는 원 위의 점입니다. 이는 $\angle APB$ 를 원주각으로 해석해서도 얻을 수 있고, 삼각형 PAB의 외심이 빗변 위에 있음을 이용해서도 얻을 수 있습니다.

거리를 다루는 역발상

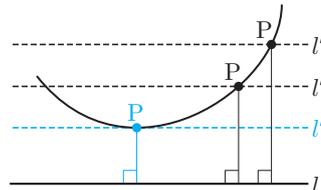
‘직선과 직선 사이의 거리’로 ‘점과 직선 사이의 거리’를 구할 수 있다



직선 l 위에 있지 않은 점 P 에 대하여 P 를 지나고 l 과 평행한 직선을 l' 이라 합시다. 이때 P 와 l 사이의 거리를 d_1 이라 하고, 두 직선 l 과 l' 사이의 거리를 d_2 라 하면, $d_2 = d_1$ 으로 정의됩니다. 이는 P 와 l 위의 점 Q 사이의 거리의 최솟값이 d_1 이기 때문입니다.

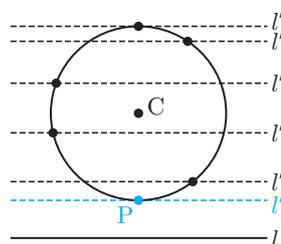


이를 역으로 이용하면 점 P 에서 직선 l 에 수선의 발을 내리지 않고도 P 와 l 사이의 거리 d_1 을 구할 수 있습니다. 점 P 를 지나고 l 에 평행한 직선 l' 을 그린 후, l 과 l' 사이의 거리 d_2 를 구하는 것입니다. 그러면 $d_2 = d_1$ 이므로 자연스럽게 d_1 의 값을 구할 수 있습니다.



이는 점 P 가 고정되어 있지 않고, 점 Q 가 직선 l 위를 움직이는 복잡한 상황에서 유용합니다. P 가 움직임에 따라 l' 이 어떻게 움직이는지를 따지고, l 과 l' 의 거리의 최솟값만 구하면 해결할 수 있기 때문입니다.

원 위를 움직이는 점 P 와 직선 l 위를 움직이는 점 Q 사이의 거리

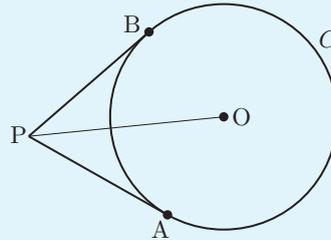


중심이 C 이고 반지름의 길이가 r 인 원 위를 움직이는 점 P 와 원과 만나지 않는 직선 l 사이의 거리의 최솟값을 구해봅시다. 점 P 가 원 위를 움직임에 따라 P 를 지나고 l 에 평행한 직선 l' 의 양상은 그림과 같으며, l 과 l' 의 거리 d_2 가 최소일 때는 l' 이 그림의 색칠된 직선일 때입니다. 이때 C 에서 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 선분 CH 와 l' 이 만나는 점을 A 라 하고, $\overline{CH} = d$ 라 하면, $d_2 = d - r$ 입니다.

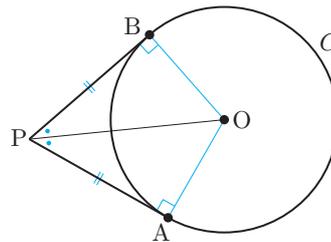
예제 22 풀이

원 C 의 중심 O 와 원 C 외부의 점 P 에 대하여 P 에서 C 에 그은 두 접선의 각 접점을 각각 A, B 라 할 때, 다음을 증명하세요.

- ① $\overline{PA} = \overline{PB}$
- ② OP 가 $\angle APB$ 를 이등분한다.



① 풀이



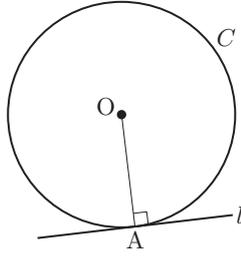
선분 OA, OB, OP 를 그으면 OAP 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 $PA = \sqrt{OP^2 - OA^2}$ 이고, OPB 는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 $PB = \sqrt{OP^2 - OB^2}$ 입니다. 이때 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 입니다.⁴⁰⁾

② 풀이

①에서 $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ 입니다. (SSS 합동) 따라서 $\angle APO = \angle BPO$ 입니다.

40) 예제 21과 동일한 아이디어를 쓰기 위해 피타고라스 정리를 썼지만, $\triangle OBP \equiv \triangle OAP$ (RHS 합동)임을 이용해도 됩니다.

예제 21. 중심이 O 인 원 C 위의 점 A 를 지나고 OA 에 수직인 직선 l 에 대하여 원 C 와 직선 l 은 한 점 A 에서만 만남을 증명하세요.



예제 22. 원 C 의 중심 O 와 원 C 외부의 점 P 에 대하여 P 에서 C 에 그은 두 접선의 각 접점을 각각 A, B 라 할 때, 다음을 증명하세요.

- ① $\overline{PA} = \overline{PB}$
- ② OP 가 $\angle APB$ 를 이등분한다.

