기하

맑은 개념

INTO THE MATH

Collector's Edition

송지은 편저

smart is sexy
Orbi.kr

orbibooks

01 원리 : 평면도형으로서의 이차곡선(논증기하)

각 이차곡선의 대칭성과, 이차곡선에 정보를 표시하는 방법을 알아봅시다.

'평면도형으로서의 이차곡선' 문제의 해법

'평면도형으로서의 이차곡선' 문제의 해법을 요약하면 다음과 같습니다.[2)]

① 이차곡선의 정의와 대칭성을 통해 얻은 정보를 그림에 표시한다.

② 평면기하의 3요소를 활용하여 정답에 다가가는 방향으로 새로운 정보를 얻는다.

대부분의 문제을 풀이하는 흐름에 따라 언급하였지만, 우리에게 익숙한 내용은 ①보다는 ②입니다. 그렇기 때문에 익숙한 ②를 먼저 살펴본 뒤 ①을 짚어봅시다.

2) 평면기하의 3요소가 무엇인지는 〈맑은개념 중학도형〉에서 다루었습니다.

② 이차곡선은 사실 중학도형 문제이다.

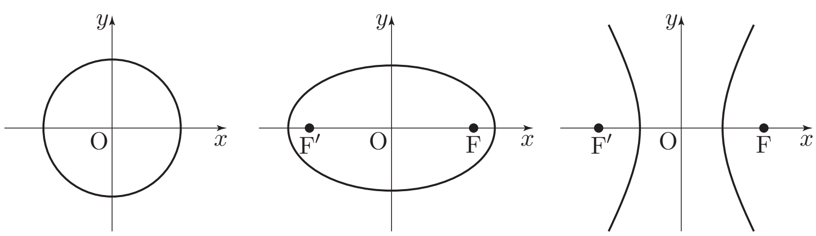
이차곡선을 평면도형으로 다루는 문제라면 중학도형이 문제의 답을 내는 중요한 조건이 되는 경우가 대부분입니다. 따라서 도형을 다루는 이차곡선 문제에서는 이차곡선의 개념과 다양한 중학도형의 개념을 넘나드는 것이 매우 중요합니다.

물론 수능에서는 중학도형의 지엽적인 내용이 아니라 핵심적인 내용을 다룰 뿐이므로, 중학도형에 과몰입해서 경시대회 수준의 고난도 내용을 공부하는 것은 권장하지 않습니다. 〈맑은개념 중학도형〉의 워크북까지 다루었던 내용만으로 충분합니다.

①-1 : 이차곡선의 대칭성

이차곡선인 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 대칭성을 갖는 도형입니다. 그러나 '이차곡선의 정의'와 달리 '이차곡선의 대칭성'은 문제풀이 과정에서 간과하기 쉽습니다. 출제자가 넌지시 대칭성에 관련된 조건을 제시하는 경우가 많으므로 유의합시다.

원, 타원, 쌍곡선의 대칭성



원 C, 타원 e, 쌍곡선 h는 기본형[3)]에 한해 원점, x축, y축에 대하여 대칭입니다.

3) 여기서 기본형이란 다음과 같은 꼴을 말합니다.

$$C : x^2 + y^2 = r^2$$

$$e : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

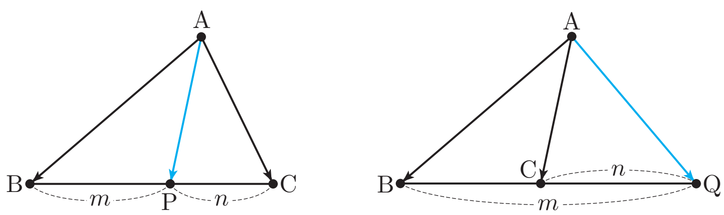
$$h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

03 원리 : 도형과 연산의 혼합 해석

배운 내용을 도형에 접목해 벡터식을 간단히 정리해보고, 벡터로 길이나 넓이로 구해봅시다.

내분점과 외분점을 이용하기

내분점과 외분점을 이용하면 '두 벡터의 합 또는 차'를 하나의 벡터로 나타낼 수 있습니다.



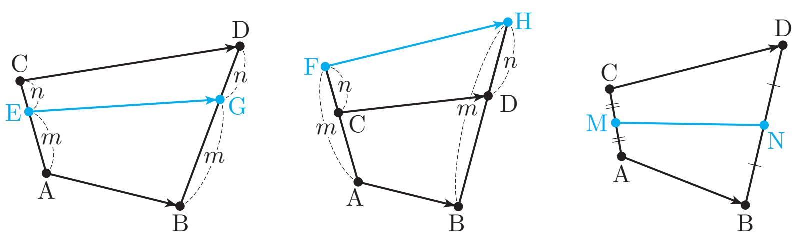
(a) 내분점 (b) 외분점

두 벡터의 시점이 동일할 때, 내분점과 외분점을 이용하여 두 벡터를 하나의 벡터로 합칠 수 있습니다. 선분 BC를 $m : n$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 다음이 성립합니다.14)

$$m\overrightarrow{\mathrm{AC}} + n\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (m+n)\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$m\overrightarrow{\mathrm{AC}} - n\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (m-n)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

14) 증명은 부록에 수록하였습니다.



(c) 내분점 (d) 외분점 (e) 중점

두 벡터의 시점이 동일하지 않을 때에도 내분점과 외분점을 이용하여 두 벡터를 하나의 벡터로 합칠 수 있습니다. 선분 AC를 $m : n$으로 내분하는 점을 E, 외분하는 점을 F라 하고, 선분 BD를 $m : n$으로 내분하는 점을 G, 외분하는 점을 H라 할 때, 다음이 성립합니다.15)

$$(a) \ : \ m\overrightarrow{\mathrm{CD}} + n\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (m+n)\overrightarrow{\mathrm{EG}}$$

$$(b) \ : \ m\overrightarrow{\mathrm{CD}} - n\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (m-n)\overrightarrow{\mathrm{FH}}$$

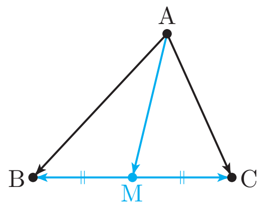
15) 증명은 부록에 수록하였습니다.

이를 이용하면 벡터를 평행이동하지 않고도 '두 벡터의 합이나 차'를 한 벡터로 나타낼 수 있으므로 편리합니다. 특히 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$를 구할 때 더 유용한데, 'A와 C의 중점 M'과 'B와 D의 중점 N'에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$으로 간단히 나타낼 수 있기 때문입니다.

벡터를 도형에 접목하기

중점을 이용한 내적

시점이 같은 두 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$의 종점 B, C의 중점을 M이라 할 때, M을 이용하면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 간단하게 계산할 수 있습니다.

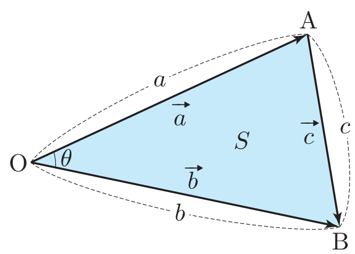


$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$에서 M을 이용하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 쪼갠 후 $\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-\overrightarrow{\mathrm{MB}}$를 이용하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}})&=(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{MB}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2\end{aligned}$$

이는 종점이 같은 두 벡터의 내적에도 적용할 수 있습니다. $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 성립하기 때문입니다.

삼각형의 넓이와 나머지 한 변의 길이



$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$c=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}$$

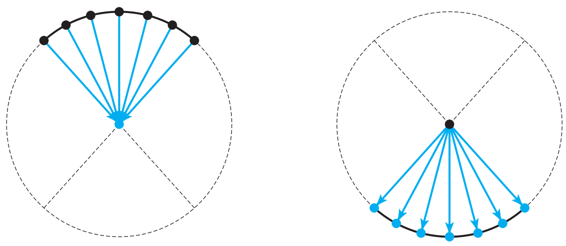
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

서로 이루는 각의 크기가 θ인 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이 S와 선분 AB의 길이 c를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 표현해봅시다.

삼각형 AOB의 넓이 S

두 변의 길이와 끼인각의 크기를 이용하여 구하면 $S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$입니다. 이때 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$을 대입하고 정리하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\end{aligned}$$

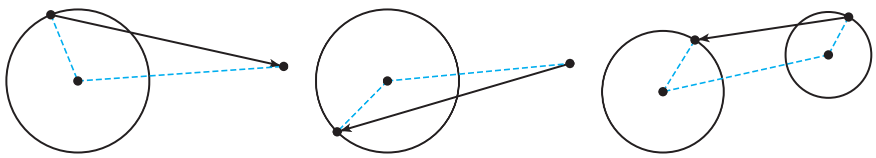


그림과 같이 종점이 원의 중심이고 시점이 원의 일부인 호 위를 움직이는 벡터, 즉 호벡터의 역벡터는 평행이동하면 또다른 호벡터를 나타냅니다. 단, 원벡터처럼 완전히 동일한 상황이 되는 것이 아니라 서로 마주보는 형태의 호가 되므로 주의해야 합니다.

주어진 벡터를 기본벡터로 나타내기

문제에서 주어지는 벡터들이 모두 기본벡터인 것은 아닙니다. 따라서 필요하다면 주어진 벡터를 덧셈 또는 뺄셈으로 적당히 쪼개어 기본벡터들의 합 또는 차로 나타내어야 합니다.

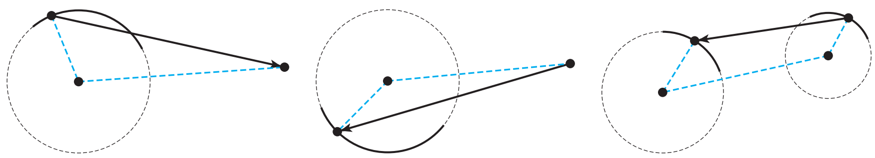
원과 연관된 벡터



(a) 시점이 원 위를 움직임 (b) 종점이 원 위를 움직임 (c) 둘 다 원 위를 움직임

시점과 종점 중 하나가 어떤 원 위를 움직이는 벡터는 그 원의 중심을 이용하여 두 개의 벡터로 쪼개는 것이 좋습니다. 이렇게 쪼개면 원벡터 1개를 얻을 수 있기 때문에 편리합니다. 만약 시점과 종점이 각각 다른 두 원 위의 점이라면 각 원의 중심을 이용하여 세 개의 벡터로 쪼개면 원벡터 2개를 얻을 수 있습니다.

호와 연관된 벡터



(d) 시점이 호 위를 움직임 (e) 종점이 호 위를 움직임 (f) 둘 다 호 위를 움직임

시점과 종점 중 하나가 어떤 호 위를 움직이는 벡터는 그 호를 포함하는 원의 중심을 이용하여 두 개의 벡터로 쪼개는 것이 좋습니다. 이렇게 쪼개면 호벡터 1개를 얻을 수 있기 때문에 편리합니다. 만약 시점과 종점이 각각 중심이 다른 두 호 위의 점이라면 중심을 이용하여 세 개의 벡터로 쪼개면 호벡터 2개를 얻을 수 있습니다.

05 이해 : 벡터의 최대 · 최소 해석하기

기본벡터로 최대 · 최소를 구하는 방법, 도형을 이용하여 최대 · 최소를 구하는 방법을 알아봅시다.

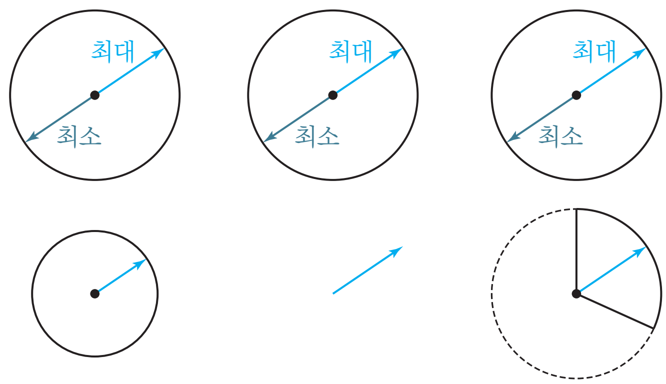
19) 선분 또는 직선과 연관된 벡터는 그렇지 않으므로 나중에 다룹니다.

20) 증명은 부록에 수록하였습니다

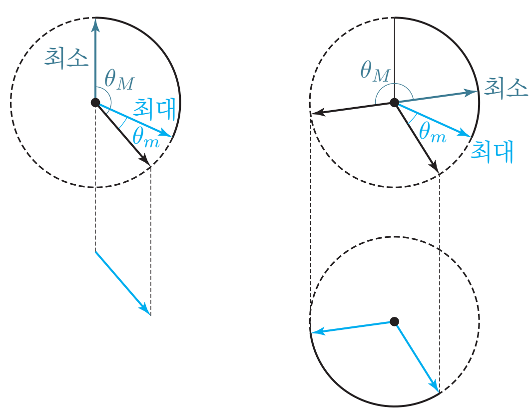
앞서에서 배웠듯이 정점, 원, 호와 연관된 벡터는 모두 기본벡터의 합으로 나타낼 수 있습니다.[19] 따라서 기본벡터의 '합의 크기' 또는 '내적'의 최대 · 최소를 구할 수 있다면 상당수의 벡터에 대한 최대 · 최소를 구할 수 있을 것입니다.

그런데 기본벡터는 크기가 일정하다는 공통점이 있습니다. 두 기본벡터가 이루는 각의 크기 θ만 알면 두 기본벡터의 '내적' 또는 '합의 크기'의 최대 · 최소를 알 수 있습니다.[20]. 이렇게 '두 벡터가 이루는 각의 크기'가 중요하므로 앞으로 '두 벡터가 이루는 각의 크기'를 짧게 사잇각이라 부르기로 하고, 사잇각을 이용하여 기본벡터 사이의 '내적' 또는 '합의 크기'의 최대 · 최소를 알아봅시다.

두 기본벡터의 사잇각을 이용하여 최대 · 최소 해석하기



원벡터와 원벡터, 원벡터와 고정벡터, 원벡터와 호벡터는 방향이 동일할 때 $(\theta = 0)$ 내적 또는 합의 크기가 최대이고, 방향이 반대일 때 $(\theta = \pi)$ 내적 또는 합의 크기가 최소입니다.



호벡터와 고정벡터, 호벡터와 호벡터는 $\theta = \theta_m$ 일 때 최대, $\theta = \theta_M$ 일 때 최소가 됩니다.

'내적'과 '합의 크기'는 최솟값과 최댓값 사이의 모든 값을 가질 수 있다

21) 증명은 부록에 수록하였습니다.

두 기본벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면, $\vec{a} \cdot \vec{b}$는 구간 $[m, M]$ 사이의 모든 실수의 값을 가질 수 있습니다. 이는 $\vec{a} + \vec{b}$도 마찬가지입니다.[21]

세 개 이상의 기본벡터(원벡터, 고정벡터)의 합의 크기

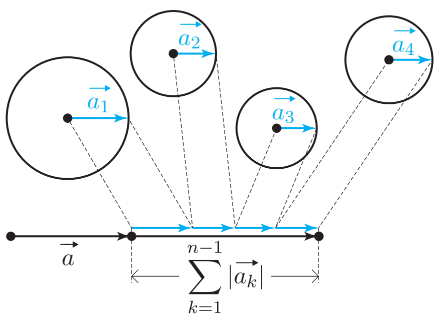
'두 벡터의 합의 크기'를 공부했으므로 이를 확장한 '세 개 이상의 벡터의 합의 크기'를 알아봅시다. 단, 세 개 이상의 벡터의 합의 크기는 원벡터와 고정벡터에 대해서만 다루고, 호벡터에 대해서는 다루지 않습니다.

먼저 'n개의 벡터가 모두 원벡터일 때'의 최대·최소를 알아보고, 그 다음으로 'n개의 벡터가 각각 원벡터 또는 고정벡터일 때'의 최대·최소를 알아보겠습니다.[22)]

22) 본 내용의 자세한 도출 과정은 부록에 수록하였으며, 본문에서는 도출 결과와 그 결과가 나타나는 상황에 대해서만 서술하였습니다.

n개의 벡터가 모두 원벡터일 때(최대)

n개의 원벡터 중 크기가 가장 큰 벡터를 $\vec{a}$, 나머지 벡터를 각각 $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{a_{n-1}}$이라 하고, $\vec{a}$와 $\vec{a_k}$의 사잇각을 θ_k (단, k는 $1 \le k \le n-1$인 자연수)라 할 때 $\left|\vec{a}+\sum_{k=1}^{n-1}\vec{a_k}\right|$의 최대를 알아봅시다.



n개의 벡터의 방향이 모두 동일할 때, 즉 자연수 k의 값에 관계없이 $\theta_k = 0$일 때 최댓값 $|\vec{a}|+\sum_{k=1}^{n-1}|\vec{a_k}|$를 갖습니다.

n개의 벡터가 모두 원벡터일 때(최소)

n개의 원벡터 중 크기가 가장 큰 벡터를 $\vec{a}$, 나머지 벡터를 각각 $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{a_{n-1}}$이라 하고, $\vec{a}$와 $\vec{a_k}$의 사잇각을 θ_k (단, k는 $1 \le k \le n-1$인 자연수)라 할 때 $\left|\vec{a}+\sum_{k=1}^{n-1}\vec{a_k}\right|$의 최소를 알아봅시다. $|\vec{a}|$와 $\sum_{k=1}^{n-1}|\vec{a_k}|$의 대소관계에 따라 '최솟값'과 '최소일 때의 상황'이 달라집니다.

Step 1

m과 n이 결정하는 평면을 바닥평면이라고 할 때, 목푯값은 평면 ACD와 바닥평면이 이루는 각의 크기입니다. 이면각의 크기는 직접 이면각을 구하는 방법, 정사영을 통해 간접적으로 구하는 방법으로 구할 수 있습니다.

Step 2

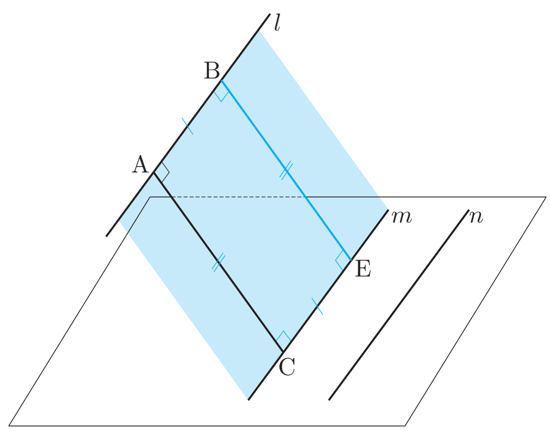
현재 상황을 파악하고 목푯값을 구할 수 있을 것으로 예상되는 여러가지 풀이방법을 서로 비교해봅니다.

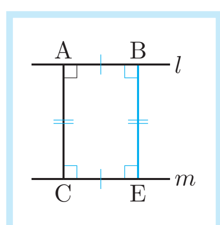
1) 두 평면의 교선 CD가 드러나 있습니다. 따라서 CD에 수직이고 각 평면에 포함된 직선을 찾으면 목푯값을 구할 수 있습니다.

2) 평면 ACD에 포함된 삼각형 ACD가 눈에 띕니다. 삼각형 ACD의 넓이는 쉽게 구할 수 있을 것으로 보이므로 삼각형 ACD의 바닥평면 위로의 정사영의 넓이만 구하면 목푯값을 구할 수 있습니다. 그런데 C와 D의 바닥평면 위로의 정사영은 자기 자신이므로 점 A의 바닥 평면 위로의 정사영 A′의 위치만 찾으면 될 것입니다.

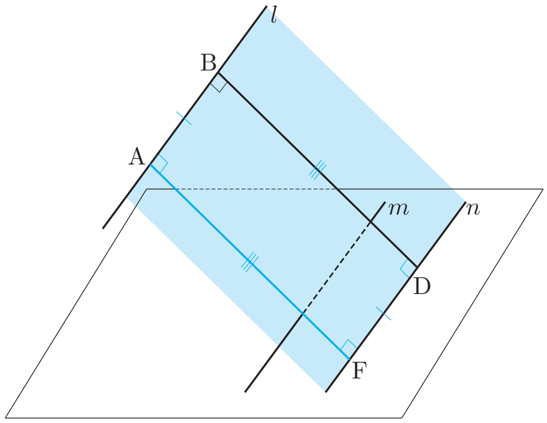
여기서는 가장 직접적인 방법인 1)을 선택하겠습니다. 우리의 목푯값인 '이면각의 크기'와 목푯값을 구하는 방법으로 선택한 '교선 CD에서 양쪽 수선을 그리겠다'는 목적을 잊지 않은 채 진행해야 합니다.

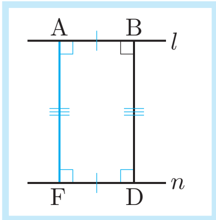
Step 3





먼저 평행한 두 직선인 l, m이 결정하는 평면을 살펴보겠습니다. 오른쪽 그림처럼 l, m이 결정하는 평면에서의 상황을 새로운 그림(평면도형)으로 나타내면 $\overline{\mathrm{AC}} \perp m$임을 쉽게 알 수 있습니다. 같은 방법으로 B에서 m에 내린 수선의 발 E를 생각할 수 있고, 이를 통해 ACEB가 직사각형임을 알 수 있습니다.

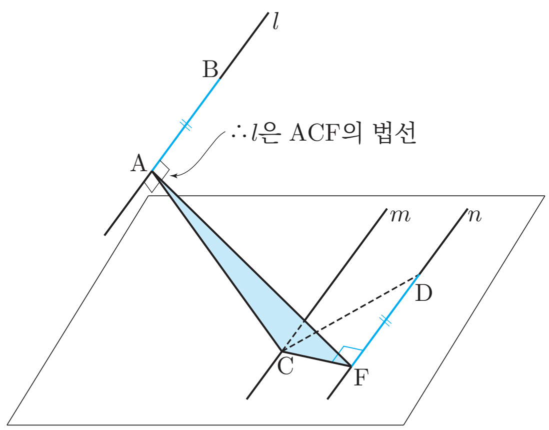


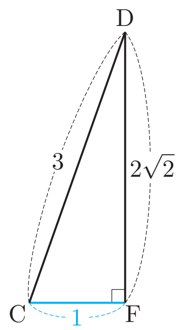


같은 논리를 l과 n이 결정하는 평면에서도 적용할 수 있습니다. 점 A에서 직선 n에 내린 수선의 발을 F라 하면 $\overline{\mathrm{AF}} = 4\sqrt{2}$입니다.

지난 두 단계에서, 문제에서는 주어지지 않았던 새로운 직선인 BE, AF가 등장했습니다. 목푯값은 '평면 ACD와 바닥의 평면이 이루는 각의 크기'이고 우리가 선택한 풀이법은 '교선 CD에서 양쪽 직각'이었는데, 두 직선 중 목푯값에 다가가는 정보를 제공할 직선은 AF입니다. 왜냐하면 BE, AF는 각각 B, A를 포함하는데, A는 평면 ACD 위의 점이지만 B는 그렇지 않으므로, 두 점 중 교선 CD와 더 밀접한 연관을 가진 점은 A이기 때문입니다.[73] 따라서 AF를 통해 새로운 정보를 찾아야 합니다.

73) 이 부분이 '목푯값에 다가가는 방향'이 어디인지에 대한 근거를 제시하는 예시입니다.

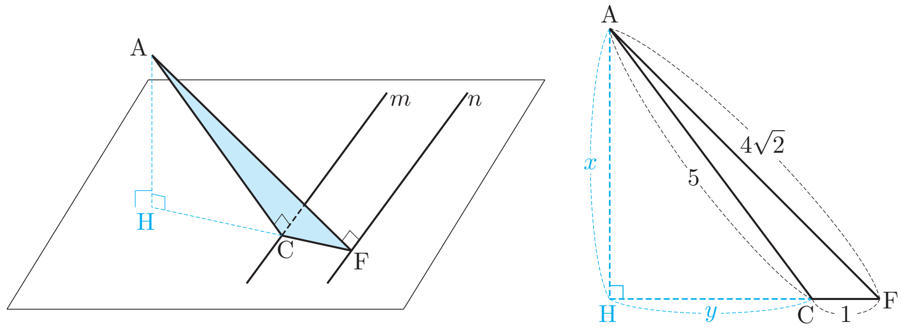




$\overline{\mathrm{AF}}$의 상황을 보니 직선 AC와 A에서 만나고 있음을 알 수 있습니다. 즉 두 직선은 한 평면 ACF를 결정하므로 이 평면을 관찰하겠습니다. 이때 두 직선이 모두 l과 약직이므로 l은 평면 ACF에 강직입니다.[74] l이 평면 ACF의 법선이므로 m, n도 법선입니다.[75] 따라서 색칠된 약직을 얻을 수 있습니다. 그러면 삼각형 DCF는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{CF}} = 1$입니다.

74) 명제 증명 파트의 예제 2 참조

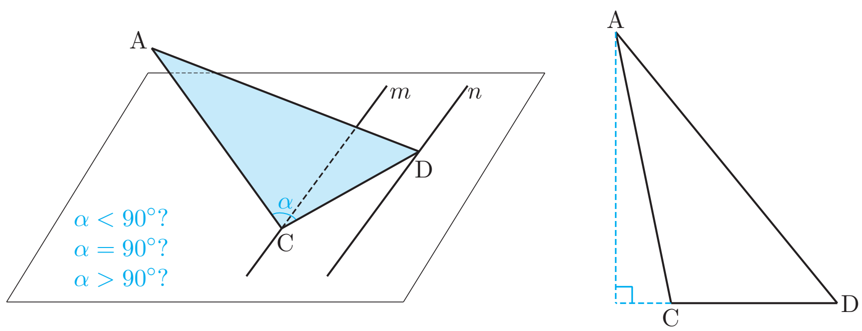
75) 명제 증명 파트의 예제 7 참조



76) 명제 증명 파트의 예제 4 참조

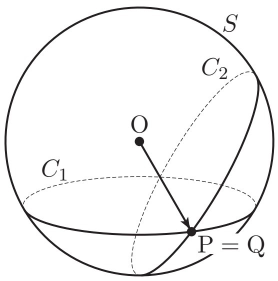
77) 명제 증명 파트의 예제 5 참조

한편 평면 ACF는 바닥평면과 수직이고[76] A에서 바닥평면에 내린 수선의 발은 두 평면의 교선 CF 위에 있습니다.[77] 두 직선 AH, CF도 한 점 H에서 만나므로 한 평면을 결정합니다. 이제 이 평면에 포함된 직각삼각형 AHF에서 $\overline{\mathrm{AH}}=x$, $\overline{\mathrm{CH}}=y$라 하면 피타고라스 정리에 의해 $x^2+y^2=5^2$, $x^2+(y+1)^2=(4\sqrt{2})^2$입니다. 이를 연립하면 $x=4$, $y=3$을 얻습니다.

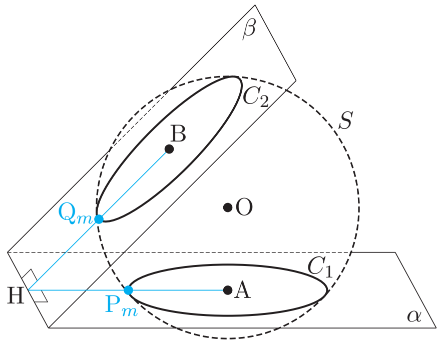


잊으셨을지 모르겠지만, 목푯값은 이면각의 크기이고 우리가 선택한 방법은 양쪽 직각입니다. 평면 ACD 위의 한 점에서 교선에 수선의 발을 내려야 하는데, CD가 교선이므로 A에서 CD에 수선의 발을 내리면 될 것입니다. 그런데 그 수선의 발을 내리기 위해서는 삼각형 ACD가 예각삼각형인지, 직각삼각형인지, 둔각삼각형인지를 알아야 합니다. AC와 CD가 이루는 각 α가 예각인지, 직각인지, 둔각인지에 따라 수선의 발의 위치가 달라지기 때문입니다. $\overline{\mathrm{AD}}^2>\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2$이므로 α는 둔각입니다. 따라서 수선의 발은 삼각형 외부에 존재합니다.

‘내적’ 또는 ‘합의 크기’가 최대 : $\overline{\mathrm{PQ}}$와 θ가 최소



(a) C_1과 C_2가 만나는 경우



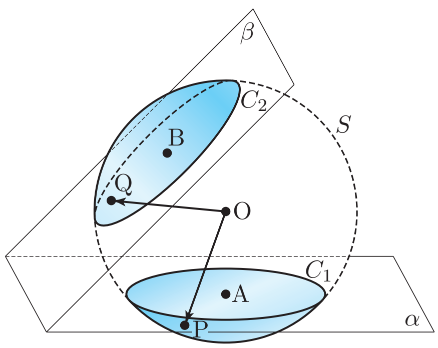
(b) C_1과 C_2가 만나지 않는 경우

(a)와 같이 C_1과 C_2가 만나는 경우, P와 Q가 같은 점이 될 수 있습니다. 그러면 $\overline{\mathrm{PQ}}=0$이므로 $m=0$입니다.

(b)와 같이 C_1과 C_2가 만나지 않는 경우, P와 Q가 같은 점이 될 수 없습니다. 이러한 상황에서는 두 평면 α, β의 교선 l에 대하여 O에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{AH}}$와 원 C_1이 만나는 점을 P_m, $\overline{\mathrm{BH}}$와 원 C_2가 만나는 점을 Q_m이라 할 때, $\overline{\mathrm{P}_m\mathrm{Q}_m}$이 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값입니다.[105] 그러면 $\theta=\angle \mathrm{P}_m\mathrm{OQ}_m$일 때 ‘내적’ 또는 ‘합의 크기’가 최소입니다.

105) 증명은 부록에 수록하였습니다.

돔벡터와 돔벡터



그림과 같이 두 평면 α, β가 중심이 O이고 반지름이 r인 구 S와 만날 때, 구 S가 두 평면 α, β와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 합시다. 이때 C_1을 밑면으로 하는 돔 위를 움직이는 점 P와 C_2를 밑면으로 하는 돔 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 각각 돔벡터입니다.

11에서와 마찬가지로, 밑면을 O에 대하여 대칭시켜 얻은 도형을 이용하여 위치관계를 파악하고, 그 상황에서 나타나는 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최대·최소를 통하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 ‘내적’과 ‘합의 크기’의 최대·최소를 구할 것입니다.[106]

106) $\overline{\mathrm{PQ}}$로 최대·최소를 구하는 이유는 콘벡터에서와 동일하므로 생략합니다.

05 찾아보기