# 목차

Show
and
Prove

# 2-2

Chapter 2. 적분의 활용

# 수리논술 전용 적분 테크닉

설명은 “2편에서 다양한 기본 치환적분에 대해 배웠었다. 이번 3편에서 배울 치환적분은 고난도 케이스에서 적용가능한 고급 치환적분이다.” 라고 하겠지만, 결국 우리가 배운 건 단 하나, 치환적분 뿐이다.
‘왜 이렇게 치환하면 풀리는가?’ 에 대한 아이디어만 흡수하면 된다.

## 1. 매개변수 치환적분 1 – 문제 조건에 알맞은 녀석으로 알잘딱깔센[13] 치환적분

함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$을 매개변수 $t$에 대하여 $(x,\ y)=(g_1(t),\ g_2(t))$로 굳이 표현하는 문제들은 대부분은 $f(x)$ 식의 형태 자체를 모르기 때문에 매개변수로 점을 표현하는 경우가 대부분이다.[14]
그런데 이런 문제에서 $\int f(x)dx$를 구하라고 하면 당황스럽다. $f(x)$ 식을 쓸 수 조차 없는데 적분하라고???

이런 문제에서 사용하는 치환적분이 매개변수 치환적분이다. $x=g_1(t)$로 치환적분해보면
$\int f(x)dx=\int f(g_1(t))\times {g_1}'(t)dt=\int g_2(t)\times {g_1}'(t)dt$과 같이 조작이 되므로, 적어낼 수 있는 함수 $g_2(t)\times {g_1}'(t)$ 를 적분하는 문제로 바뀌게 되는 것이다.

**예제 1** ★★★☆☆ 2024 세종대 모의 + 추가문항

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여

$$e^{x+y}+y-x=0$$

가 만족한다. 아래 [1] ~ [2] 에 대하여 서술하시오.

[1] $x+y=t$라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점을 $(x,\ y)=\left(\dfrac{t+e^t}{2},\ g(t)\right)$ 로 표현할 수 있다.
함수 $g(t)$를 구하시오.

[2] $\displaystyle\int_1^{1+e} f\left(\frac{s}{2}\right)ds$ 의 값을 구하시오.

13) “알아서 잘 딱 깔끔하게 센스있게”
14) ex. $e^{x+f(x)}+f(x)-x=0$인 함수 $f(x)$는 우리가 구해낼 수 없다.

TIP

함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$에 대하여 $x=\sin t$면 $y=f(x)=f(\sin t)=\dfrac{1}{\cos t}$ 이므로 $(x,\ y)=(\sin t,\ \sec t)$로

표현되는 매개변수곡선이기 때문에 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$를 구하는 방법으로 $x=\sin t$ 치환이 쓰였다고 생각할 수 있다.

즉, 2편에서 배웠던 삼각치환적분이 사실 매개변수 치환적분과 뿌리를 같이한다는 것을 확인할 수 있었다.

## 2. 매개변수 치환적분 2 – 바이어슈트라스 치환

앞서 소개한 매개변수 치환적분은 앞 소문항들을 잘 빌드업하여 출제하면 언제든 출제될 수 있으나,
이번에 소개할 매개변수 치환적분은 '유명 스킬' 이기 때문에 최신 수리논술에선 지양될만한 내용이긴 하다.

하지만 방향만 알면 그 속 내용은 전부 교과내이기 때문에, 구경만 하고 지나가자.

**강조한다. 다른 내용들과는 다르게, 깊숙하게 학습/암기할 필요는 없다.**

### | 바이어슈트라스 치환

$\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=t$라 하면 $\underline{\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \tan\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}}$이고 $\underline{d\alpha=\dfrac{2}{1+t^2}dt}$ 이다.

**증명**

$-\pi<\alpha<\pi$에 대하여 $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=t$라 하자. $1+\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sec^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$ 에서

$\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$이고, $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 이므로 $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ 이다.

한편 두배각공식에 의하여 $\cos\alpha=2\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin\alpha=2\times\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\times\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

임을 알 수 있다. 또한 $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=t$로부터 양변을 미분하면 $\dfrac{1}{2}\sec^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)d\alpha=dt,\ d\alpha=\dfrac{2}{\sec^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}dt=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

임을 알 수 있다.[15)]

**예제 2** ★★☆☆☆ 유명예제

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x+\sin x+1}dx$를 구하시오.

15) '$e^x$, $\sqrt{x}$ 뿐만 아니라 $\tan x$도 무지성 치환적분이 가능하다.'라 했던 2편에서의 학습이 이어지면 좋겠다.

## 2. 부등식에서 적분 활용 – 그래프 비교

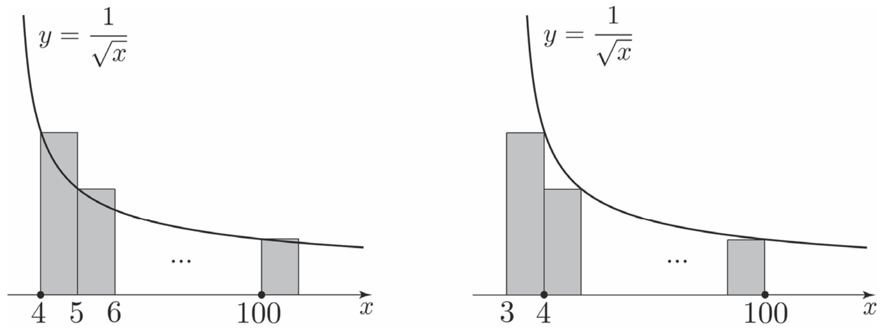
계산할 수 없는 시그마의 범위를 구할 때, 그래프의 도움을 받는 경우[17)]가 있다.

예를 들어 $\displaystyle\sum_{k=4}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}$의 값의 정수부분을 찾는 문제가 있다고 하자.[18)]

$\displaystyle\sum_{k=4}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$을 직접 계산할 수 있는 방법은 없으므로,

이 문제는 $\displaystyle n\le\sum_{k=4}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}<n+1$을 만족시키는 자연수 $n$을 찾는 것을 목표로 삼아보자.

함수 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$를 생각하면, $\displaystyle\sum_{k=4}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}$을 직사각형 넓이의 합으로 표현하는 두 가지 방법을 생각해볼 수 있다.




앞 그림의 직사각형 넓이의 합은 곡선 $y=f(x)$의 구간 $[4,\ 100]$에서의 밑면적 $\displaystyle\int_4^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$보다 크고,

뒷 그림의 직사각형 넓이의 합은 곡선 $y=f(x)$의 구간 $[3,\ 100]$에서의 밑면적 $\displaystyle\int_3^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$보다 작다. 따라서

$$16=\int_4^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\le\sum_{k=4}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}\le\int_3^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=20-2\sqrt{3}<17$$

이므로 정답은 16이다.

**TIP**

물론 $\displaystyle\int_3^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$이나 $\displaystyle\int_4^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$가 아닌 값들로도 $\displaystyle\sum_{k=4}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}$의 범위를 정할 수 있지만,

$\sqrt{x}$ 안에 제곱수가 들어가야 계산이 깔끔하므로 저 두 적분값으로 $\displaystyle\sum_{k=4}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}$의 범위를 정한 것이다.

이렇게 적절한 값으로 조이는 것은 문제풀이 경험에서 얻어지므로, 해당 유형의 많은 문제를 접해보도록 하자.

17) 그래프 답안보다 수식적 답안을 강조했었지만, 증가/감소함수 혹은 아래/위로 볼록 함수 같이 '너무 자명한 상황의 도식화' 같은 경우는 만점답안으로 충분히 인정된다.

18) 과거 한양대, 이화여대 기출소재

## 4. 곡선의 길이

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 점 $(a,\ f(a))$과 점 $(b,\ f(b))$ 사이의 곡선 $y=f(x)$ 의 길이 $l$은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \quad (\text{단, } a<b)$$

수능에서는 적분이 쉽게 되는 함수들로만 출제됐었지만, 본디 이 형태는 쉽게 적분할 수 없는 형태이다.
따라서 평균값의 정리를 활용한다던가, 피적분함수의 형태를 바꾼다던가 등의 여러 방법들을 동원하여 위 적분값의 범위를 구하는 고급스킬이 자주 사용된다. 예를 들면,

$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}>\sqrt{0+\{f'(x)\}^2}$ 이므로 $l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx>\int_a^b |f'(x)|\,dx$ 으로 조일 수도 있고,

$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$의 최댓값 $M$, 최솟값 $m$을 찾아서 $(b-a)m<\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx<(b-a)M$ 으로 조일 수 있다.

너무 많은 방법이 있기 때문에, 문제의 제시문과 앞의 소문항들을 이용하여 최선의 길을 찾는 것이 우리가 할 수 있는 Best임을 명심하자. 다음 예제에서 적용 예시를 봐보자. (문제가 약간 어려울 수 있지만 좋은 문제.)

**예제 7** ★★★★☆ 2023 부산대

**제시문**

(가) $x=a$ 에서 $x=b$ 까지의 곡선 $y=f(x)$ 의 길이 $l$은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(나) 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 와 $a$ 에 가까운 모든 실수 $x$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$f(x)\le h(x)\le g(x)$ 이고 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=L$ 이면 $\lim_{x\to a} h(x)=L$

(다) 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$(b-a)f(a)<\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)f(b)$$

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $p(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (i) $t<p(t)$ |
| (ii) $x=t$에서 $x=p(t)$까지의 곡선 $y=x^2$의 길이는 $1$이다. |

**[1]** $\lim_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$ 임을 보이시오.

**[2]** $\lim_{t\to\infty} t\{p(t)-t\}$ 의 값을 구하시오.

**[3]** $\lim_{t\to\infty} t^2\{1-(p'(t))^2\}$ 의 값을 구하시오.

# 더블카운팅

더블카운팅이란, 어떠한 등식을 증명할 때 양변의 의미가 같음을 밝힘으로써 식의 값도 같다고 증명해내는 방식을 의미한다. (더 넓은 의미로는, 수학적 계산 보다는 식의 의미를 부여하여 어떠한 명제를 증명하는 방식)
제일 많은 예시가 있는 단원은 [순열과 조합] 단원이다.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r $$

위 공식은 매우 유명한 공식이다. (파스칼 삼각형을 이루는 공식으로 알려져있다.) 이를 증명하는 일반적인 방법은, 조합의 정의 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{(n-r)! \times r!}$ 을 이용하여 수식적으로 증명하는 방법도 있다.

하지만 이를 더블카운팅으로 해석하면 다음과 같다.

좌변의 ${}_n\mathrm{C}_r$은 $n$명 중 $r$명을 고르는 경우의 수를 의미하는데, 이를 현실에 비유해보면
$n$명의 우리나라 축구선수 중 월드컵에 출전할 대한민국 국가대표 $r$명을 고르는 경우의 수가 좌변의 의미다.
그런데 국가대표에 이강인 선수(이하 L이라 한다.) 가 포함될 수도, L이 포함되지 않을 수도 있다.
L이 포함된다면, L을 제외한 $(n-1)$명 중 $(r-1)$명을 골라야 국가대표 $r$명이 완성된다. … ①
L이 포함되지 않는다면, L을 제외한 $(n-1)$명 중 $r$명을 골라야 국가대표 $r$명이 완성된다. … ②
좌변이나, ①과 ②를 더한 우변이나 결국 두 방법 모두
대한민국 국가대표를 결정하는 방법의 수를 구한 방법
임은 틀림없으므로, 좌변=우변이고 따라서 ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ 인 것이다.
이러한 의미부여를 통해 보이기 어려운 명제를 보이는 방식을 더블카운팅이라 한다.

### | 더블카운팅의 의미확장

이 문제의 정답은 A이지만, 그와 다른 A'을 데려와서 이 A'과 찐 정답인 A가 같은 의미임을 설명함으로써 내 정답인 A'가 이 문제의 정답이라고 주장하는 방법도 더블카운팅이라고 할 수 있다.
예를 들어, 10$짜리 고기 / 1$짜리 햇반 / 2$짜리 음료수 이렇게 딱 세 종류만 파는 어느 고기집의 하루 매출을 계산하는 문제가 나왔다고 하자.

이 문제에서는 각 테이블의 요금의 $f(k)$을 다 더해서 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 으로 하루 매출을 구하라고 했지만, 각 테이블에서 시킨 고기/햇반/음료수의 조합이 너무 다양하여 시그마를 풀기 어렵다고 판단했다고 하자.
(즉, $f(k)$가 복잡해서 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$를 구하기 어려운 상황. 예를 들어 $\sum_{k=1}^{n} \left[ \dfrac{6k^2+k}{2k+1} \right]$ 같은 느낌!!)
이때, 다른 방법으로 고깃집의 하루 매출을 계산하는 방법은 무엇이 있을까?
고기가 총 $p$ 인분, 햇반이 총 $q$ 공기, 음료수가 총 $r$ 병 나간 것을 품목별로 각각 세어본다면,
가게의 총 매출을 $(10 \times p + 1 \times q + 2 \times r)$$ 로 구할 수 있다. 앞서 더할 항이 많았던 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$을 풀기보다는 오직 세 품목의 판매액에 집중한 것이다.
결국, 이 방식은 마치 $\dfrac{y-2}{x-1}$란 식을 수능에서 두 점 $(1,\ 2)$, $(x,\ y)$ 사이의 기울기라고 해석한 것과 다를 바 없다.

Just, 발상의 전환 = 더블카운팅

**예제 15** ★★★☆☆ 2020 서울시립대

자연수 $n$ 에 대하여 방정식 $x+y+z=n+2$ 를 만족시키는 세 자연수 $x$, $y$, $z$ 의 순서쌍 $(x, y, z)$ 전체의 집합을

$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \cdots, (x_m, y_m, z_m)\}$$

이라 하자. $\sum_{k=1}^{m}\left(x_k{}^2+y_k{}^2+z_k{}^2\right)$ 을 $n$ 에 대하여 인수분해된 식으로 나타내어라.

연습지

해설 15

Idea.1 $(a,\ b,\ c)$가 주어진 집합의 원소이면 $a$, $b$, $c$의 순서를 바꿔도 주어진 집합의 원소가 되므로
$\sum_{k=1}^{m} {x_k}^2 = \sum_{k=1}^{m} {y_k}^2 = \sum_{k=1}^{m} {z_k}^2$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{m}\left({x_k}^2+{y_k}^2+{z_k}^2\right)=3\sum_{k=1}^{m}{x_k}^2$이다.

Idea.2 $x_k=l\,(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때 가능한 $y_k$, $z_k$의 순서쌍 $(y_k,\ z_k)$는

$$(1,\ n-l+1),\ (2,\ n-l),\ \cdots,\ (n-l+1,\ 1)$$

로 총 $(n-l+1)$개다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{m}{x_k}^2=\sum_{l=1}^{n}l^2(n-l+1)$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{m}{x_k}^2=(n+1)\sum_{l=1}^{n}l^2-\sum_{l=1}^{n}l^3$$
$$=\frac{(n+1)n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{m}\left({x_k}^2+{y_k}^2+{z_k}^2\right)=3\sum_{k=1}^{m}{x_k}^2=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}$이다.

TIP

$\sum_{k=1}^{m}\left({x_k}^2+{y_k}^2+{z_k}^2\right)$을 구하려면 $({x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2)+({x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2)+\cdots+({x_n}^2+{y_n}^2+{z_n}^2)$을 괄호 순서대로 차근차근 더하거나, $x_k$를 $k$에 대한 식으로 표현하여 $k$에 대한 시그마 $\sum_{k=1}^{m}{x_k}^2$를 풀어내야할 것 같다는 것이 일감이지만, 이를 새로운 문자에 대한 시그마인 $\sum_{l=1}^{n}l^2(n-l+1)$의 값과 같음을 설명하고서 쉽게 구했다. 이 두 아이디어의 연계과정을 '더블 카운팅'으로 생각할 수 있다.

예제 16 ★★★☆☆ 2018 서울시립대

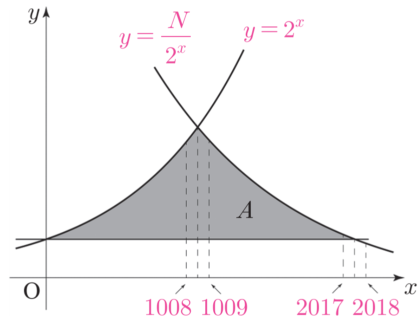
자연수 $n$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 두 자연수 $x$ 와 $y$ 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 $a_n$ 이라 하자.

$N = 2^{2018} - 1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{N} a_k$ 의 값을 구하여라.

(1) $y = \dfrac{n}{2^x}$

(2) $y \leq 2^x$

연습지




그림과 같이 좌표평면에서 연립부등식 $y \le \frac{N}{2^x}$ , $y \le 2^x$ , $y \ge 1$ 을 만족시키는 좌표들을 표현한 영역을 $A$ 라 하자.[34] $1 \le n \le N$ 인 자연수 $n$ 에 대하여 $y=\frac{n}{2^x}$ 과 $y \le 2^x$ 을 모두 만족시키는 점 $(x,\ y)$ ($x,\ y$ 는 자연수)는 영역 $A$ 에 속하고, $m \ne n$ 이면 두 곡선 $y=\frac{m}{2^x}$ , $y=\frac{n}{2^x}$ 은 만나지 않는다. 한편 영역 $A$ 에 있는 점 $(p,\ q)$ ($p,\ q$ 는 자연수)에 대하여 $r=q^{2^p}$ 라 두면 $r \le N$이고 점 $(p,\ q)$ 는 곡선 $y=\frac{r}{2^x}$ 에 있으며 $q \le 2^p$ 이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{N} a_k$ 는 영역 $A$ 에 포함되는 점 $(x,\ y)$ ($x,\ y$ 는 자연수)의 개수와 같다.
(이 부분이 더블카운팅 해석에 속함)

$x \ge 2018$ 이면 $y \le \frac{N}{2^x} \le \frac{2^{2018}-1}{2^{2018}} < 1$ 이므로 $y \le \frac{N}{2^x}$ 을 만족시키는 두 자연수 $x,\ y$ 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 가 존재하지 않는다. 또한 $\frac{N}{2^x}=2^x$ 이면 $2^{2017} < 2^{2x} = N < 2^{2018}$ 이므로 $1008 < x < 1009$ 이다.

두 곡선 $y=2^x$ , $y=\frac{N}{2^x}$ 의 교점의 $x$ 좌표는 1008보다 크고 1009보다 작으므로,

따라서 자연수 $x$ 에 대하여 $1 \le x \le 1008$ 이면 $1 \le y \le 2^x$ 인 자연수 $y$ 의 개수는 $2^x$ 이고 $1009 \le x \le 2017$ 이면 $1 \le y \le \frac{N}{2^x} = 2^{2018-x} - 2^{-x}$ 인 자연수 $y$ 의 개수는 $2^{2018-x}-1$ 이다.

그러므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} a_k &= \sum_{p=1}^{1008} 2^p + \sum_{p=1009}^{2017} (2^{2018-p}-1) \\ &= \sum_{p=1}^{1008} 2^p + \sum_{p=1}^{1009} (2^p-1) = 3 \cdot 2^{1009} - 1013\end{aligned}$$

이다.

34) cf. 부등식의 영역은 교육과정에서 제외됐지만, 단순히 곡선의 위/아래 중 어디에 점이 포함되는가 정도는 수리논술의 선에서 출제될 수 있다는 판단하에 문제를 넣었다. 마치 삼각치환적분/두배각공식과 같이 말이다.

# Show and Prove

# 3

수리논술을 위한
Advanced 미적분 & Advanced Theme

## 실전논제 해설 모음

Show and Prove

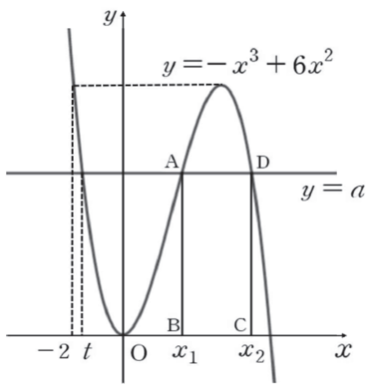
CHAPTER

# 1

# 미분의 활용

## 논제 1

**[1]** $t$ 가 방정식 $x^3-6x^2+a=0$ 의 근이므로 $t^3-6t^2+a=0$, $a=6t^2-t^3$ 이다. 따라서
$x^3-6x^2+a=x^3-6x^2+6t^2-t^3=(x-t)\{x^2-(6-t)x+t^2-6t\}=0$ 이므로
나머지 두 근은 $\dfrac{6-t\pm\sqrt{(6-t)^2-4(t^2-6t)}}{2}=\dfrac{6-t\pm\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2}$ 이다.




**[2]** $\mathrm{B}(x_1,\ 0)$, $\mathrm{C}(x_2,\ 0)$, $\overline{\mathrm{AB}}=a$라 하자. $x_1,\ x_2$는 방정식 $-x^3+6x^2=a$ 의 해이다. 방정식 $-x^3+6x^2=a$ 의 $x_1,\ x_2$ 가 아닌 다른 해를 $t$ 라 하자. $-2<t<0$ 이고 **[1]** 에 의해

$$x_1=\frac{6-t-\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2},\ x_2=\frac{6-t+\sqrt{-3t^2+12t+36}}{2}$$

이므로 직사각형 ABCD 의 넓이는 $a(x_2-x_1)=(-t^3+6t^2)\sqrt{-3t^2+12t+36}$ 이다.

$f(x)=(-x^3+6x^2)\sqrt{-3x^2+12x+36}$,

$g(x)=\ln|f(x)|=2\ln|x|+\ln|x-6|+\dfrac{1}{2}\ln|3x^2-12x-36|$ 라 하자.

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-6}+\frac{6x-12}{2(3x^2-12x-36)}=\frac{4(x^2-2x-6)}{x(x-6)(x+2)}$$

이고 방정식 $x^2-2x-6=0$ 의 근 중에서 $-2<x<0$ 인 것은 $x=1-\sqrt{7}$ 이다.

| $x$ | $(-2)$ | $\cdots$ | $1-\sqrt{7}$ | $\cdots$ | $(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | |

따라서 $t=1-\sqrt{7}$ 에서 직사각형 ABCD 는 최대 넓이를 갖고, 이때 변 AB 의 길이는
$-(1-\sqrt{7})^3+6(1-\sqrt{7})^2=26-2\sqrt{7}$ 이다.

논제 2

주어진 함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x+2(\sqrt{x+1}+1)\cos(\sqrt{x+1}-1)}$ 에서

$h(x)=\sqrt{x+1}-1$라 하면 $\sqrt{x+1}+1=h(x)+2$, $x=\{h(x)\}^2+2h(x)$이므로

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+1}{x+2(\sqrt{x+1}+1)\cos(\sqrt{x+1}-1)}=\frac{1}{h(x)+2\cos h(x)}$$

이다.

따라서 $g(x)=x+2\cos x$ (단, $0\le t\le\pi$)라 하면, $f(x)=\dfrac{1}{g(h(x))}$이고 $h(x)$는 증가함수이므로 $f(x)$가 최대이려면 $g(x)$가 최소인 포인트를 찾으면 된다. (본 책 '합성함수로 해석하기 관점' 사용)

함수 $g(x)$의 도함수는 $g'(x)=1-2\sin x$이므로 $g'(x)=0$이 되는 $x=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$을 찾을 수 있고,

이를 통해 함수 $g(x)$는 구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$에서 증가, 구간 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$에서 감소, 구간 $\left(\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$에서 증가함을 알 수 있으며,

$g(t)$의 최솟값은 $g(0)$ 또는 $g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$임을 알 수 있다.

$g(0)=2$, $g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$ 이므로 $g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)<g(0)$이다. 따라서 $g(t)$의 최솟값은 $t=\dfrac{5\pi}{6}$일 때 얻을 수 있고

$f(x)$의 최댓값은 $x=\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)^2+2\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$에서 갖는다.

## 논제 3

조건 (1)과 (2)에 $x=0$을 대입하여 정리하면 $f(0)=0$이고 $g(0)=1$이다. 부분적분법에 의해

$$\int_0^x e^t f(t)dt = e^x f(x) - \int_0^x e^t f'(t)dt$$

이므로 조건(1)과 (2)에 의해

$$\int_0^x e^t f'(t)dt = \frac{e^x\{f(x)+g(x)\}-1}{2} = \int_0^x e^t g(t)dt$$

이다. 모든 실수 $x$에 대해 $\int_0^x e^t\{f'(t)-g(t)\}dt=0$이므로 정적분과 미분의 관계에 의해 $e^x\{f'(x)-g(x)\}=0$이다. 따라서 모든 실수 $x$에 대해 $f'(x)=g(x)$이다.

마찬가지로 $\int_0^x e^t g(t)dt = \{e^x g(x)-1\} - \int_0^x e^t g'(t)dt$이므로 모든 실수 $x$에 대해 $g'(x)=-f(x)$이다.

함수 $h(x)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$라 하면, $h(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 미분가능하고

$$h'(x)=2f'(x)f(x)+2g'(x)g(x)=2g(x)f(x)-2f(x)g(x)=0$$

이므로 $h(x)$는 상수함수이다. $f(0)=0$이고 $g(0)=1$이므로

$$h(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2=1$$

이다. 따라서 모든 실수 $x$에 대해

$$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=h(x)=h(0)=1$$

이고

$$\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2=1$$

이다.

## 논제 4

**[1]** [대학 예시답안] 단순 곱의 미분법 진행

주어진 함수를 미분하면,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{1\times2\times3}\left(\alpha+\frac{x}{1\times2\times3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\alpha+\frac{x}{2\times3\times4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\alpha+\frac{x}{3\times4\times5}\right) \\ &+\left(\alpha+\frac{x}{1\times2\times3}\right)^{\frac{1}{3}}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2\times3\times4}\left(\alpha+\frac{x}{2\times3\times4}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\alpha+\frac{x}{3\times4\times5}\right) \\ &+\left(\alpha+\frac{x}{1\times2\times3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\alpha+\frac{x}{2\times3\times4}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{3\times4\times5} \end{aligned}$$

이므로

$$y'(0)=\frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}\right)=\frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{\alpha}{10}$$

이다. 따라서 $(0,\ \alpha^2)$에서의 접선은 $y=\frac{\alpha}{10}x+\alpha^2$이다. 이 직선이 $(5,\ 1)$을 지나기 위해서는

$\alpha^2+\frac{\alpha}{2}-1=0$을 만족해야 하므로 $\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$이다.

[기대T 추천답안] 로그미분법 사용

$x \geq -6\alpha$일 때, $\ln y = \dfrac{1}{3}(\ln(x+6\alpha)-\ln 6)+\dfrac{2}{3}(\ln(x+24\alpha)-\ln 24)+\ln(x+60\alpha)-\ln 60$ 이므로

로그미분법에 의하여 $\dfrac{1}{y}\times y' = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{x+6\alpha}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{x+24\alpha}+\dfrac{1}{x+60\alpha}$ 이고,

$y'(0)=y(0)\times\left(\dfrac{1}{18\alpha}+\dfrac{1}{36\alpha}+\dfrac{1}{60\alpha}\right)=\alpha^2\times\dfrac{10+5+3}{180\alpha}=\dfrac{\alpha}{10}$ 이다.

따라서 $(0,\ \alpha^2)$ 에서의 접선은 $y=\dfrac{\alpha}{10}x+\alpha^2$ 이다.

이 직선이 $(5,\ 1)$ 을 지나기 위해서는 $\alpha^2+\dfrac{\alpha}{2}-1=0$ 을 만족해야 하므로 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ 이다

**[2]** 편의상 $g(x)=15\times\dfrac{|\sin x|}{2+\cos x}$ 라 하자. 주어진 식 $f(x)=g(x)-2f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 를 반복해서 적용하면

$$f(x)=g(x)-2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4f(x+\pi)$$
$$=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+16f(x+2\pi)$$

를 얻는다. 그런데 $f(x)$ 의 주기가 $2\pi$ 이므로,

$$f(x)=-\frac{1}{15}\left\{g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

이다. 따라서

$$\int_0^\pi f(x)dx=-\frac{1}{15}\left\{\int_0^\pi g(x)dx-2\int_0^\pi g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx+4\int_0^\pi g(x+\pi)dx-8\int_0^\pi g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx\right\}$$

이다. 우변의 첫 번째 적분은 $u=2+\cos x$ 로 치환하여 값을 구하고

$$\int_0^\pi g(x)dx = 15\int_0^\pi \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = -15\int_3^1\frac{1}{u}du = 15\ln 3$$

을 얻고, 두 번째 적분은 구간을 나눈 다음 $u=2+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 로 치환하여 값을 구한다.

$$\int_0^\pi g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = 15\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx-15\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx = 30\ln 2$$

같은 방식으로 세 번째, 네 번째 적분도 값을 구할 수 있다.

$$\int_0^\pi g(x+\pi)dx = 15\ln 3\,,\quad \int_0^\pi g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx = 30(\ln 3-\ln 2)\,.$$

따라서

$$\int_0^\pi f(x)dx = -\ln 3+4\ln 2-4\ln 3+16(\ln 3-\ln 2) = 11\ln 3-12\ln 2$$

이다.

# Show and Prove

# 3

수리논술을 위한
Advanced 미적분 & Advanced Theme

## 기대T의 Real 실전모범답안

## 기대T의 Real 실전모범답안

대치동 현장강의 / 영상수강 비대면강의 수강생들이 수업자료로 받고 있는 Real 모범답안 자료입니다.
문제풀이 방향성의 이해에 중점을 둬서 해설을 작성했다면, 이 답안은 100% 합격할 수 있는 최우수 모범답안입니다.
'해설 또는 대학예시답안'과 'Real 모범답안'의 작성방법이나 논리의 차이를 느껴보는 것만으로도 셀프첨삭효과를 누릴 수 있습니다.

| chp. 1 | [논제5] 2020 인하대 메디컬 | 실전답안 ☑ 학생첨삭답안 ☐ |
|---|---|---|

(1) $(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2$

$$\le \left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-1\right\}^2+(a+b)^2 \quad (\because (가),\ ab\ge 1)$$

$$=\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1\right\}^2$$

∴ 주어진 부등식이 성립한다.

(2) 일반성을 잃지 않고 $a\le b\le c$라 하자.

$$cd=\frac{ac+bc+c^2}{3}>\frac{1+1+1}{3}=1,$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)=\frac{ac+bc+(a+b)d}{4}$$

$$>\frac{1}{4}\left[1+1+\frac{1}{3}\{(a+b)^2+(a+b)c\}\right]$$

$$\ge\frac{1}{4}\left\{2+\frac{1}{3}(4ab+2)\right\} \quad (\because (가),\ ac, bc\ge 1)$$

$$\ge\frac{1}{4}\left\{2+\frac{1}{3}(4+2)\right\}=1$$

$$\therefore \left[\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1\right\}\left\{\left(\frac{c+d}{2}\right)^2+1\right\}\right]^2\le\left[\left\{\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2+2}{2}\right\}^2+1\right]^4 \text{ — ㉠}$$

한편, $ab, cd\ge 1$ 이므로

$$(a^2+1)(b^2+1)\le\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1\right\}^2$$

$$\times\ (c^2+1)(d^2+1)\le\left\{\left(\frac{c+d}{2}\right)^2+1\right\}^2$$ 이 성립.

양변을 곱하면 $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\le\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1\right\}^2\left\{\left(\frac{c+d}{2}\right)^2+1\right\}^2$

$$\le\left[\left\{\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2+1\right\}^2\right]^2 \quad (\because ㉠)$$

$$\Rightarrow (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\le(d^2+1)^3 \quad \left(\because \frac{a+b+c}{3}=d\right)$$

∴ 주어진 부등식이 성립한다.

〈다음장 이어서〉

(3) 수학적 귀납법을 통해 주어진 부등식이 성립함을 보이자.

i) $n=2$일때 : 3-(1)에 의해 성립.

ii) $n=k$일때

부등식 $(a_1^2+1)\cdots(a_k^2+1)\le(A_k^2+1)^k$ $\left(A_k=\dfrac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right)$ — ① 이 성립한다고 가정하자.

일반성을 잃지 않고 $a_{k+1}$이 $a_1,\cdots,a_{k+1}$ 중 가장 큰 수라 할 때, $a_{k+1}\ge1$ 이므로

$a_{k+1}A_{k+1}=\dfrac{a_1a_{k+1}+\cdots+a_{k+1}^2}{k+1}\ge\dfrac{1\times k+1^2}{k+1}=1$, $(A_{k+1})^2\ge1$이 성립함을 알 수 있다.

$a_{k+1}$ 1개, $A_{k+1}$ $(k-1)$개에 대하여 부등식 ①을 적용시키자.

$$\therefore(a_{k+1}^2+1)(A_{k+1}^2+1)^{k-1}\le\left\{\left(\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right)^2+1\right\}^k \text{ — ② 성립.}$$

$$\begin{aligned}\therefore(a_1^2+1)\cdots(a_{k+1}^2+1)(A_{k+1}^2+1)^{k-1}&=(a_1^2+1)\cdots(a_k^2+1)(a_{k+1}^2+1)(A_{k+1}^2+1)^{k-1}\\&\le(A_{k+1}^2+1)^k(a_{k+1}^2+1)(A_{k+1}^2+1)^{k-1}\ (\because ①)\\&\le(A_{k+1}^2+1)^k\left\{\left(\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right)^2+1\right\}^k\ (\because ②)\\&=\left[(A_k^2+1)\left\{\left(\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right)^2+1\right\}\right]^k\\&\le(A_{k+1}^2+1)^{2k}\ \Big(\because n=2\text{일 때 부등식 성립하므로}\\&\qquad(A_k^2+1)\left\{\left(\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right)^2+1\right\}\le(A_{k+1}^2+1)^2\Big)\end{aligned}$$

$\therefore(a_1^2+1)\cdots(a_{k+1}^2+1)\le(A_{k+1}^2+1)^{k+1}$ 이 성립하므로 $n=k+1$일 때도 성립.

따라서 수학적 귀납법에 의해 주어진 부등식이 성립한다.