Show and Prove

1

수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1

저자 소개

SaP 시리즈 저자

김기대 T

- 고려대학교 수학과 (수리논술 합격 + 당해 수능 가형 100점)
- 2015~ 기대모의고사 저자, 2023~ 기대 N제 수학1 / 수학2 / 미적분 저자
- 2023~ Show and Prove 1편 ~ 3편 저자
- 現) 대치동 수리논술 현장강의 & 비대면 강의

자문

강민재	부산과학고등학교 졸업 연세대학교 수학과 (수리논술 합격)

검토진

김기준	서울대학교 수학교육과	박도형	경희대학교 치의예과 (수리논술 합격)
양수진	서울대학교 수리과학부 박사수료 (前 용인외대부고 교사)	전지원	이화여대 뇌인지과학전공 (수리논술 합격)
김재서	성균관대학교 자연과학계열 (수리논술 합격)		

기대T 교재 커리큘럼

<table>
<tr><th>출판 교재명</th><th>1월~4월</th><th>5월</th><th>6월</th><th>7월</th><th>8월</th><th>9월</th><th>10월</th><th>11월</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Show and Prove
수리논술 실전개념서</td><td colspan="6">1편 : 수리논술을 위한 Basic Logic 및 수학1</td><td rowspan="2">연세/시립/홍익
학교별 Final 수업</td><td rowspan="5">수능후
학교별
Final
수업</td></tr>
<tr><td colspan="6">2편 : 수리논술을 위한 수학2 & 미적분</td></tr>
<tr><td colspan="7">3편 : 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & Theme</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">4편 : 수리논술을 위한 선택확통과 선택기하 (수강생 전용)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">대학별 기출 분석집 (자체 해설수록, 25년 출판 예정)</td></tr>
<tr><td>기대 N제
수능수학 문제집</td><td colspan="8">수학1, 수학2, 미적분
(확률과 통계, 기하는 미정)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">기대모의고사
수능수학 모의고사</td><td colspan="2"></td><td colspan="6">시즌1</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4">시즌2 (미정)</td></tr>
<tr><td>대학별 Final
분석 교재</td><td colspan="8">Final 전용 교재 (Final 수강생만 구매 가능, 미출판)</td></tr>
</table>

- 학습 기간은 한 권 기준 4주를 넘기지 않는 것이 좋습니다.
- 음영 구간은 ‘학습 권장 시즌’을 의미합니다.
- 자세한 교재설명이나 출간 소식은 오른쪽 QR코드를 참고 해주세요.

교재 사용법

1. 학습 전 사전공부 권장량

1편 수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1

고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 수학2 & 미적분 기본개념 1회독

2편 수리논술을 위한 수학 2 & 미적분

본 시리즈 1편 학습 + 1편 누적 + 수학2 학습 + 미적분 학습

3편 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & Advanced Theme

본 시리즈 2편 학습 + 2편 누적

4편 수리논술을 위한 선택기하와 선택확통 (수강생 전용)

고1 수학, 수학1, 미적분 학습 + 선택확통, 선택기하 기본개념 1회독

5편 수리논술 대학별 주요 기출문제집 (2025년 예정)

본 시리즈 1편 ~ 4편 학습 권장

2. 해설집 활용법

예제와 실전 논제에 대한 해설 전부는 해설집에 수록 되어있으나, 일부는 문제집에도 동시 수록 되어있습니다.
해설이 없는 문제는 없으니, 항상 해설집을 옆에 두고 공부하세요.
(Chapter별로 나뉘어져 있는 예제 해설 모음 뒤에 논제 해설 모음이 있습니다.)

또한 예제와 실전 논제에 있는 별표는 다음과 같이 활용하면 됩니다.

<table>
<tr><th>별표</th><th>설명</th><th>고민 정도</th><th>고민 시간</th></tr>
<tr><td>★☆☆☆☆</td><td>직전에 배운 개념을 가볍게 확인하기 위한 쉬운 문제</td><td>매우 빠르게</td><td>3분 이내</td></tr>
<tr><td>★★☆☆☆</td><td>빈출하는 주제, 평이한 난이도의 문제</td><td>적당히</td><td>5~10분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★☆☆</td><td>실전 문제로 나오는 수준의 난이도이며, 고민 시간을 투자할 가치가 충분히 있는 고난도 문제</td><td rowspan="2">넉넉히</td><td>15~20분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★★☆</td><td>합격자조차도 승률이 반반 정도인 매우 어려운 문제</td><td>20~25분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★★★</td><td>못 풀어도 합격이 가능할 만큼, 도전과 배움에 의의를 둔 초고난도 문제. 적당한 고민 후 해설로 빠른 학습 권장</td><td>빠르게</td><td>10~15분 이내</td></tr>
<tr><td colspan="4">꼭 고민 시간을 지키지 않아도 됩니다.</td></tr>
</table>

기대T 수리논술 수업 연간 커리큘럼

수리논술 수업일		수업 Theme (대면 강의 & 비대면 온라인 강의 동시 진행)	〈수업명〉 교재 및 첨삭여부
2월	1주차	- 수리논술 논리의 기본과 답안 설계법 - 증명법 1:수학적 귀납법 + 심화 (부분 수귀/강한 수귀) - 증명법 2:귀류법과 대우법 및 특수 증명법	**〈정규반 프리시즌〉** 자체 교재 + 모의고사 응시 (2월 수강생은 1:1 첨삭 무한제공)
	2주차		
	3주차		
	4주차		
3월	1주차	- 삼각함수 활용 및 심화 - 고난도 수열 및 시그마 성질 심화 - 수리논술용 수학1 심화 특강 - 시즌1 마무리	**〈정규반 시즌 1〉** 시리즈 1편 + 수업용 자체 교재 + 모의고사 응시 + 첨삭 (1차첨삭 후 2차첨삭 추가제공)
	2주차		
	3주차		
	4주차		
	5주차	- 미적분을 위한 기본기 : 극한 - 함수의 연속 : 사잇값 정리 및 최대최소 정리의 활용 - 미분가능성 오개념 때려잡기 & 평균값의 정리	**〈정규반 시즌 2〉** 시리즈 2편 + 수업용 자체 교재 + 모의고사 응시 + 첨삭 (1차첨삭 및 2차첨삭 추가제공) (5월 수강생에게는 확통기본강의 무료 제공 + 확통 특강 할인)
4월	1주차		
	2주차		
	3주차	중간고사 내신휴강 (3주 예정) 추천학습:선택확통 기본강의 학습 / 선택확통 특강 수강	
	4주차		
5월	1주차		
	2주차	- 평균값의 정리 고급 활용 & 미분의 활용 - 수리논술용 적분 Basic1 - 수리논술용 적분 Basic2 & 시즌2 마무리	
	3주차		
	4주차		
* 수업 Theme은 예시입니다. 출제 트렌드에 따라 커리큘럼이 매년 변화합니다. * 수업시간마다 보는 Test 문항에 대한 첨삭이 매수업 제공됩니다. * 지난 수업 첨삭도 상황에 따라 가능합니다. 오른쪽 QR코드 참고하세요. * 확통/기하 기본강의는 유베이스가 되기 위한 강의이며, 5, 6월 정규반 수강생들에게 제공됩니다. 확통/기하 특강은 고난도 수리논술 전용 문제풀이 skill을 가르치는 특강입니다.			수업소개 및 첨삭안내 등 정확한 안내는 아래 QR코드를 참고하세요.
6월	1주차	- Advanced 미적분 1 : 이변수함수, 젠센부등식 등 - Advanced 미적분 2 : 적분고급활용, 함수방정식 등 - Advanced 미적분 3 : 미분방정식, 지엽 미적분 등	**〈정규반 시즌 3〉** 시리즈 3편 + 수업용 자체 교재 + 모의고사 응시 + 첨삭 (1차첨삭 후 2차첨삭 추가제공) (6월 수강생에게는 기하기본강의 무료 제공 + 기하 특강 할인) **추가 선택** 〈선택과목 실전+심화 특강〉 수리논술을 위한 액기스 특강 (선택확통 3강 및 선택기하 3강) (온라인 영상수강이며, 상위권 대학 지원생은 수강 권고)
	2주차		
	3주차		
	4주차	기말고사 내신휴강 (3주 예정) 추천학습:선택기하 기본강의 학습 / 선택기하 특강 수강	
	5주차		
7월	1주차		
	2주차	- 수리논술 실전개념 1 : 정수론 / 고등수학 심화 - 수리논술 실전개념 2 : 부등식의 여러 가지 증명 - 수리논술 실전개념 3 : 더블카운팅 등 전용테마	
	3주차		
	4주차		
* 재수생이거나 논술에 진심이라면, 여유시간 (중간/기말 내신휴강기간 등등)을 활용하여 확통 및 기하 선택과목 심화특강을 수강해두시기 바랍니다. 8월 수업부터는 선택확통 및 선택기하 융합문제들도 전부 다루게 됩니다.			
8월	1주차	- Semi Final 1 (대학별 출제성향파악 : A, B그룹) - Semi Final 2 (대학별 출제성향파악 : C, D그룹) - Semi Final 3 - Semi Final 4 (+ 수리논술 1:1 원서상담 진행)	**〈Semi Final〉** 대학별 출제성향파악 + 수시원서 지원상담 진행 + 모의고사 응시 + 1차첨삭 제공
	2주차		
	3주차		
	4주차		
9월	1주차	- 상위권 수리논술 고난도 문제 해제 + 예상 모의 1 - 상위권 수리논술 고난도 문제 해제 + 예상 모의 2 - 상위권 수리논술 고난도 문제 해제 + 예상 모의 3 - 고난도 문제 해제 + 예상 모의 4 (정규반 종강)	**〈고난도 문제풀이반 For 메디컬/고/연/서성한시〉** 상위권 수리논술을 위한 문풀진행 자체 교재+고난도 모의고사 응시
	2주차		
	3주차		
	4주차		
수능전 Final (연세/시립/홍익)		학교별 Final 특강 (학교별 전용 파이널 교재 사용) 추석연휴 3일 and 직전 2일 (총 5회)	**〈학교별 Final〉** 학교별 자료집+예상문제 모의고사 응시 후 첨삭/채점 제공
11월	수능후	메디컬/고려/한양/성균/중앙/경희/인하 등 학교별 Final	

기대T 수리논술 수업 상세안내

수업명	수업 상세 안내 (지난 수업 영상수강 가능)
정규반 프리시즌 (2월)	- 수리논술만의 특징인 '답안작성 능력'과 '증명 능력'을 향상 시키는 수업 - 수험생은 물론 강사도 가질 수 있는 '증명 오개념'을 타파시키는 수학 전공자의 수업
정규반 시즌1 (3월)	- 수능/내신 공부와 다른 수리논술 공부의 결 & 방향성을 잡아주는 수업 - 삼각함수 & 수열의 콜라보 등 논술형 발전성을 체감해볼 수 있는 실전 내용 수업
정규반 시즌2 (4~5월)	- 수리논술에서 50% 이상의 비중을 차지하는 수리논술용 미적분을 집중 해석하는 수업 - 수리논술에도 존재하는 행동 영역을 통해 고난도 문제의 체감 난이도를 낮춰주는 수업 - 대학의 모범답안을 보고도 '이런 아이디어를 내가 어떻게 생각해내지?'라는 생각이 드는 학생들도 납득 가능하고 감탄할 만한 문제접근법을 제시해주는 수업
정규반 시즌3 (6~7월)	- 상위권 대학의 합격 당락을 가르는 고난도 주제들을 총정리하는 수업 - 아래 학교의 수리논술 합격을 바라는 학생들이라면 강추 (메디컬, 고려, 연세, 한양, 서강, 서울시립, 경희, 이화, 숙명, 세종, 서울과기대, 인하)
선택과목 특강 (선택확통 / 선택기하)	- 수능/내신의 빈출 Point와의 괴리감이 제일 큰 두 과목인 확통/기하의 내용을 철저히 수리논술 빈출 Point에 맞게 피팅하여 다루는 Compact 강의 (영상 수강 전용 강의) - 확통/기하 각각 2~3강씩으로 구성된 실전+심화 수업 (교과서 개념 선제 학습 필요) - 상위권 학교 지원자들은 꼭 알아야 하는 필수내용 / 6월 또는 7월 내로 완강 추천
Semi Final (8월)	- 본인에게 유리한 출제 스타일인 학교를 탐색하여 원서지원부터 이기고 들어갈 수 있도록 태어난 새로운 수업 (모든 대학을 출제유형별로 A그룹~D그룹으로 분류 후 분석) - 최신기출 (작년 기출+올해 모의) 중 주요 문항 선별 통해 주요대학 최근 출제 경향 파악
고난도 문제풀이반 For 메디컬/고/연/서성한시	- 2월~8월 사이 배운 모든 수리논술 실전 개념들을 고난도 문제에 적용 해보는 수업 - 전형적인 고난도 문제부터 출제될 시 경쟁자와 차별될 수 있는 창의적 신유형 문제까지 다양하게 만나볼 수 있는 수업
학교별 Final (수능전 / 수능후)	- 학교별 고유 출제 스타일에 맞는 문제들만 정조준하여 분석하는 Final 수업 - 빈출 주제 특강 + 예상 문제 모의고사 응시 후 해설 & 첨삭 - 고승률 문제접근 Tip을 파악하기 쉽도록 기출 선별 자료집 제공 (학교별 상이)
첨삭	수업 형태 (현장 강의 수강, 온라인 수강) 상관없이 모든 학생들에게 첨삭이 제공됩니다. 1차 서면 첨삭 후 학생이 첨삭 내용을 제대로 이해했는지 확인하기 위해, 답안을 재작성하여 2차 대면 첨삭영상을 추가로 제공받을 수 있습니다. 이를 통해 학생은 6~10번 이내에 합격급으로 논리적인 답안을 쓸 수 있게 되며, 이후에는 문제풀이 Idea 흡수에 매진하면 됩니다.

정규반 안내사항 (아래 QR코드 참고)

대학별 Final 안내사항 (아래 QR코드 참고)

목차

학습전략

CHAPTER.1

수리논술 답안에 담겨야 하는 기본적인 약속들과 수리논술 공부시 필요한 마인드에 대해 학습합니다.

CHAPTER.2

수리논술의 기본기에 해당하는 증명구조에 대해 배웁니다. 출제단원 불문하고 항상 연계될 수 있는 Chapter이므로 증명 Idea들을 빠짐없이 마스터할 수 있도록 '증명구조 이해에 기반한 학습'을 하기 바랍니다.

CHAPTER.3

수리논술 실전력을 올리기 위한 본격적 시작단계입니다. 수능에선 비주류이지만 수리논술에선 빈출되는 개념과 공식들이 등장합니다. 2편, 3편을 공부하는 데에 필수적인 실전개념들이므로 잘 학습해둡시다.

CHAPTER.4

대입 후 값을 관찰하는 수능수학에서의 고난도 수열과는 결이 다른 수리논술 전용 수열 고난도 개념에 대해 학습합니다. 수리논술 학습자와 미학습자의 초격차를 벌릴 수 있는 단원이므로 주의사항에 집중하여 학습하도록 합시다.

CHAPTER.5

본 교재에서 배운 개념들을 활용해서 최근 주요 문항을 풀어보는 Chapter입니다.

CHAPTER.6

본 교재에서 배운 개념들을 활용해서 최근 대한민국 수리논술 주요 기출문항을 풀어보는 Chapter입니다.

Show and Prove

기대T 수리논술 수업 상세안내

수업명	수업 상세 안내 (지난 수업 영상수강 가능)
정규반 프리시즌 (2월)	- 수리논술만의 특징인 '답안작성 능력'과 '증명 능력'을 향상 시키는 수업 - 수험생은 물론 강사도 가질 수 있는 '증명 오개념'을 타파시키는 수학 전공자의 수업
정규반 시즌1 (3월)	- 수능/내신 공부와 다른 수리논술 공부의 결 & 방향성을 잡아주는 수업 - 삼각함수 & 수열의 콜라보 등 논술형 발전성을 체감해볼 수 있는 실전 내용 수업
정규반 시즌2 (4~5월)	- 수리논술에서 50% 이상의 비중을 차지하는 수리논술용 미적분을 집중 해석하는 수업 - 수리논술에도 존재하는 행동 영역을 통해 고난도 문제의 체감 난이도를 낮춰주는 수업 - 대학의 모범답안을 보고도 '이런 아이디어를 내가 어떻게 생각해내지?'라는 생각이 드는 학생들도 납득 가능하고 감탄할 만한 문제접근법을 제시해주는 수업
정규반 시즌3 (6~7월)	- 상위권 대학의 합격 당락을 가르는 고난도 주제들을 총정리하는 수업 - 아래 학교의 수리논술 합격을 바라는 학생들이라면 강추 (메디컬, 고려, 연세, 한양, 서강, 서울시립, 경희, 이화, 숙명, 세종, 서울과기대, 인하)
선택과목 특강 (선택확통 / 선택기하)	- 수능/내신의 빈출 Point와의 괴리감이 제일 큰 두 과목인 확통/기하의 내용을 철저히 수리논술 빈출 Point에 맞게 피팅하여 다루는 Compact 강의 (영상 수강 전용 강의) - 확통/기하 각각 2~3강씩으로 구성된 실전+심화 수업 (교과서 개념 선제 학습 필요) - 상위권 학교 지원자들은 꼭 알아야 하는 필수내용 / 6월 또는 7월 내로 완강 추천
Semi Final (8월)	- 본인에게 유리한 출제 스타일인 학교를 탐색하여 원서지원부터 이기고 들어갈 수 있도록 태어난 새로운 수업 (모든 대학을 출제유형별로 A그룹~D그룹으로 분류 후 분석) - 최신기출 (작년 기출+올해 모의) 중 주요 문항 선별 통해 주요대학 최근 출제 경향 파악
고난도 문제풀이반 For 메디컬/고/연/서성한시	- 2월~8월 사이 배운 모든 수리논술 실전 개념들을 고난도 문제에 적용 해보는 수업 - 전형적인 고난도 문제부터 출제될 시 경쟁자와 차별될 수 있는 창의적 신유형 문제까지 다양하게 만나볼 수 있는 수업
학교별 Final (수능전 / 수능후)	- 학교별 고유 출제 스타일에 맞는 문제들만 정조준하여 분석하는 Final 수업 - 빈출 주제 특강 + 예상 문제 모의고사 응시 후 해설 & 첨삭 - 고승률 문제접근 Tip을 파악하기 쉽도록 기출 선별 자료집 제공 (학교별 상이)
첨삭	수업 형태 (현장 강의 수강, 온라인 수강) 상관없이 모든 학생들에게 첨삭이 제공됩니다. 1차 서면 첨삭 후 학생이 첨삭 내용을 제대로 이해했는지 확인하기 위해, 답안을 재작성하여 2차 대면 첨삭영상을 추가로 제공받을 수 있습니다. 이를 통해 학생은 6~10번 이내에 합격급으로 논리적인 답안을 쓸 수 있게 되며, 이후에는 문제풀이 Idea 흡수에 매진하면 됩니다.

정규반 안내사항 (아래 QR코드 참고)

대학별 Final 안내사항 (아래 QR코드 참고)

수리논술 공부 Tip

1. 본 시리즈에 나오는 기본공식 증명들은 다 외우자.

수리논술이 어렵다고 생각하는 큰 이유 중 하나는 '내가 그런 생각이나 풀이를 어떻게 떠올려?' 라는 생각 때문이다. 이러한 생각이 드는 이유는 수리논술이 터무니없이 어렵게 출제되는 것 때문이라기 보다는, '과정의 이해'가 아닌 '결과 암기하기'에만 의존한 지금까지의 수능 공부 습관 때문이라 생각한다.

과정을 이해하며 수학공부를 하는 것이 왜 중요한지 알아보자.
아래 문제를 풀어본 후 다음 페이지의 해설을 봐보자.

예제 6 ★★★☆☆ 2022 인하대 모의

서로 다른 두 실수 a, b와 $f(a)=f(b)=0$인 임의의 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)f''(x)dx$$

를 만족시키는 이차함수 $g(x)$는 $g(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)$ 임이 알려져 있다. ⋯ ①

임의의 다항함수 $h(x)$와 $g(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)$에 대하여

$$\int_a^b h(x)dx=\frac{(h(a)+h(b))(b-a)}{2}+\int_a^b g(x)h''(x)dx$$

임을 ①을 이용하여 보이시오. (제시문 생략 버전)

연습지

해설 6

$f(x)=h(x)-\left\{\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a)+h(a)\right\}$라 하면 $f(a)=f(b)=0$ 이므로, 문제의 ① 식에 밑줄 식에 대입하여 계산하면

(계~산~과~정)

(계~산~과~정)

이므로 $\displaystyle\int_a^b h(x)dx=\frac{(h(a)+h(b))(b-a)}{2}+\int_a^b g(x)h''(x)dx$ 임을 알 수 있다.

이 문제는 ①식에 대입하는 것이 어렵다기보다는, $f(x)=h(x)-\left\{\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a)+h(a)\right\}$ 임을 떠올리는 게 어려웠을 것이다.

이 Idea는 어떻게 떠올릴 수 있을까??
이는 이미 교과서에서 평균값의 정리를 증명하면서 제시된 Idea이다. 다음 증명에서 확인해보자.

증명

[평균값의 정리]
롤의 정리를 이용하여 평균값 정리를 증명하자.
두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a)),\ \mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라고 하면

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다. 이때

$$\boxed{i(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}}$$

라고 하면 함수 $i(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $i(a)=i(b)=0$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여

$$i'(c)=f'(c)-g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

본 증명에 있는 Box 부분의 함수치환 뿐만 아니라 그 이후의 결과 ($i(a)=i(b)=0$) 까지도 앞선 〈해설 6〉과 완전한 판박이 Idea임을 알 수 있다.

우리가 낯설게 느끼는 대부분의 Idea나 증명은 이미 우리가 교과서나 기출에서 경험해봤었던 Idea나 증명에서부터 시작되므로, 본 시리즈에서 제공하는 기본공식 증명은 전부 흡수하도록 하자.

2. 제시문은 너무 소중한 Hint

| 제시문 없는 학교

문제만 덜렁 던져주고 '어디 한 번 풀어봐!' Style 이기 때문에, 까다롭다고 평가되는 학교들의 특징이다.
문항에 대한 Hint은 적지만, 학교별로 자주 출제하는 스타일이나 문제풀이 Idea 유형은 분명히 있기 때문에 이를 잘 짚어주는 후반기 학교별 Final을 수강하는 것이 좋다.

| 제시문 있는 학교

문제풀이에 사용되는 교과개념이나 문제풀이의 핵심 Key를 제시문에서 알려준다. 하지만 대부분의 학생들은 제시문을 너무 쉽게 무시해버리는 경우가 있는데, 이는 주어진 Hint를 직접 걷어차는 꼴이다.

전 페이지에서 본 〈예제 6〉은 제시문 삭제 버전인데, 아래 제시문이 〈예제 6〉과 같이 붙어있다고 생각하고 문제를 다시 봐보자.

제시문

$x_1 \neq x_2$일 때, 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

뜬금없이 제시문에 직선의 방정식이 주어졌다.
과연, 출제진은 학생들이 직선의 방정식을 모를 것 같아서 제시문을 준 걸까?

당연히 아닐 것이다. 그럼에도 제시문을 준 이유는??

〈해설 6〉의 핵심 Idea였던 $f(x) = h(x) - \left\{ \frac{h(b) - h(a)}{b - a}(x - a) + h(a) \right\}$ 에서 직선의 방정식 part인 $\frac{h(b) - h(a)}{b - a}(x - a) + h(a)$를 떠올리는 데에 도움이 되라고 준 출제진의 배려[19]이다.
이 배려를 눈치채고 잘 활용하는 것 역시 수리논술 실력이라 할 수 있다.

TIP

'난 하드코어 모드로 공부하겠어. 제시문이 나와도 공부할 땐 우선 무시!!' 하는 자세 역시 좋지 않다.
제시문을 문제에 맞게 잘 성형해서 생각의 물꼬를 트는 연습도 필요하기 때문이다.
반대로, '내가 지원하는 학교들은 다 제시문 주더라. 제시문 없는 어려운 문제는 풀지 않겠어.' 역시 좋지 않다.
평소엔 제시문이 친절하다가 당해 시험에서는 친절하지 않을 수도 있기 때문이다.
수능이든 논술이든 '배제'는 좋지 않다. 모든 Case에 대비해서 공부하도록 하자.

19) 학교별성향에 따라 제시문 제공여부 혹은 배려의 깊이 정도가 다 다름을 인지하자.

3. 선천적 오개념과 후천적 오개념

| 선천적 오개념

수험생의 90% 이상이 가질 수 있는 합리적인 오개념을 뜻한다. 예를 들어,

'1보다 작은 양수를 무한번 곱하면 0으로 갈 것이다.'

와 같은 명제가 있다. 얼핏 보면 맞는 명제인 것 같지만 실제로는 틀린 명제이다.

모든 자연수 n에 대하여 $1-\dfrac{1}{n}$은 분명 1보다 작은 수이지만, 이를 n번 곱한 식의 극한값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{e}$ 이다.

따라서 위 명제는 잘못된 명제, 즉 선천적 오개념이다.

이러한 선천적 오개념들은 누구나 가지고 있을법한 오개념이므로, 공부를 해가면서 고치면 된다.

그리고 몇몇 선천적 오개념들은 너무 지엽적이라 여러분이 걱정할 수 있는데, 이런 것들은 못 고치더라도 큰 걱정을 할 필요는 없다. 나와 같은 시험을 보는 경쟁자들도 같은 오개념을 갖고 있다면, 어차피 모두가 같은 감점을 받을 것이기 때문에 나의 합격 가능성에는 영향을 주지는 않을 테니 말이다.

물론 '다 같이 틀리자!!'고 선동하는 것은 아니다. 군계일학이 될 수 있는 좋은 기회이지만, 뒤에서 나올 후천적 오개념만큼 치명적이지는 않다라고 얘기하는 것!

예제 7 ★★★☆☆ 2022 중앙대

함수 $f(x)=\dfrac{cx+1}{dx+1}$ 에 대하여 $(f\circ f\circ f)(x)=x$ 을 만족하는 실수 x가 무한히 많이 있다.

이때 d의 최댓값을 구하시오. (단, c, d는 실수이다.)

연습지

해설 7

합성함수의 정의를 적용하여

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{c\left(\frac{cx+1}{dx+1}\right)+1}{d\left(\frac{cx+1}{dx+1}\right)+1}=\frac{(c^2+d)x+(c+1)}{d(c+1)x+(d+1)}$$

이 됨을 알 수 있고 이로부터

$$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(f(x))=\frac{(c^3+2cd+d)x+(c^2+c+d+1)}{d(c^2+c+d+1)x+(cd+2d+1)}$$

를 얻는다.

> 한편, $(f\circ f\circ f)(x)=x$가 무한히 많은 실수 x에 대하여 성립하므로
>
> $$d(c^2+c+d+1)x^2+(cd+2d+1)x=(c^3+2cd+d)x+(c^2+c+d+1)$$
>
> 가 항등식이다.

따라서 $d(c^2+c+d+1)=0$, $cd+2d+1=c^3+2cd+d$, $c^2+c+d+1=0$

를 얻는다. 이를 정리하면 $d=-c^2-c-1$의 조건을 얻고, 이를 대입하면 다른 조건들도 만족시킴을 알 수 있다.

따라서 $d=-c^2-c-1=-\left(c+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$ 로부터 $c=-\frac{1}{2}$ 일 때 d가 최대이고 이때 $d=-\frac{3}{4}$ 이다.

위 해설은 학교에서 제공한 해설로, Box 부분을 신경 쓸 필요가 있다.
무한히 많은 실수 x에 대하여 성립하는 식이라는 조건과 항등식이라는 조건이 서로 필요충분조건이 아니다.

예를 들어, 방정식 $\sin x=\frac{1}{3}$의 해는 무한히 많지만 항등식이 아니다. 즉,

'항등식이면 무한히 많은 실수 x에 대하여 성립하는 식' 이라는 명제는 맞지만,
'무한히 많은 실수 x에 대하여 성립하는 식이면 항등식' 이라는 명제는 틀렸다.

하지만 해설의 Box 부분은 후자의 명제를 포함하는 듯한 뉘앙스를 약간 풍기는 느낌이라,
저자의 개인적인 생각으로는 Box 부분을 다음과 같이 보강해야 한다고 생각한다.

> $(f\circ f\circ f)(x)=x$를 정리하면
>
> $$d(c^2+c+d+1)x^2+(cd+2d+1)x=(c^3+2cd+d)x+(c^2+c+d+1)$$
>
> 인데, 이 식이 n차 다항방정식이면 이 식을 만족시키는 x가 최대 n개이므로 이는 준식을 만족시키는 실수 x가 무한히 많이 있다라는 조건에 모순이다.
> 따라서 항등식이어야 한다.

문제를 출제한 대학조차 이견이 생길 수 있는 답안을 예시답안으로 제시한 만큼, 이 부분을 꼬집어 답안을 쓸 수 있는 수험생은 거의 없을 것이다.

즉, 이러한 선천적 오개념은 그렇게 치명적이지 않으므로, 너무 스트레스를 받지는 말 것!

본인이 정 이것마저도 완벽하고 싶은 욕심을 가지고 있다면, 첨삭 때마다 지적되는 포인트들은 고쳐보려고 노력을 하는 것으로 충분하다.

| 후천적 오개념

선천적 오개념과는 달리, 내신 혹은 수능 공부를 하면서 문제를 빨리 풀기 위한 '문제풀이 도구나 스킬'에 의해 생긴 후천적 오개념은 항상 경계하며 공부해야 한다. 제대로 수학을 공부한 학생이라면 있을 수 없는 오개념이므로, 이 오개념은 공부를 엉터리로 한 나만 갖고 있는 오개념, 즉

나만 감점 당할 수 있는 아킬레스건

이 될 수 있는 치명적인 오개념이다. 이러한 후천적 오개념은 대부분 정확한 논리가 아닌 감에 의존하여 공부하는 학생들에게 많이 생긴다.

이것의 예시로는

'미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $(a,\ b)$가 항상 존재한다.'

라는 명제가 있다.
얼핏 보기에는 일반적인 평균값의 정리로 착각할 수 있지만, 이는 평균값의 정리가 아니라 오개념이다.

(반례 : $f(x)=x^3,\ c=0$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$가 존재하지 않는다.)

진짜 평균값의 정리는

'미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $a<c<b$가 항상 존재한다.'

이다.

누군가는 '선생님, 이런 걸 누가 이렇게 잘못 알고 있나요~ 저는 제대로 알고 있습니다.' 라고 할 수 있다.
하지만 그런 학생들 중 최소 절반 이상 역시 이 오개념을 갖고 있는 경우가 많다.
[2편]에서 본격적으로 소개할 문제이겠지만, 미리 스포일러를 당해보도록 하자.

| 연습문제 1 2016 9월 평가원 30번

어떤 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=k(x^2-2x-1)e^x$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

$0 \le a < b$ 인 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $f(b)-f(a)+b-a \ \ge\ 0$이다.

가능한 k의 범위를 구하시오. (미적분 학습이 안된 학생들은 Box 조건만 해석 해보세요.)

방금 문제에 대한 한 학생의 잘못된 풀이다.

"

조건의 부등식을 변형하면 $f(b)-f(a)+b-a \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}+1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq -1$

평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(a)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 구간 $(a,\ b)$ 사이에 적어도 하나 존재하므로

$f'(c) \geq -1$ 임을 알 수 있다. 이때 $0 \leq a < c < b$ 이므로,

$f'(c) \geq -1$라는 조건은 $x>0$일 때 $f'(x) \geq -1$과 동치이다.

"

위 풀이를 뒷받침하는 논리는

"

위 부등식이 $0 \leq a < b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 성립하므로

a, b의 모든 조합을 통해 모든 양수의 값을 c의 값으로 만들어 낼 수 있다.

따라서 $f'(c) \geq -1$는 $f'(x) \geq -1$가 된다.

"

라는 논리다. 얼핏 보면 맞는 말 같지만, 앞 페이지에서 오개념이라고 했던 문장과 정확히 일맥상통한다.

우리는 이렇듯 아무렇지 않게 후천적 오개념을 활용하고 있었을지도 모른다. 하지만 수능은 정답만 묻는 시험이기 때문에, 후천적 오개념이 오개념인지 모르고 넘어갔을 가능성이 매우 높다.
이를 방지하기 위해서는 수능도 풀이를 논리적으로 분석해보는 습관을 들이면 좋다.

아래 연습문제도 Box 부분을 해석해보고, 아래 QR코드[20]의 강의를 통해 연습문제 1, 2에 대한 제대로 된 해석을 학습하자.

| 연습문제 2 2024 6월 평가원 22번

정수 $a\ (a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^3-2ax^2$ 이라 하자.
다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a가 -2 뿐임을 보이시오.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$
> 을 만족시키는 세 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3$이 열린구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재한다.

도움영상

20) 여러 문제의 이해를 돕는 QR코드가 해설집에도 있다. 어려운 문제에 대한 해설을 돕는 강의가 있으니 참고하여 학습하도록 하자.

수열의 최대최소 판별법

1. 미분을 활용한 수열의 최대최소 판별

수열은 '자연수 집합을 정의역으로 하고 실수 집합을 공역으로 하는 함수'다.
함수에서 최대최소 판별은 일반적으로 미분을 활용하기 때문에, 수열의 최대최소 역시 미분을 활용하는 방법이 일감으로 떠오르는게 당연하지만, 이따금 한계에 부딪치기도 한다.

예를 들어 수열 $a_n = n^4 - 3n^3 + 9$의 최솟값을 찾는 문제가 있다고 하자.

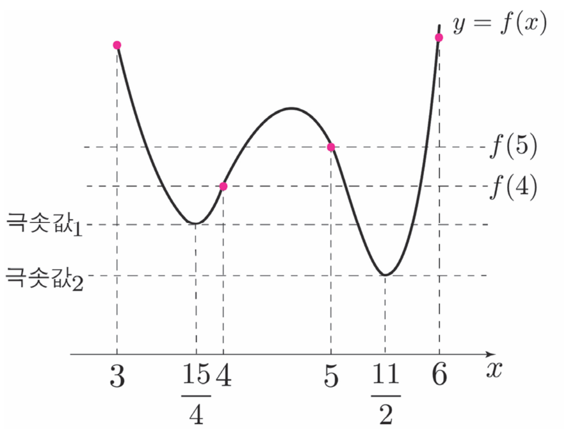
$f(x) = x^4 - 3x^3 + 9$을 미분하면 $4x^3 - 9x^2 = 0$, $x = \frac{9}{4}$에서 유일한 극소이므로 최소!! 라고 하고 싶은데, 수열에서의 n은 자연수라는 점이 문제가 된다. 수열의 정의역 때문에 $a_{\frac{9}{4}}$ or a_0가 최솟값이라고 주장할 수 없기 때문이다.

물론 해결법은 있다. $x = \frac{9}{4}$ 주변의 자연수 $x = 2, 3$에서의 수열값을 계산한 후 제일 작은 것을 정답으로 채택하면 된다.

위 문제에선 극소가 $x = \frac{9}{4}$에서만 극소이기 때문에 a_2, a_3만 비교하면 되지만, 극소가 여럿 존재하는 문제라면 조사해야하는 자연수의 개수가 2배씩 증가하고, 이것이 미분으로 수열의 최대최소를 찾는 풀이의 최대 약점이다.

| 흔히 저지르는 오개념에 대하여

이번 Part에서 생길 수 있는 오개념에 대해 알아보자.
어떤 수열 $a_n = f(n)$의 최솟값을 묻는 문제이고, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다고 하자.



극솟값이 두 개가 있고 극소가 되는 x가 $\frac{15}{4}$, $\frac{11}{2}$로 자연수가 아니므로 두 수의 주변에 있는 자연수인 3과 4, 그리고 5와 6에 대한 a_n 값을 조사해줘야 수열의 최솟값을 구할 수 있는데,43) 이 4개 값의 비교가 귀찮은 어떤 학생이 다음과 같은 질문을 한다.

Q. a_n의 최솟값을 찾는 문제니까, 다 조사할 필요 없이 극솟값 중 제일 작은 극솟값을 갖는 수 주변의 자연수만 조사해도 충분하지 않을까요??

43) 이번엔 $2 \times 2 = 4$개의 수열값을 비교해야되므로, 이 문제 역시 미분풀이의 단점이 부각된다.

A. 그러면 안된다. 그 논리에 의하면 a_5, a_6 중에 최솟값이 있어야 할 것 같지만 그래프에서 볼 수 있듯이 a_4가 제일 작은 값이다.

즉, 아무리 잔꾀를 굴려봐도 결국 최종적으로 수열값을 조사해야하는 n의 개수는 2X극소점개수.
으로 고정이고, 이게 미분풀이의 단점 (=다수의 연산 동반)이다.

2 부등식을 활용한 최대최소 판별

이러한 미분 풀이를 대체[44)]하는 풀이는 일명 '전국 1등은 전교 1등 중에 있다.' 풀이이다. (???)

수열의 최댓값을 찾는 문제가 있을 때, a_n이 최대가 되는 n은 두 부등식 $a_{n-1} \le a_n$과 $a_{n+1} \le a_n$을 우선 만족시켜야 한다.
주변에 있는 a_{n-1}, a_{n+1} 보다 작으면서 어떻게 전체 1등 값이 될 수 있겠는가??
즉, 저 두 부등식을 풀어 n을 얻어내는 것은 전교 1등들을 우선적으로 고르는 작업에 해당한다.

이렇게 얻어낸 n을 a_n에 대입한 후 그 중 제일 큰 값을 찾으면, 그게 a_n의 최댓값이 된다.
전교 1등들 중 전국 1등을 찾는 과정인 것이다.

반대로 a_n이 최소가 되는 n은 두 부등식 $a_{n-1} \ge a_n$과 $a_{n+1} \ge a_n$을 우선 만족시켜야 한다.
이전 그래프의 예로 본다면 이 부등식의 해는 $n=4$로 유일함을 알 수 있다.[45)]

단순히 생각하면 해야 할 연산이 미분 방식보다 4배나 줄어든 것이다![46)]

물론 저 부등식을 만족시키는 n 역시 여러 개가 있을 수 있지만, 미분 풀이 때보다 그 개수가 덜 나온다는 것이 Fact!

따라서 미분풀이와 대체풀이 모두 숙지해두도록 하자.

44) 수열의 일반항이 미분 불가능한 식이 나올 때도 있다. 미분불능이 아니고 그냥 미분하기가 까다로운 식. 본 교재 뒤에서 곧 구경 예정.
45) 대체풀이는 그래프 전부를 보는 것이 아닌 수열값이 찍힌 점 (색점) 들만 비교하면 된다.
46) 정답이 특정되는 방법 vs 4개 값 비교해야 하는 미분 방법

예제 7 ★★☆☆☆ 2021 한양대

자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $n^2-12n+37$인 정사각형의 넓이를 a_n, 한 변의 길이가 $2n+1$인 정사각형의 넓이를 b_n이라고 하자. $\dfrac{a_n}{b_n}$이 최소가 되는 n을 구하고, 이 때 $\dfrac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오.

연습지

해설 7.1

미분풀이

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n^2-12n+37)^2}{(2n+1)^2} = \left(\frac{n^2-12n+37}{2n+1}\right)^2$ 이므로 $\frac{a_n}{b_n}$ 이 최소가 되려면 $\frac{n^2-12n+37}{2n+1}$ 이 최소가 되어야 한다.

$f(x) = \frac{x^2-12x+37}{2x+1}$ 라 하면

도함수는 $f'(x) = \frac{(2x-12)(2x+1)-(x^2-12x+37)\times 2}{(2x+1)^2} = \frac{2(x^2+x-43)}{(2x+1)^2}$ 이다.

$x^2+x-43=0$ 의 $x>0$ 에서의 근을 구하면 $x = \frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 이다. $0<x<\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일 때

$f'(x)<0$ 이고 $x>\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x)>0$ 이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{173}}{2}$ 에서 $f(x)$ 가

최소가 되는 것을 알 수 있다.

한편 $13<\sqrt{173}<14$ 를 이용하면 $6<\frac{-1+\sqrt{173}}{2}<\frac{13}{2}<7$ 임을 알 수 있다.

따라서 $n=6$ 또는 $n=7$ 인 경우 $\frac{a_n}{b_n}$ 가 최소가 된다. $\frac{a_6}{b_6} = \frac{1}{13^2} < \frac{4}{15^2} = \frac{a_7}{b_7}$ 이므로 $n=6$ 일 때

최솟값 $\frac{a_6}{b_6} = \frac{1}{13^2}$ 을 갖는다.

해설 7.2

대체풀이

$c_n = \frac{n^2-12n+37}{2n+1}$ 로 두자. c_n 이 최솟값이 되기 위해서는 먼저 부등식 $c_{n-1} \ge c_n$ 을 만족시켜야 한다.

$c_{n-1} = \frac{n^2-14n+50}{2n-1}$ 이므로, 부등식 $\frac{n^2-14n+50}{2n-1} \ge \frac{n^2-12n+37}{2n+1}$ 을 풀면,

$(n^2-14n+50)(2n+1) \ge (n^2-12n+37)(2n-1)$ 에서,

$2n^3-27n^2+86n+50 \ge 2n^3-25n^2+86n-37$ 이고, 이를 정리하면 $2n^2 \le 87$ 이므로,

이 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 $1 \le n \le 6$ 이다.

한편, 부등식 $c_{n-1} \ge c_n$ 에 n 에 $n+1$ 을 대입한 뒤에 부등호 방향을 바꾸면 부등식 $c_n \le c_{n+1}$ 을 푸는 것과 같다.[47)]

따라서 $c_n \le c_{n+1}$ 을 풀면 $2(n+1)^2 \ge 87$ 이고, 이 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 $n \ge 6$ 이다.

따라서, 두 부등식을 동시에 만족시키는 자연수 n 은 6 뿐이므로 c_n 이 최소가 되는 n 의 후보 역시 6 뿐이다.

따라서 $n=6$ 일 때 최소이다.

(만약 두 부등식을 동시에 만족시키는 n 이 여러 개가 있다면, 미분풀이 때처럼 대입해서 확인해줘야 한다.)

47) 제출답안으로는 부족한 표현이다. 여러분의 학습의 윤활을 돕는 Comment 정도로 생각할 것.

Show and Prove

1

수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1

기대T의 Real 실전모범답안

Show and Prove

기대T의 Real 실전모범답안

대치동 현장강의 / 영상수강 비대면강의 수강생들이 수업자료로 받고 있는 Real 모범답안 자료입니다.
문제풀이 방향성의 이해에 중점을 둬서 해설을 작성했다면, 이 답안은 100% 합격할 수 있는 최우수 모범답안입니다.
'해설 또는 대학예시답안'과 'Real 모범답안'의 작성방법이나 논리의 차이를 느껴보는 것만으로도 셀프첨삭효과를 누릴 수 있습니다.

chp. 3	[논제 10] 2022 건국대	실전답안 ☑ 학생첨삭답안 ☐

$\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각 $\angle ACB=\theta$라 하자.

원에 내접하는 $\triangle ABC$에서 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}=2\cdot 2=4$ 이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이다.

한편, $\overline{CD}=2$ 이므로 $\triangle OCD$는 정삼각형. $\overset{\frown}{CD}$에 대한 중심각 $\angle COD=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로, $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각 $\angle CBD=\dfrac{\pi}{6}$ 이다.

$\therefore \angle APB=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}=15^\circ$

$\triangle APB$에서 사인법칙에 의해

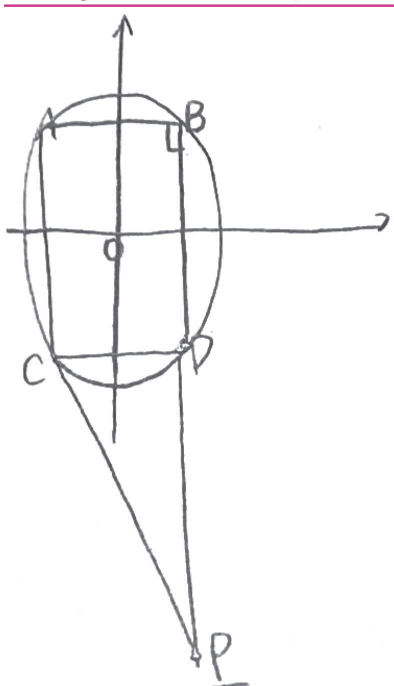
$$\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ABP)}=\frac{\overline{AB}}{\sin P}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ABP)}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$$ 를 만족한다.

$\sin(\angle ABP)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$일 때 $\overline{AP}$가 최댓값을 가지므로 이를 구해보면 $\overline{AP}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=4\sqrt{3}+4$ 이다.

$\therefore 4\sqrt{3}+4$

원 위의 임의의 점을 K라 하면, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$에 대한 원주각 $\angle AKB=\theta_1$라 하자.
$\triangle AKB$에서 사인 법칙에 의해 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta_1}=4$ $\therefore \sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta_1=\frac{\pi}{4}$
$\triangle OCD$에서 $\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{CD}=2$이므로, 중심각 $\angle COD$에 대한 원주각 $\angle CBD=\frac{\pi}{6}$
$\angle OCD=\angle ODC=\angle COD=\frac{\pi}{3}$
따라서 $\angle DPC=15^\circ$ $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$
$\triangle ABP$에서 사인 법칙에 의해
$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ABP)}$$
이때 $\overline{AP}$의 값은 최대여야 하므로 $\sin(\angle ABP)$의 값도 최대가 되어야 한다.
$\sin(\angle ABP)$의 최댓값이 1이므로 $\angle ABP=\frac{\pi}{2}$. 이고 $\overline{AP}$가 최대일 때의 상황은 아래와 같다.



중심이 되는 식 이후의
자잘한 계산과정은
조금 생략해줘도 괜찮습니다.

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ABP)} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\overline{AP} \Leftrightarrow \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\overline{AP}}$$
$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}=\overline{AP} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=\overline{AP}} \Leftrightarrow 4+4\sqrt{3}=\overline{AP}$$
따라서 $\overline{AP}$의 값 중 가장 큰 것은 $4+4\sqrt{3}$이다.

good!

[1]

$\overline{AD}=\overline{BD}=l$ 이라 두면,

$\triangle ABD$에서 $\overline{AB}=2l\cos t$이고,

$\triangle BDC$에서 $\overline{DC}=l\cos 2t$, $\overline{BC}=l\sin 2t$ 이다.

이때, 직각$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 이므로

$\Rightarrow 4l^2\cos^2 t=l^2\sin^2 2t+l^2(1+\cos 2t)^2$

$\Rightarrow 4\cos^2 t=\sin^2 2t+1+2\cos 2t+\cos^2 2t$

$\Rightarrow 4\cos^2 t=2+2\cos 2t$

$\Rightarrow \cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$

$\Rightarrow \cos t=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$ ($\because 0<t<\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\cos t>0$, $\cos 2t>0$) 이다. $\cdots$ ①

$\therefore$ 그림을 통해 $0<t<\frac{\pi}{4}$ 일때 $\cos t=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$ 임을 알 수 있다.

이제 ①에 $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$를 대입해보자.

i) $t=0$ 일때 (좌변)=(우변)=1

ii) $t=\frac{\pi}{4}$일때 (좌변)=(우변)=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$일때는 그림과 같은 삼각형이 그려지지 않기 때문에 위의 방식대로 풀 수 없습니다. 따라서 이렇게 대입해줌으로써 식이 성립함을 따로 확인해줘야 합니다.

따라서 $0\le t\le\frac{\pi}{4}$일 때 $\cos t=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$ 가 성립하고, $0\le x\le 1$에서 $\cos t=f(\cos 2t)$를 만족하는 함수는 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ 이다.

$\therefore f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

[2]

$\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{a_1}{2}}{2}}=f(\cos\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{8}$ ($\because$ 문제 1)

$\dfrac{a_3}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{a_2}{2}}{2}}=f(\cos\frac{\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{16}$ ($\because$ 문제 1)

$\vdots$

마찬가지 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{a_n}{2}$을 구해보면 $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ 가 나오므로 $a_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ 이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\cdot\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=2$

$\therefore$ 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고, 극한값 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$ 이다.

1-1)

$\angle BAD = \angle ABD = t$

D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\triangle ADH \equiv \triangle BDH$

$\overline{AD} = \overline{BD} = a$ 라 하자.

$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2a\cos t$

$\overline{DC} = a\cos 2t,\ \overline{BC} = a\sin 2t$

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$\Leftrightarrow 4a^2\cos^2 t = a^2 + a^2\cos^2 2t + 2a^2\cos 2t + a^2\sin^2 2t$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 t = 2 + 2\cos 2t$

$\Rightarrow$

$\cos t > 0$ 이므로 $\cos t = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}} \cdots ①$

$\therefore f(\cos 2t) = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$

$\therefore f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

답) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

$t=0$ 일때와 $t=\frac{\pi}{4}$ 일때는 삼각형이 그려지지 않기 때문에, ①에 따로 대입해줌으로써 식이 성립함을 보여주셔야합니다.

$\Rightarrow \cos t = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$ ($\because 0<t<\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\cos t>0, \cos 2t>0$) 이다. $\cdots ①$

$\therefore$ 그림을 통해 $0<t<\frac{\pi}{4}$ 일때 $\cos t = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$ 임을 알 수 있다.

이제 ①에 $t=0$, $t=\frac{\pi}{4}$를 대입해보자.

i) $t=0$ 일때 (좌변)=(우변)=1

ii) $t=\frac{\pi}{4}$ 일때 (좌변)=(우변)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ 일때 $\cos t = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$ 가 성립하고, $0 \le x \le 1$ 에서 $\cos t = f(\cos 2t)$를 만족하는 함수는 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ 이다.

$\therefore f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1-2)

$\dfrac{a_1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{a_2}{2} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{8}$

$\dfrac{a_3}{2} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = f\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = f\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos\dfrac{\pi}{16}$

$\vdots$

$\dfrac{a_n}{2} = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$\therefore a_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = 2 = \lim_{n\to\infty} a_n$

따라서 a_n은 2로 수렴한다.

Good