Show and Prove

2

수리논술을 위한 수학 2 & 미적분

저자 소개

SaP 시리즈 저자

김기대 T

- 고려대학교 수학과 (수리논술 합격 + 당해 수능 가형 100점)
- 2015~ 기대모의고사 저자, 2023~ 기대 N제 수학1 / 수학2 / 미적분 저자
- 2023~ Show and Prove 1편 ~ 3편 저자
- 現) 대치동 수리논술 현장강의 & 비대면 강의

자문

강민재	부산과학고등학교 졸업 연세대학교 수학과 (수리논술 합격)

검토진

김기준	서울대학교 수학교육과	박도형	경희대학교 치의예과 (수리논술 합격)
양수진	서울대학교 수리과학부 박사수료 (前 용인외대부고 교사)	전지원	이화여대 뇌인지과학전공 (수리논술 합격)
김재서	성균관대학교 자연과학계열 (수리논술 합격)		

기대T 교재 커리큘럼

<table>
<tr><th>출판 교재명</th><th>1월~4월</th><th>5월</th><th>6월</th><th>7월</th><th>8월</th><th>9월</th><th>10월</th><th>11월</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Show and Prove
수리논술 실전개념서</td><td colspan="6">1편 : 수리논술을 위한 Basic Logic 및 수학1</td><td rowspan="2">연세/시립/홍익
학교별 Final 수업</td><td rowspan="5">수능후
학교별
Final
수업</td></tr>
<tr><td colspan="6">2편 : 수리논술을 위한 수학2 & 미적분</td></tr>
<tr><td colspan="7">3편 : 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & Theme</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">4편 : 수리논술을 위한 선택확통과 선택기하 (수강생 전용)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">대학별 기출 분석집 (자체 해설수록, 25년 출판 예정)</td></tr>
<tr><td>기대 N제
수능수학 문제집</td><td colspan="8">수학1, 수학2, 미적분
(확률과 통계, 기하는 미정)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">기대모의고사
수능수학 모의고사</td><td colspan="2"></td><td colspan="6">시즌1</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4">시즌2 (미정)</td></tr>
<tr><td>대학별 Final
분석 교재</td><td colspan="8">Final 전용 교재 (Final 수강생만 구매 가능, 미출판)</td></tr>
</table>

- 학습 기간은 한 권 기준 4주를 넘기지 않는 것이 좋습니다.
- 음영 구간은 '학습 권장 시즌'을 의미합니다.
- 자세한 교재설명이나 출간 소식은 오른쪽 QR코드를 참고 해주세요.

교재 사용법

1. 학습 전 사전공부 권장량

1편 수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1
고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 수학2 & 미적분 기본개념 1회독

2편 수리논술을 위한 수학 2 & 미적분
본 시리즈 1편 학습 + 1편 누적 + 수학2 학습 + 미적분 학습

3편 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & Advanced Theme
본 시리즈 2편 학습 + 2편 누적

4편 수리논술을 위한 선택기하와 선택확통 (수강생 전용)
고1 수학, 수학1, 미적분 학습 + 선택확통, 선택기하 기본개념 1회독

5편 수리논술 대학별 주요 기출문제집 (2025년 예정)
본 시리즈 1편 ~ 4편 학습 권장

2. 해설집 활용법

예제와 실전 논제에 대한 해설 전부는 해설집에 수록 되어있으나, 일부는 문제집에도 동시 수록 되어있습니다.
해설이 없는 문제는 없으니, 항상 해설집을 옆에 두고 공부하세요.
(Chapter별로 나뉘어져 있는 예제 해설 모음 뒤에 논제 해설 모음이 있습니다.)

또한 예제와 실전 논제에 있는 별표는 다음과 같이 활용하면 됩니다.

<table>
<tr><th>별표</th><th>설명</th><th>고민 정도</th><th>고민 시간</th></tr>
<tr><td>★☆☆☆☆</td><td>직전에 배운 개념을 가볍게 확인하기 위한 쉬운 문제</td><td>매우 빠르게</td><td>3분 이내</td></tr>
<tr><td>★★☆☆☆</td><td>빈출하는 주제, 평이한 난이도의 문제</td><td>적당히</td><td>5~10분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★☆☆</td><td>실전 문제로 나오는 수준의 난이도이며, 고민 시간을 투자할 가치가 충분히 있는 고난도 문제</td><td rowspan="2">넉넉히</td><td>15~20분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★★☆</td><td>합격자조차도 승률이 반반 정도인 매우 어려운 문제</td><td>20~25분 이내</td></tr>
<tr><td>★★★★★</td><td>못 풀어도 합격이 가능할 만큼, 도전과 배움에 의의를 둔 초고난도 문제. 적당한 고민 후 해설로 빠른 학습 권장</td><td>빠르게</td><td>10~15분 이내</td></tr>
<tr><td colspan="4">꼭 고민 시간을 지키지 않아도 됩니다.</td></tr>
</table>

기대T 수리논술 수업 연간 커리큘럼

수리논술 수업일		수업 Theme (대면 강의 & 비대면 온라인 강의 동시 진행)	〈수업명〉 교재 및 첨삭여부
2월	1주차	- 수리논술 논리의 기본과 답안 설계법 - 증명법 1:수학적 귀납법 + 심화 (부분 수귀/강한 수귀) - 증명법 2:귀류법과 대우법 및 특수 증명법	**〈정규반 프리시즌〉** 자체 교재 + 모의고사 응시 (2월 수강생은 1:1 첨삭 무한제공)
	2주차		
	3주차		
	4주차		
3월	1주차	- 삼각함수 활용 및 심화 - 고난도 수열 및 시그마 성질 심화 - 수리논술용 수학1 심화 특강 - 시즌1 마무리	**〈정규반 시즌 1〉** 시리즈 1편 + 수업용 자체 교재 + 모의고사 응시 + 첨삭 (1차첨삭 후 2차첨삭 추가제공)
	2주차		
	3주차		
	4주차		
	5주차	- 미적분을 위한 기본기 : 극한 - 함수의 연속 : 사잇값 정리 및 최대최소 정리의 활용 - 미분가능성 오개념 때려잡기 & 평균값의 정리	**〈정규반 시즌 2〉** 시리즈 2편 + 수업용 자체 교재 + 모의고사 응시 + 첨삭 (1차첨삭 및 2차첨삭 추가제공) (5월 수강생에게는 확통기본강의 무료 제공 + 확통 특강 할인)
4월	1주차		
	2주차		
	3주차	중간고사 내신휴강 (3주 예정) 추천학습:선택확통 기본강의 학습 / 선택확통 특강 수강	
	4주차		
5월	1주차		
	2주차	- 평균값의 정리 고급 활용 & 미분의 활용 - 수리논술용 적분 Basic1 - 수리논술용 적분 Basic2 & 시즌2 마무리	
	3주차		
	4주차		
* 수업 Theme은 예시입니다. 출제 트렌드에 따라 커리큘럼이 매년 변화합니다. * 수업시간마다 보는 Test 문항에 대한 첨삭이 매수업 제공됩니다. * 지난 수업 첨삭도 상황에 따라 가능합니다. 오른쪽 QR코드 참고하세요. * 확통/기하 기본강의는 유베이스가 되기 위한 강의이며, 5, 6월 정규반 수강생들에게 제공됩니다. 확통/기하 특강은 고난도 수리논술 전용 문제풀이 skill을 가르치는 특강입니다.			수업소개 및 첨삭안내 등 정확한 안내는 아래 QR코드를 참고하세요.
6월	1주차	- Advanced 미적분 1 : 이변수함수, 젠센부등식 등 - Advanced 미적분 2 : 적분고급활용, 함수방정식 등 - Advanced 미적분 3 : 미분방정식, 지엽 미적분 등	**〈정규반 시즌 3〉** 시리즈 3편 + 수업용 자체 교재 + 모의고사 응시 + 첨삭 (1차첨삭 후 2차첨삭 추가제공) (6월 수강생에게는 기하기본강의 무료 제공 + 기하 특강 할인) **추가 선택** 〈선택과목 실전+심화 특강〉 수리논술을 위한 액기스 특강 (선택확통 3강 및 선택기하 3강) (온라인 영상수강이며, 상위권 대학 지원생은 수강 권고)
	2주차		
	3주차		
	4주차	기말고사 내신휴강 (3주 예정) 추천학습:선택기하 기본강의 학습 / 선택기하 특강 수강	
	5주차		
7월	1주차		
	2주차	- 수리논술 실전개념 1 : 정수론 / 고등수학 심화 - 수리논술 실전개념 2 : 부등식의 여러 가지 증명 - 수리논술 실전개념 3 : 더블카운팅 등 전용테마	
	3주차		
	4주차		
* 재수생이거나 논술에 진심이라면, 여유시간 (중간/기말 내신휴강기간 등등)을 활용하여 확통 및 기하 선택과목 심화특강을 수강해두시기 바랍니다. 8월 수업부터는 선택확통 및 선택기하 융합문제들도 전부 다루게 됩니다.			
8월	1주차	- Semi Final 1 (대학별 출제성향파악 : A, B그룹)	**〈Semi Final〉** 대학별 출제성향파악 + 수시원서 지원상담 진행 + 모의고사 응시 + 1차첨삭 제공
	2주차	- Semi Final 2 (대학별 출제성향파악 : C, D그룹)	
	3주차	- Semi Final 3	
	4주차	- Semi Final 4 (+ 수리논술 1:1 원서상담 진행)	
9월	1주차	- 상위권 수리논술 고난도 문제 해제 + 예상 모의 1	**〈고난도 문제풀이반 For 메디컬/고/연/서성한시〉** 상위권 수리논술을 위한 문풀진행 자체 교재+고난도 모의고사 응시
	2주차	- 상위권 수리논술 고난도 문제 해제 + 예상 모의 2	
	3주차	- 상위권 수리논술 고난도 문제 해제 + 예상 모의 3	
	4주차	- 고난도 문제 해제 + 예상 모의 4 (정규반 종강)	
수능전 Final (연세/시립/홍익)		학교별 Final 특강 (학교별 전용 파이널 교재 사용) 추석연휴 3일 and 직전 2일 (총 5회)	**〈학교별 Final〉** 학교별 자료집+예상문제 모의고사 응시 후 첨삭/채점 제공
11월	수능후	메디컬/고려/한양/성균/중앙/경희/인하 등 학교별 Final	

기대T 수리논술 수업 상세안내

수업명	수업 상세 안내 (지난 수업 영상수강 가능)
정규반 프리시즌 **(2월)**	- 수리논술만의 특징인 '답안작성 능력'과 '증명 능력'을 향상 시키는 수업 - 수험생은 물론 강사도 가질 수 있는 '증명 오개념'을 타파시키는 수학 전공자의 수업
정규반 시즌1 **(3월)**	- 수능/내신 공부와 다른 수리논술 공부의 결 & 방향성을 잡아주는 수업 - 삼각함수 & 수열의 콜라보 등 논술형 발전성을 체감해볼 수 있는 실전 내용 수업
정규반 시즌2 **(4~5월)**	- 수리논술에서 50% 이상의 비중을 차지하는 수리논술용 미적분을 집중 해석하는 수업 - 수리논술에도 존재하는 행동 영역을 통해 고난도 문제의 체감 난이도를 낮춰주는 수업 - 대학의 모범답안을 보고도 '이런 아이디어를 내가 어떻게 생각해내지?'라는 생각이 드는 학생들도 납득 가능하고 감탄할 만한 문제접근법을 제시해주는 수업
정규반 시즌3 **(6~7월)**	- 상위권 대학의 합격 당락을 가르는 고난도 주제들을 총정리하는 수업 - 아래 학교의 수리논술 합격을 바라는 학생들이라면 강추 (메디컬, 고려, 연세, 한양, 서강, 서울시립, 경희, 이화, 숙명, 세종, 서울과기대, 인하)
선택과목 특강 **(선택확통 / 선택기하)**	- 수능/내신의 빈출 Point와의 괴리감이 제일 큰 두 과목인 확통/기하의 내용을 철저히 수리논술 빈출 Point에 맞게 피팅하여 다루는 Compact 강의 (영상 수강 전용 강의) - 확통/기하 각각 2~3강씩으로 구성된 실전+심화 수업 (교과서 개념 선제 학습 필요) - 상위권 학교 지원자들은 꼭 알아야 하는 필수내용 / 6월 또는 7월 내로 완강 추천
Semi Final (8월)	- 본인에게 유리한 출제 스타일인 학교를 탐색하여 원서지원부터 이기고 들어갈 수 있도록 태어난 새로운 수업 (모든 대학을 출제유형별로 A그룹~D그룹으로 분류 후 분석) - 최신기출 (작년 기출+올해 모의) 중 주요 문항 선별 통해 주요대학 최근 출제 경향 파악
고난도 문제풀이반 For **메디컬/고/연/서성한시**	- 2월~8월 사이 배운 모든 수리논술 실전 개념들을 고난도 문제에 적용 해보는 수업 - 전형적인 고난도 문제부터 출제될 시 경쟁자와 차별될 수 있는 창의적 신유형 문제까지 다양하게 만나볼 수 있는 수업
학교별 Final **(수능전 / 수능후)**	- 학교별 고유 출제 스타일에 맞는 문제들만 정조준하여 분석하는 Final 수업 - 빈출 주제 특강 + 예상 문제 모의고사 응시 후 해설 & 첨삭 - 고승률 문제접근 Tip을 파악하기 쉽도록 기출 선별 자료집 제공 (학교별 상이)
첨삭	수업 형태 (현장 강의 수강, 온라인 수강) 상관없이 모든 학생들에게 첨삭이 제공됩니다. 1차 서면 첨삭 후 학생이 첨삭 내용을 제대로 이해했는지 확인하기 위해, 답안을 재작성하여 2차 대면 첨삭영상을 추가로 제공받을 수 있습니다. 이를 통해 학생은 6~10번 이내에 합격급으로 논리적인 답안을 쓸 수 있게 되며, 이후에는 문제풀이 Idea 흡수에 매진하면 됩니다.

정규반 안내사항 (아래 QR코드 참고)

대학별 Final 안내사항 (아래 QR코드 참고)

목차

학습전략

CHAPTER.1

수많은 다항함수 성질 중 수리논술에 주로 쓰이는 성질들을 위주로 정리합니다.
수능에선 결과만 알고 사용해도 별 이상 없더라도, 논술에선 결과를 이끌어내는 과정 자체가 하나의 문제로 출제되기 때문에
책에 있는 모든 내용을 이해하며 넘어가봅시다.

CHAPTER.2

극한~미분 단원에 이어지는 수능형 오개념을 고친 후, 수능에서 많이 구경 못해본 낯선 정리인 최대최소 정리와 사잇값 정리의 다양한 활용법에 대해 익히도록 합시다.

CHAPTER.3

미분가능성과 관련된 오개념을 고치고, 미분의 활용 뿐만 아니라 수리논술을 출제하는 대부분 학교들의 최애 소재인 '평균값의 정리'의 다양한 활용법에 대해 익히도록 합시다.

CHAPTER.4

수리논술에 필수적인 적분 테크닉에 대해 배웁니다. [3편]에서 학습할 고난도 적분문제풀이를 위해서 필요한 기본기에 해당하므로, 교재의 가이드에 잘 따라 학습하길 권장합니다.

CHAPTER.5

본 교재에서 배운 개념들을 활용해서 최근 대한민국 수리논술 주요 기출문항을 풀어보는 Chapter입니다.

CHAPTER

3

미분

3. 평균값의 정리의 문제 적용 Tip

이번에 소개할 Tip은, 수리논술 강의 내용 중 시그니처로 추정되는 부분이다. 내가 아는 선에선 이런 디테일을 가르쳐주는 강의/교재는 없었고, 심지어 대학마저도 예시답안에서 놓친 디테일이기 때문이다.

우선 한 문제를 풀어보고 나서 얘기할 건데, 바로 풀기에는 어려울 수 있는 힘숨찐 문제다.
10분 안에 풀리지 않으면 해설집을 바로 보아도 좋다.

예제 13 ★★★☆☆ 2018 한양대 모의

$0 \le a < b \le \pi$ 인 상수 a , b 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{2}(b-a)^2 \cos b \le \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2 \cos a$$

연습지

해설 13

함수 $f(x)=\sin x$ 는 미분가능한 함수이므로, 평균값 정리에 의해

$\underline{\sin b-\sin x=\cos\{\alpha(x)\}\times(b-x)}$ 인 $\alpha(x)$가 x와 b 사이에 항상 존재한다.

또한 $f'(x)=\cos x$ 는 구간 $[0,\pi]$ 에서 감소하므로, $0\le a\le x\le b\le\pi$일 때

$$\cos b\le\cos\{\alpha(x)\}\le\cos a$$

가 성립한다.

따라서 $(b-x)\cos b\le(b-x)\cos\{\alpha(x)\}=\sin b-\sin x\le(b-x)\cos a$ 이고, 각 변을 a 부터 b 까지 적분하면

$$\int_a^b(b-x)\cos b\,dx\le\int_a^b(\sin b-\sin x)dx\le\int_a^b(b-x)\cos a\,dx$$

이다. 그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b\le\int_a^b(\sin b-\sin x)dx\le\frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 이다.

이 문제의 기대T 해설에서 주목 해볼만한 포인트는 밑줄 쳐진 2번째 줄

$\underline{\sin b-\sin x=\cos\{\alpha(x)\}\times(b-x)}$ 인 $\alpha(x)$가 x와 b 사이에 항상 존재한다.

이다. 일반적인 평균값의 정리 문법이라면 $\frac{\sin b-\sin x}{b-x}=\cos\{\alpha(x)\}$로 썼을 텐데,

$\sin b-\sin x=\cos\{\alpha(x)\}\times(b-x)$로 쓴 이유가 무엇일까??

정답은 각주에 써둘테니 잠시 생각해 본 후 페이지 맨 아래를 보자.[29)]

일반적인 평균값의 정리 문법에 의하면, 분모가 0이 되면 안되므로 $x\ne b$여야 한다.

그런데 이 해설의 뒷부분에서 닫힌구간 $[a,b]$에서의 x에 대한 적분을 해야하기 때문에, $x=b$일 때도 성립하는 식을 이용하여 문제를 풀어야한다.

그래서 분모의 제약이 없는 식으로 해설에서 바꿔 썼고, 이 이유를 맞췄다면 앞의 학습을 잘한 것이다.[30)]

이미 본 시리즈 [2편] Chapter 1의 '곡선과 점 사이의 최단거리'에서

'쉽다고 무시하지 말아라, 놓치기 쉬운 포인트가 있다.'

며 주의를 줬던 부분인데, 당시 읽으면서 이런 거 누가 놓치냐며 코웃음을 쳤었다면 반성할 것!!

TIP

결론을 지으면,

평균값의 정리를 적용시키는 구간에 변수 x를 달고 있는 경우, $\frac{f(b)-f(x)}{b-x}=f'(\alpha)$로 쓰는 것보다

$f(b)-f(x)=f'(\alpha)\times(b-x)$로 쓰는 것이 답안 내의 논리에서 조금 더 유리하다.[31)]

29) $x=b$인 상황을 포함하기 위함이다.

30) 셀프칭찬 해주세요 :)

31) 조금이라고 한 이유는 대학의 합불을 바꿀만큼의 디테일까진 아니기 때문이다. 하지만 이러한 디테일은 수학전공 채점자에게 줄 수 있는 '합법적 뇌물'이다. 수학전공자인 채점자에게는 이러한 수학적 디테일까지 완벽히 살린 답안이 더 빛날 수 밖에 없다.

다음에 볼 문제는 매우 초고난도 문제인데, 어느 정도냐 물어본다면 알려주는 것이 인지상정.

한양대 모의논술은 매번 우수답안 3개를 홈페이지에 공시한다.
그런데, 이 문제의 우수답안들은 대학이 제공한 해설과 완전히 다르게 풀었다.

???: 다른 풀이 무시하시는 건가요!! 논리적 결함 없이 풀기만 하면 되는 거 아닌가요??

대부분은 그렇다. 꼭 출제자의 의도대로 풀 필요는 없다.
하지만 이 세 우수답안들은 문제의 함수가 다항함수임을 이용해서 다항식 전개 노가다로 푼 풀이라서,
만약 $y = \ln x$와 같은 초월함수로 나왔을 때 이 방법을 적용하여 풀 수 없다.[32] 즉, 제한적인 풀이라는 뜻이다.

이 문제를 출제자 의도대로 푼 응시자가 아무도 없었을 정도로 어려웠던 문제이므로, 독자들도 고민을 너무 많이 하진 말 것.
조금만 고민해보고, 다음 페이지 (해설)을 보자.

예제 14 ★★★★★ 2022 한양대 모의

제시문

(가) [함수의 극한의 대소 관계] 와 [샌드위치 정리] 언급된 제시문

(나) [정적분과 급수의 합 사이의 관계] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x = \int_a^b f(x)dx \quad \left(\text{단}, \triangle x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\triangle x\right)$$

(다) 연속함수 $f(x)$는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right\}dx$ 을 만족시킨다.

[1] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 2$임을 보이시오.

[2] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right)dx\right] = \frac{1}{10} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right)dx\right]$ 임을 보이시오.

[3] 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5\,dx\right]$ 을 구하시오.

32) 기대T가 억까하는게 아니구... ‘$(a+b)^5$은 전개할 수 있어도 $\ln(a+b)$를 전개하시오.’ 이런거 못하는거 맞잖아.... ㅠ

해설
14

[1] 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프를 생각하면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

이를 정리하면 $2(\sqrt{n+1}-1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+2(\sqrt{n}-1)$ 이고, 각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 을 곱한 후에 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 을 취하면, $2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2(\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n}}=2$ 임을 알 수 있다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2$ 이다.

[2] 첫 번째로 주어진 급수를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx=\sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)$$

따라서 제시문 (나)에 의해 구하고자 하는 극한값은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{10}$$

동일한 방식으로 두 번째 극한값을 아래와 같이 계산 가능하다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{10}$$

[3] 제시문 (다)에 의해 아래의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)dx=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx=n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx$$

한편, $f(x)$ 가 미분가능한 함수이고 $\dfrac{k-1}{n}\le x\le\dfrac{k}{n}$ (단, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) 인 x에 대하여

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)=f'(\theta_k(x))\left(\frac{k}{n}-x\right)\ \cdots\ ①$$ (방금 교재에서 배운 평균값 정리 문법)

을 만족시키는 $\theta_k(x)\in\left[x,\ \dfrac{k}{n}\right]\subset\left[\dfrac{k-1}{n},\ \dfrac{k}{n}\right]$가 항상 존재함을 평균값 정리를 통해 알 수 있다.

여기서 $f(x)=x^5$ 이라 하자. 도함수 $f'(x)=5x^4$ 은 $[0,1]$에서 증가함수이므로,

$\theta_k(x)\in\left[\dfrac{k-1}{n},\ \dfrac{k}{n}\right]\subset[0,\ 1]$에 대하여 $f'\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\le f'(\theta_k(x))\le f'\left(\dfrac{k}{n}\right)$이다.

양변에 $\frac{k}{n}-x$를 곱하면 $5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right) \le f'(\theta_k(x))\left(\frac{k}{n}-x\right) \le 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)$ 임을 알 수 있고,
이 식에 ①식을 적용 후 양변에 적분 및 시그마를 걸어주면 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5-x^5\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$$

[2]번 문제에서 계산한 결과를 활용하여, 위 부등식 양쪽 끝을 $n\to\infty$ 일 때의 극한값을 계산하면 $\frac{1}{2}$ 로 동일함을 알 수 있다. 따라서 제시문 (가)에 의해 문제에서 구하고자 하는 극한값은
$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5dx\right] = \frac{1}{2}$이다.

해설을 봐도 어질어질한 이 ‘2022 한양대 모의논술 문항’은 대한민국 수리논술에서 최초 출제된 유형[33]이라서, 그 당시 모의논술을 응시한 모든 학생들이 어리둥절했던 초고난도 문제 유형이었다.

물론 위 문항의 초월함수 버전이 2020 일본 교토대 의예과 본고사(해설집에 캡쳐해서 올려둠)에 출제됐었던 문제였고, 그 다음해 한양대 Final 강의에서 해당문제를 다뤘기 때문에, 이 강의를 들었던 친구들은 익숙했을 것.

??? : 본고사 학습의 필요성을 어필하려면 본시험에서 적중해야 의미있는거 아닌가요???

이미 본시험에 일본 본고사 문항이 직접적으로 반영된 사례에는 한양대 뿐만 아니라 여러 학교가 있다.
이외에도 난이도가 어려운 수리논술 문제의 풀이 아이디어가 일본 본고사 문제에서 사용된 아이디어인 경우도 많다.

??? : 그럼 학생이 셀프로 일본 본고사 선별해서 공부하는 건 어떤가요??

완전히 비추천한다. 제대로 된 안목 없이 고른 본고사 문항은 안 푸느니만 못하다. (수리논술 고인물이 아닌 이상)
일본 본고사 선별 문항은 학교별 Final 기간에 받아먹기만 하자.

cf. 국어 수능기출 대체자료의 대표주자 ‘리트’에 일본 본고사를 비유하면 다음과 같다.

1. 리트 없이도 수능국어 100점 받을 수 있다. (O)	본고사 없이도 수리논술 6관왕 할 수 있다. (O)
2. 수능국어 괴수들은 선별된 리트 풀면 도움된다. (O)	수리논술 괴수들은 선별된 본고사 풀면 도움된다. (O)
3. 리트 출제 소재가 수능에 적중하면 개이득이다. (O)	본고사 출제 소재가 논술에 적중하면 개이득이다. (O)

33) 본고사 시절 서울대에서 한번 나온 적은 있고, 수리논술에선 처음

4 평균값의 정리 적용시 유의사항 (오개념 조심)

다음 OX 퀴즈를 풀어보자.

"실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$f'(0)=1$이면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=1$인 순서쌍 $(a,\ b)$가 항상 존재한다."

정답은 페이지 아래 각주에 있다.[34)]
지겹도록 읽은 평균값의 정리, 한 번만 더 또박또박 정독해보자. 본인이 왜 틀렸는지 눈치챌 수 있다.

| 평균값의 정리

열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하고 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

| 유의사항 Point

문제에 있거나, 풀이를 위해 적절히 잡은 함수 $f(x)$ 및 구간 $(a,\ b)$에다가 평균값의 정리를 적용시킴으로써
c의 값이 탄생된 것이다.

즉, 'c는 $a,\ b,\ f(x)$에 대한 함수[35)]' 라는 뜻이다.
그런데 이 말이

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는
c가 원하는 값으로 탄생되도록 하는 적절한 $a,\ b,\ f(x)$가 항상 존재한다.

와는 다른 말임을 이해해야 한다. 위 O, X 문제에서 틀린 학생들은

이 c값이 0이라는 원하는 값[36)]으로 탄생되도록 하는 $(a,\ b)$가 존재할 것이다.

라고 추측했기 때문에 O라 했고, 틀린 것이다.
텍스트로 아직 감이 잘 안오는 학생들은, 아래 문제를 푼 후 다음 페이지를 읽어보도록 하자.

| 연습문제

어떤 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=k(x^2-2x-1)e^x$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

$0 \le a < b$ 인 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $f(b)-f(a)+b-a \ge 0$이다.

가능한 k의 범위를 구하시오.

---

34) X. $f(x)=x^3+x$라 하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=b^2+ba+a^2+1>1$이므로 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=1$ 일 수 없다.

35) 말이 너무 어려우면, $a,\ b,\ f(x)$에 따라 달라지는 값 정도로 이해하자.

36) $c=0$이길 바랬던 것. 그러면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=f'(0)=1$로 문제조건을 만족시킬 수 있다.

방금 문제에 대한 한 학생의 잘못된 풀이다.

“

조건의 부등식을 변형하면 $f(b)-f(a)+b-a \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}+1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq -1$

평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(a)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 구간 $(a,\ b)$ 사이에 적어도 하나 존재하므로

$f'(c) \geq -1$ 임을 알 수 있다. 이때 $0 \leq a < c < b$ 이므로,

$f'(c) \geq -1$라는 조건은 $x > 0$일 때 $f'(x) \geq -1$과 동치이다.

”

위 풀이를 뒷받침하는 논리는

“

위 부등식이 $0 \leq a < b$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여 성립하므로

a, b의 모든 조합을 통해 모든 양수의 값을 c의 값으로 만들어 낼 수 있다.

따라서 $f'(c) \geq -1$는 $f'(x) \geq -1$가 된다.

”

라는 논리다. 얼핏 보면 맞는 말 같지만, 앞 페이지에서 오개념이라고 했던 문장과 정확히 일맥상통한다.

아래 연습문제도 Box 부분을 해석해보고, 아래 QR코드[37]의 강의를 통해 연습문제 1, 2에 대한 제대로 된 해석을 학습하자.

| 연습문제 2 2024 6월 평가원 22번

정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^3-2ax^2$ 이라 하자.
다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a가 -2 뿐임을 보이시오.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$
>
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재한다.

도움영상

37) 여러 문제의 이해를 돕는 QR코드가 있다. 어려운 문제에 대한 해설을 돕는 강의가 있으니 참고하여 학습하도록 하자.

Show and Prove

3-4

Chapter 3. 미분

평균값의 정리의 실전 활용

1. 평균값의 정리 실전 활용 Tip.1 : 적절한 함수를 도입하기

평균값의 정리는 결국 관계식 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$을 활용하는 것이다.

함수의 모양이 아닌 숫자로 출제된 문제여도, 함수 $f(x)$와 구간 (a, b)를 적당히 잡는다면 계산 노가다를 많이 줄일 수 있다.

예를 들어 101^5-99^5 과 99^5-97^5의 대소를 비교하라는 문제가 나오면, $f(x)=x^5$로 잡아서

$$101^5-99^5=2\times\frac{f(101)-f(99)}{101-99}=2\times f'(c_1)$$

$$99^5-97^5=2\times\frac{f(99)-f(97)}{99-97}=2f'(c_2)$$

(단, $97<c_2<99<c_1<101$)

로 둔 후 함수 $f(x)=x^5$의 도함수 $f'(x)=5x^4$가 구간 $(97, 101)$에서 증가함수이므로 $f'(c_1)>f'(c_2)$ 여서 $101^5-99^5>99^5-97^5$ 임을 밝히는 테크닉이다.

위의 예로 든 문제는 너무 뻔하게 $f(x)=x^5$가 보였지만, 어려운 문제일수록 함수를 잡기 어려우므로 다양한 경험이 필요하다.

예제 15 ★★★☆☆ 2018 한양대 모의

[1] $a^2>b>0$일 때, 다음 세 실수의 크기를 비교하시오.

$$a-\sqrt{a^2-b}\,,\ \sqrt{a^2+b}-a\,,\ \frac{b}{2a}$$

[2] $a^3>b>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}$$

[3] 두 절댓값 $|75-\sqrt{5627}|$ 과 $|7-\sqrt[3]{341}|$ 의 크기를 비교하시오.

연습지

[1] 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 에 대하여 열린구간 $(a^2-b,\ a^2)$ 에서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{b}=f'(c_1)$$

인 실수 c_1 이 열린구간 $(a^2-b,\ a^2)$ 에서 존재한다. 열린구간 $(a^2,\ a^2+b)$ 에서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{\sqrt{a^2+b}-a}{b}=f'(c_2)$$

인 실수 c_2 가 열린구간 $(a^2,\ a^2+b)$ 에서 존재한다. 양의 실수 x 에 대하여 함수 $f'(x)$ 는 감소함수이고 $c_1<a^2<c_2$ 이므로

$$f'(c_2)<f'(a^2)<f'(c_1) \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b}-a}{b}<\frac{1}{2a}<\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}$$ 이다.

[2] 함수 $g(x)=\sqrt[3]{x}$ 에 대하여 열린구간 $(a^3-b,\ a^3)$ 에서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{a-\sqrt[3]{a^3-b}}{b}=g'(c_1)$$

인 실수 c_1 이 열린구간 $(a^3-b,\ a^3)$ 에서 존재한다. 열린구간 $(a^3,\ a^3+b)$ 에서 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{\sqrt[3]{a^3+b}-a}{b}=g'(c_2)$$

인 실수 c_2 가 열린구간 $(a^3,\ a^3+b)$ 에서 존재한다. 양의 실수 x 에 대하여 함수 $g'(x)$ 는 감소함수이고 $c_1<a^3<c_2$ 이므로

$$g'(c_2)<g'(a^3)<g'(c_1) \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{a^3+b}-a}{b}<\frac{1}{3a^2}<\frac{a-\sqrt[3]{a^3-b}}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^3+b}-a<\frac{b}{3a^2}<a-\sqrt[3]{a^3-b}$$ 이다.

($\frac{b}{3a^2}$ 부분은 굳이 보일 필요 없었지만, **[3]**을 위하여 미리 보여둠)

[3] **[1]**에서 부등식

$$\sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이 성립함을 보였다. $75^2=5625$ 이므로, ①에 의해 부등식

$$\left|75-\sqrt{5627}\right|=\sqrt{5627}-75=\sqrt{75^2+2}-75<\frac{2}{2\times75}=\frac{1}{75}$$

이 성립한다. 또한 **[2]**의 증명으로부터 부등식

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a<\frac{b}{3a^2}<a-\sqrt[3]{a^3-b}$$

이 성립함을 알 수 있다. $341=343-2=7^3-2$ 이므로 부등식 ②에 의해

$$\left|7-\sqrt[3]{341}\right|=7-\sqrt[3]{341}=7-\sqrt[3]{7^3-2}>\frac{2}{3\times7^2}=\frac{2}{147}=\frac{1}{73.5}>\frac{1}{75}$$

이 성립한다. 그러므로 $\left|75-\sqrt{5627}\right|<\left|7-\sqrt[3]{341}\right|$ 임을 알 수 있다.

2. 평균값의 정리 실전 활용 Tip.2 : 차수를 낮추는 것이 유리할 때 사용하기

다시 한 번 평균값의 정리의 관계식 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$을 보자.

좌변식이 우변식으로 바꾸면서 나타나는 제일 큰 특징은, 미분이 되면서 차수가 낮아졌다는 것이다.
미분이 돼서 좋은 점은 크게 두 가지다.

(i) 도함수에 대한 문제조건을 활용하기 쉬워진다.
(ii) 적분에 용이한 형태가 만들어질 가능성이 높다는 것이다.

(ii) 는 너무 다양한 활용이 가능해서 유형화하기 힘들기 때문에 현강에서도 잠깐만 소개하는 것으로 하고, 교재에서는 (i) 케이스의 문제를 풀어보자.

예제 16 ★★★☆☆ 2020 연세대 논술

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $I=\displaystyle\int_{-1}^{-b}\frac{f(a+x)}{x}dx+\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)}{x}dx$ 라 하자.
모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 도함수가 $|f'(x)|\le 1$을 만족시킬 때, a와 b의 값에 관계없이 $|I|\le 2$임을 보이시오. (단, a와 b는 실수이고, $0<b<1$이다.)

연습지

해설
16

치환하여 다음과 같이 정리한다.

$$I=\int_{-1}^{-b}\frac{f(a+x)}{x}dx+\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)}{x}dx=\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx$$

이다.

평균값의 정리에 의해 함수 $f(x)$가 구간 $[a-x,\ a+x]$에서 연속이고 구간 $(a-x,\ a+x)$에서 미분가능하므로

$\frac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}=f'(c)$ 인 c가 구간 $(a-x,\ a+x)$에 존재한다.

$\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=2f'(c)$ 이므로 $-2\le\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}\le 2$ 이다.

$$\int_{b}^{1}(-2)\,dx\le\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx\le\int_{b}^{1}2\,dx$$

$$-2(1-b)\le\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx\le 2(1-b)$$

따라서 $0<b<1$ 이므로 $-2\le\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx\le 2$ 이다.

3. 평균값의 정리 실전활용 Tip.3 : 문제에서 보이려는 것을 유심히 관찰하여 적용하기

상당히 어려운 문제이므로, 아래 문제를 다음 단계에 따라 활용하자.

(i) [1]을 증명했다고 치고, 이를 이용해서 [2]를 풀어보자.
(ii) 첫 문제풀이 시도는 5분만 하고, 다음 페이지의 힌트를 보자.
(iii) 그 후 다시 [2]를 10분 고민 해보고, 안 풀린다면 미련 없이 다음 페이지 ([2]의 해설)을 보자.
(iv) [2] 이해가 끝났으면, 나머지 [1], [3]을 적당히 풀어본 후 해설로 학습하기.

예제 17

★★★★☆ 2020 인하대 모의

제시문

(가) [평균값 정리]
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때, $\sin x < x$이 항상 성립한다.

(다) 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$가 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$을 만족하고
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이면, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이다.

※ 자연수 n에 대하여 방정식 $\sin x = \frac{1}{x}$는 구간 $\left(2n\pi, 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$에서 유일한 해 $x=a_n$을 갖는다.

[1] 모든 자연수 n에

$$2n\pi < a_{n+1}-2\pi < a_n$$

가 성립함을 보이시오.

[2] 각 자연수 n에 대하여

$$a_n - a_{n+1} + 2\pi = \frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

을 만족하는 b_n이 $a_{n+1}-2\pi$와 a_n 사이에 존재함을 보이시오.

[3] $\lim_{n\to\infty} a_n \sin(a_{n+1}-a_n) = 0$임을 보이시오.

| [17-2]의 식 조작에 대한 힌트를 얻는 법

(i) 'b_n이 $a_{n+1}-2\pi$와 a_n 사이에 존재함' 이라는 어구를 통해 의심하기

이 어구를 통해 '사잇값 정리' 혹은 '평균값의 정리'를 의심해볼 수 있다.
(근데 사실 답은 평균값의 정리로 정해져 있었다. 제시문을 읽었는지 체크!! 대놓고 있는데, 눈치 못채면 안된다. 제시문 흘려보내는 습관 고치라고 1편부터 강조중!!)

(ii) 평균값의 정리의 원문 '$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c가 a와 b 사이에 존재' 와 문제조건을 비교할 것.

정리원문 :	$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$	인 c 가	a	와 b 사이에 존재
문제조건 :	$a_n-a_{n+1}+2\pi=\dfrac{1}{\cos b_n}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$	인 b_n이	$a_{n+1}-2\pi$	와 a_n 사이에 존재

밑줄 치지 않은 뒷부분을 서로 일치시켜보면 $c=b_n$, $a=a_{n+1}-2\pi$, $b=a_n$이다.

이를 정리원문에 대입해보면 $\dfrac{f(a_n)-f(a_{n+1}-2\pi)}{a_n-(a_{n+1}-2\pi)}=f'(b_n)$이 된다.

이것과 문제조건의 밑줄 식이 일치하도록 하는 적당한 함수 $f(x)$를 찾으면 문제접근이 끝난다.

$\cos b_n$이 있으니 이것은 $f'(b_n)$와 관련이 있을 것 같아서 $f'(x)=\cos x$로 의심,

a_n, a_{n+1}은 방정식 $\sin x=\dfrac{1}{x}$들의 해니까 관계식 $\sin a_n=\dfrac{1}{a_n}$, $\sin a_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}$ 쓰일 것으로 의심,

방정식에 $\sin x$가 있으니 $f(x)=\sin x$라 의심하면?? 역시는 역시. $(\sin x)'=\cos x$!!

이렇게 세 의심이 하나의 결과로 귀결돼서, 문제접근이 완료되게 된다.
아다리라고 생각할 수 있지만, 이것이 어려운 평균값의 정리 문제를 뚫는 필살기[38]다.

노파심에 말하지만 위 과정은 문제풀이 접근방법이지, 답안은 이렇게 쓰면 안된다.
함수 $f(x)$는 $\sin x$, 구간은 $(a_{n+1}-2\pi,\ a_n)$로 잡아서 푼 공식답안은 해설집을 참고하도록 하자.

기대T Comment)
평균값의 정리의 원문을 달달 외워서 머릿속에 담아두도록 하자.
이를 문제와 일대일매칭 시키다보면, 위처럼 문제접근에 가까워지는 경우가 많다.
이 과정 없이 이 문제에서 함수와 구간을 잡는 건 매우 힘든 문제였다.

38) 남들은 '이걸 어떻게 생각해' 하고 있을 때 우리는 문제 출제의 구조를 이해하여 역으로 힌트를 얻어나가는 과정인 셈

논제 34번~42번 안내

Show and Prove [1편], [2편]에서 학습한 내용을 복습하기 좋은 최신 우수문항 모음입니다.
[1편], [2편] 학습을 완료했다면 도전해봅시다.

논제 34

★★★☆☆ 2024 인하대

제시문

(가) (정적분의 치환적분법)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

(나) ($\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 꼴의 부정적분)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

[1] 정적분 $\int_0^\pi \left((\pi-x)^8+(\pi-x)^2+\sin^3 x\right)dx$의 값을 구하시오.

[2] 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$가 성립함을 보이시오.

[3] 정적분 $\int_{-\pi}^\pi \frac{(x+1)\sin^3 x}{2-\cos^2 x}dx$의 값을 구하시오.

연습지

답안지

Show and Prove

2

수리논술을 위한 수학 2 & 미적분

예제 해설 모음

해설
13

함수 $f(x)= \sin x$ 는 미분가능한 함수이므로, 평균값 정리에 의해

$$\underline{\sin b - \sin x = \cos\{\alpha(x)\}\times(b-x) \text{ 인 } \alpha(x)\text{가 } x\text{와 } b \text{ 사이에 항상 존재한다}}.$$

또한 $f'(x)= \cos x$ 는 구간 $[0, \pi]$ 에서 감소하므로, $0 \leq a \leq x \leq b \leq \pi$일 때

$$\cos b \leq \cos\{\alpha(x)\} \leq \cos a$$

가 성립한다.

따라서 $(b-x)\cos b \leq (b-x)\cos\{\alpha(x)\} = \sin b - \sin x \leq (b-x)\cos a$ 이고, 각 변을 a 부터 b 까지 적분하면

$$\int_a^b (b-x)\cos b\, dx \leq \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \leq \int_a^b (b-x)\cos a\, dx$$

이다. 그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \leq \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 이다.

해설 14

[1] 함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프를 생각하면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

이를 정리하면 $2(\sqrt{n+1}-1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+2(\sqrt{n}-1)$ 이고, 각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 을 곱한 후에 극한 $\lim_{n\to\infty}$ 을 취하면, $2=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}} \le \lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2(\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n}}=2$ 임을 알 수 있다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2$ 이다.

[2] 첫 번째로 주어진 급수를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx=\sum_{k=1}^{n}n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)$$

따라서 제시문 (나)에 의해 구하고자 하는 극한값은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{10}$$

동일한 방식으로 두 번째 극한값을 아래와 같이 계산 가능하다.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}n\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{10}$$

[3] 제시문 (다)에 의해 아래의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-n\int_0^1 f(x)dx=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx=n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx$$

한편, $f(x)$ 가 미분가능한 함수이고 $\dfrac{k-1}{n}\le x \le \dfrac{k}{n}$ (단, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) 인 x에 대하여

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)=f'(\theta_k(x))\left(\frac{k}{n}-x\right)\ \cdots ①$$ (방금 교재에서 배운 평균값 정리 문법)

을 만족시키는 $\theta_k(x)\in\left[x,\ \dfrac{k}{n}\right]\subset\left[\dfrac{k-1}{n},\ \dfrac{k}{n}\right]$가 항상 존재함을 평균값 정리를 통해 알 수 있다.

여기서 $f(x)=x^5$ 이라 하자. 도함수 $f'(x)=5x^4$ 은 $[0,1]$에서 증가함수이므로,

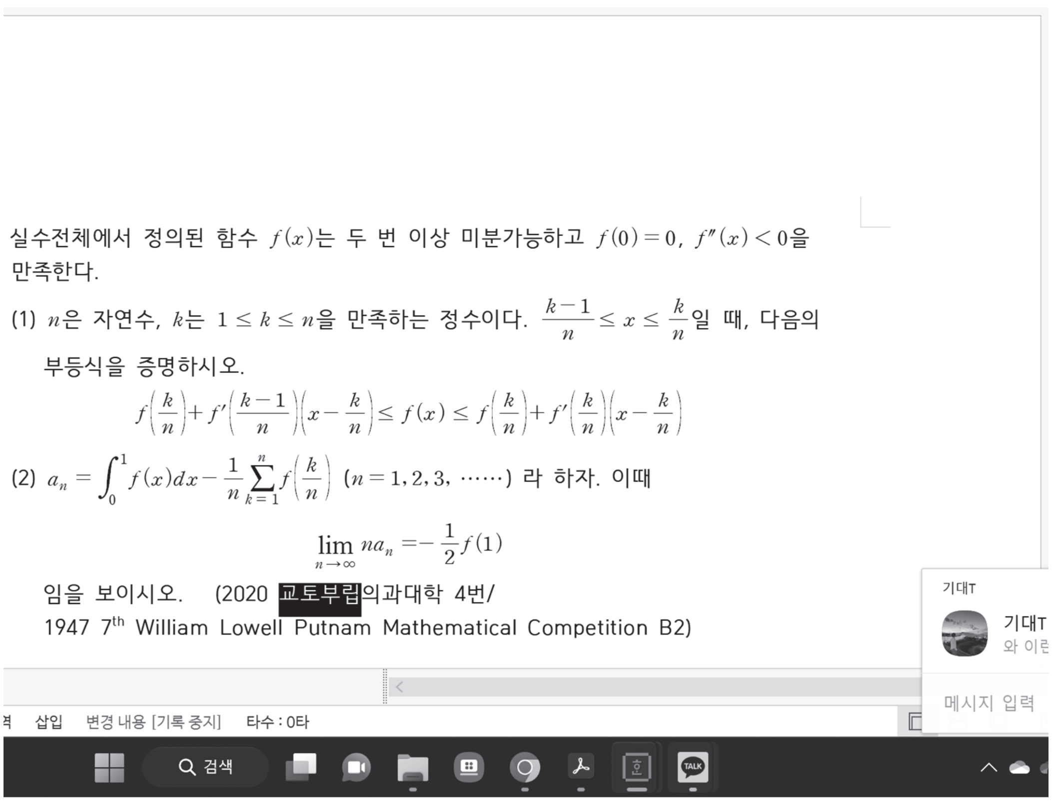
$\theta_k(x)\in\left[\dfrac{k-1}{n},\ \dfrac{k}{n}\right]\subset[0,\ 1]$ 에 대하여 $f'\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\le f'(\theta_k(x))\le f'\left(\dfrac{k}{n}\right)$이다.

양변에 $\dfrac{k}{n}-x$를 곱하면 $5\left(\dfrac{k-1}{n}\right)^4\left(\dfrac{k}{n}-x\right) \le f'(\theta_k(x))\left(\dfrac{k}{n}-x\right) \le 5\left(\dfrac{k}{n}\right)^4\left(\dfrac{k}{n}-x\right)$ 임을 알 수 있고,
이 식에 ①식을 적용 후 양변에 적분 및 시그마를 걸어주면 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5-x^5\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$$

[2]번 문제에서 계산한 결과를 활용하여, 위 부등식 양쪽 끝을 $n\to\infty$ 일 때의 극한값을 계산하면 $\dfrac{1}{2}$ 로 동일함을 알 수 있다. 따라서 제시문 (가)에 의해 문제에서 구하고자 하는 극한값은 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^5 - n\displaystyle\int_0^1 x^5dx\right]=\dfrac{1}{2}$ 이다.

교토대 의대 문제 : 한양대 모의문제의 일반형 버전인 2020 교토대 의대 문제는 아래 사진 참고
(TMI : 20년부터 기대T의 일본 본고사 선별을 도와주고 계시는 분의 노트북 화면캡쳐 + 깨알 기대T 카톡)


실수전체에서 정의된 함수 $f(x)$는 두 번 이상 미분가능하고 $f(0)=0$, $f''(x)<0$을 만족한다.

(1) n은 자연수, k는 $1\le k\le n$을 만족하는 정수이다. $\dfrac{k-1}{n}\le x\le\dfrac{k}{n}$일 때, 다음의 부등식을 증명하시오.

$$f\left(\frac{k}{n}\right)+f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{k}{n}\right)+f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)$$

(2) $a_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 라 하자. 이때

$$\lim_{n\to\infty} na_n=-\frac{1}{2}f(1)$$

임을 보이시오. (2020 교토부립의과대학 4번/
1947 7th William Lowell Putnam Mathematical Competition B2)

Show and Prove

2

수리논술을 위한 수학 2 & 미적분

기대T의 Real 실전모범답안

Show and Prove

기대T의 Real 실전모범답안

대치동 현장강의 / 영상수강 비대면강의 수강생들이 수업자료로 받고 있는 Real 모범답안 자료입니다.
문제풀이 방향성의 이해에 중점을 둬서 해설을 작성했다면, 이 답안은 100% 합격할 수 있는 최우수 모범답안입니다.
'해설 또는 대학예시답안'과 'Real 모범답안'의 작성방법이나 논리의 차이를 느껴보는 것만으로도 셀프첨삭효과를 누릴 수 있습니다.

chp. 1	[논제 2] 2021 인하대	실전답안 ☑ 학생첨삭답안 □

[1]

점 (a,b)가 곡선 $y=(x-p)^2+p^2+2$ 위의 점이므로

$b=(a-p)^2+p^2+2$가 성립.

$\Rightarrow 2p^2-2ap+a^2+2-b=0$

이를 만족하는 실수 p가 존재하려면 판별식 $D\geq 0$를 만족해야 한다.

$\therefore D/4=a^2-2(a^2+2-b)\geq 0$

$$\therefore b\geq \frac{a^2+4}{2} \cdots ①$$

[2]

먼저 곡선 위의 임의의 한 점 (a,b)와 $(-12,-1)$ 사이의 거리 d를 구하자.

$d=\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2}$

$\geq \sqrt{\underbrace{(a+12)^2+\left(\frac{1}{2}a^2+3\right)^2}_{\text{put } f(a)}}\ (\because ①) \cdots ②$

이때 $f'(a)=2(a+12)+2\left(\frac{1}{2}a^2+3\right)\cdot a$

$=a^3+8a+24$

$=(a+2)\underbrace{(a^2-2a+12)}_{>0}$ 이고, $f''(-2)>0$ 이므로 $f(a)$는 $a=-2$에서 극소이다.

$\therefore f(a)$는 $a=-2$일때 최솟값 125를 갖는다. $\therefore f(p)$의 최솟값은 $5\sqrt{5}$.

한편, 부등식②의 등호는 $b=\frac{a^2+4}{2}$일때 성립하므로 $a=-2$를 대입하면 $b=4$이다.

(a,b)는 곡선 위의 점이므로 $y=(x-p)^2+p^2+2$에 $(-2,4)$를 대입하면 $p=-1$.

$\therefore f(p)$의 최솟값은 $5\sqrt{5}$이고 이때 p의 값은 -1이다.

[2-1]

$y=(x-p)^2+p^2+2$이 (a,b)를 지나므로 대입하면

$(a-p)^2+p^2+2=0 \Rightarrow 2p^2-2ap+a^2+2-b=0$

실수 p가 ~~(a,b)에 무관하게 항상 존재하므로~~ $D\geq0$이다.

이를 만족하는 실수 p가 존재하려면 $D\geq0$ 이어야한다.

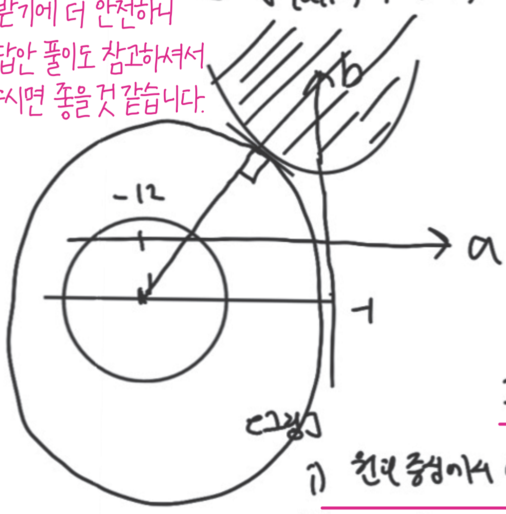
$D=4a^2-8(a^2+2-b)\geq0,\quad b\geq\frac{a^2+4}{2}$ ... ①

[2-2]

수식적 해석이 가능한 상황에서는 수식풀이가 점수 받기에 더 안전하니 모범답안 풀이도 참고하셔서 익혀주시면 좋을 것 같습니다.

$(-12,-1)$로부터 영역의 점 (a,b)까지 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{(a+12)^2+(b+1)^2} \Rightarrow (a+12)^2+(b+1)^2=d^2$



[그림]

중심이 $(-12,-1)$이고 반지름의 길이가 d인 원으로 해석할 수 있다.

d가 최소가 되어야 하므로

[그림]과 같이 포물선 $b=\frac{1}{2}a^2+2$과 원이 접해야 한다.

그때의 점을 (m,n)이라 하면

i) 원의 중심에서 (m,n)까지의 기울기 $=\frac{n+1}{m+12}$

ii) 포물선에서의 접선 기울기

$\Rightarrow db=a\,da,\ \frac{db}{da}=a$ 에서 $\boxed{\min\left(\frac{db}{da}\right)}=m$

i), ii)가 직교해야 하므로 $m\cdot\frac{n+1}{m+12}=-1$ ... ②

한편 (m,n)이 포물선 위에 있음이 자명하므로 $n=\frac{1}{2}m^2+2$ ... ③

②, ③을 연립하면 $m=-2,\ n=4$이고, d를 $y=(x-p)^2+p^2+2$에 대입하면 $p=4,\ \min(f(p))=5\sqrt{5}$ 이다.

제시문에서 언급하지 않은 이상, 기호의 사용은 자제해주시는 게 좋습니다.

[1] $1+\frac{1}{(a_n)^2} \le \frac{1}{(a_{n+1})^2}$

$< \frac{1}{(a_{n+1})^2}+1$

$\Rightarrow \frac{1}{(a_n)^2} < \frac{1}{(a_{n+1})^2}$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{(a_{n+1})^2}-1}-\ln(1+x)$ 이라 두자.

$f(a_{n+1}) = -\ln(1+a_{n+1})$

$<0 \ (\because a_{n+1}>0)$ 이고,

$f(a_n)=\sqrt{\frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2}-1}-\ln(1+a_n)$

$>\sqrt{\frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2}-1}-a_n \ (\because$ 제시문 1$)$

$\ge\sqrt{(a_n)^2}-a_n=0 \left(\because 1+\frac{1}{(a_n)^2}\le\frac{1}{(a_{n+1})^2} \Rightarrow (a_n)^2\le\frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2}-1\right)$ 이므로

사잇값 정리에 의해 $f(x)=0$을 만족하는 x가 (a_{n+1}, a_n)에 적어도 하나 존재한다.

한편, 문제에서 두 그래프가 한 점에서 만난다고 하였으므로, $f(x)=0$을 만족하는 x는 b_n으로 유일하다.

$\therefore$ 수열 $\{a_n\}$이 $1+\frac{1}{(a_n)^2}\le\frac{1}{(a_{n+1})^2}$을 만족시킬 때, 부등식 $a_{n+1}<b_n<a_n$이 성립한다.

[2] 제시문 2에서 $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\Leftrightarrow (n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\ge(n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\ge n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+1 \cdots ㉠$

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$ 일때, $1+\frac{1}{(a_n)^2}\le\frac{1}{(a_{n+1})^2}$

$\Leftrightarrow 1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le(n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 이 ㉠에 의해 성립.

$\therefore$ [3-1]에 따라 부등식 $a_{n+1}<b_n<a_n$이 성립함을 알 수 있다.

$\therefore \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}<b_n<\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\le\lim_{n\to\infty}b_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\cancel{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{0}\le\lim_{n\to\infty}b_n\le e^{-\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{0}$ $\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=0. \cdots ㉡$

한편, $a_{n+1}<b_n<a_n \Rightarrow \sqrt{n}\cdot a_{n+1}<\sqrt{n}\cdot b_n<\sqrt{n}\cdot a_n$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}<\sqrt{n}\cdot b_n<\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}_{=e^{-\frac{1}{2}}}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot b_n\le\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}}_{=e^{-\frac{1}{2}}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot b_n=e^{-\frac{1}{2}} \cdots ㉢$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\ln(1+b_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}\cdot b_n$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot b_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$ ($\because$ ㉡에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1$, ㉢) $\therefore e^{-\frac{1}{2}}$

[3-1] $a_{n+1}<b_n$은 그림에 의해 자명하다.

쌍곡선과 포물선은 1사분면 위의 한 점에서만 만나므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{(a_{n+1})^2}-y^2=1$에서 y좌표가 양수인 위쪽 $y=\sqrt{\frac{x^2}{a_{n+1}^2}-1}$ 만 생각해도 무방하다.

주어진 조건에 의해 $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{a_{n+1}^2}-1}-\ln(1+x)$라 두면 $f(x)=0$의 해가 $x=b_n$이 된다.

i) $f(a_{n+1})=-\ln(1+a_{n+1})<0$

ii) 조건에서 $1+\frac{1}{(a_n)^2}\le\frac{1}{(a_{n+1})^2} \Leftrightarrow a_n^2+1\le\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2 \Leftrightarrow a_n^2\le\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2-1$

$\Leftrightarrow a_n\le\sqrt{\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2-1}$ …㉠

iii) $\ln(1+x)<x$이므로 $-\ln(1+a_n)>-a_n$ …㉡

~~∴ ii), iii)에 의해~~ $f(a_n)=\sqrt{\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}-1}-\ln(1+a_n)>\sqrt{a_n^2}-a_n=0$

ii) $f(a_n)=\sqrt{\frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2}-1}-\ln(1+a_n)$
$>\sqrt{\frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2}-1}-a_n$ (∵㉡)
$\ge\sqrt{(a_n)^2}-a_n=0$ (∵㉠)

$f(a_{n+1})f(a_n)<0$에서 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=0$이 되는 c가 a_{n+1}과 a_n 사이에 적어도 하나 존재, 이 c는 b_n으로 유일하므로

$$a_{n+1}<\cancel{c_n}<a_n$$
bn

[3-2]

$a_n^2=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$, $a_{n+1}^2=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}<\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$ 임은 자명하므로 $(n+2)^{n+1}n^{n+1}>(n+1)^{2n}$

$\Leftrightarrow \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}>\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \Leftrightarrow 1+(n+1)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}>1+n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{a_n^2}\le\frac{1}{a_{n+1}^2}$

제시문 2를 사용하여 보여주시는 게 더 좋습니다.

따라서 [3-1]에 의해 $a_{n+1}<b_n<a_n$을 만족시킨다

$a_{n+1}<b_n<a_n \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\sqrt{n+1}\,a_{n+1}<\sqrt{n}\,b_n<\sqrt{n}\,a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n=e^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n=e^{-\frac{1}{2}}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{e}}$

마무리 부분이 상당히 생략되어 있습니다. 모범답안처럼 조금 더 구체적으로 작성해주세요.