29제 (해설)

수학 영역(A 형)

안녕하세요?
J&S모의고사 저자 JH입니다. 추석 동안 혹은 그 이후 파이널 교재로 제작하려고 했었던 문제들을 만드는 중에 시기를 놓쳐 검토를 마친 문제들만 무료배포로 편집해 제공합니다.
(J&S모의고사 공동저자인 SI코딩노예님도 제작에 일부 참여해 주셨습니다)

맞은 답이라도 꼭 해설 읽어주세요.
의도와 맞는 풀이인지 보기 위함입니다.
정성들여 자세히 적었습니다.

1. 우선, $A+B=E$에서 식의 앞에 행렬 A를 곱하면 $A^2+AB=A$ 따라서 $A^2=A-AB$이다.
두 번째 식 $A^2-3E=X$의 A^2대신 $A-AB$를 넣으면 $A-AB-3E=X$
따라서 X의 모든 성분의 합은 $3+1-6=-2$이다. ($\because$ 행렬 $3E$의 모든 성분의 합은 -6이다.)

2. $A^3-E=O$ $(A-E)(A^2+A+E)=O$
행렬 $A-E$의 역행렬이 존재하므로 $(A-E)(A^2+A+E)=O$의 양 변에 $(A-E)^{-1}$을 곱하면 $A^2+A+E=O$
따라서 $A^2=-A-E$ 행렬 A의 모든 성분의 합은 -1, 행렬 E의 모든 성분의 합은 2
따라서 행렬 A^2의 모든 성분의 합 -1

3. $A-2B=2E$ 이므로 $AB=BA$이다.
(식의 왼쪽에 A를 곱하면 $A^2-2BA=2A$, 식의 오른쪽에 A를 곱하면 $A^2-2AB=2A$)
!!!!
외워두면 좋다. B가 A관한 1차식이면 즉, $B=mA+nE$의 꼴이면 (m, n은 상수) $AB=BA$이다.
!!!!
식 $AB^2+B=BA$을 $AB^2+B=AB$로 고칠 수 있다. ($AB=BA$이기 때문)
B의 역행렬이 존재하므로 $AB+E=A$
따라서 $A-AB=E$, $A(E-B)=E$
A의 역행렬이 존재한다.
$A=(E-B)^{-1}$
$A-2B=2E$에서 A대신 $(E-B)^{-1}$를 넣고 양 변에 $E-B$를 곱하면
$2B^2=E$ 따라서 ㄷ도 맞다.

4. $B^2A+B=E$에서
$B(BA+E)=E$이므로 $(BA+E)B=E$
따라서 $BBA=BAB$
두 번째 식 $B(AB-BA)=3E-A$의
좌변이 $BAB-BBA$이므로 O이다.(O는 영행렬)
따라서 $A=3E$
첫 번째 식$B^2A+B=E$의 A대신 $3E$를 대입하자. $3B^2+B=E$
ㄷ의 $B^{-1}=3B+E$이 맞다.

5. $n=1,\ 2,\ 3$일 때는 지수함수

$y=\left(\dfrac{6}{2n-1}\right)^x$가 증가함수이므로

$x=0$일 때, 최댓값 1을 갖는다.

$n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 14,\ 15$일 때는

$y=\left(\dfrac{6}{2n-1}\right)^x$가 감소함수이므로

$x=-1$일 때, 최댓값 $\dfrac{2n-1}{6}$을 갖는다.

$(n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 14,\ 15)$

따라서 $1+1+1+\displaystyle\sum_{n=4}^{15}\frac{2n-1}{6}=39$

6. (가)에서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=b\times a^{-x}$의

최댓값은 $x=-1$일 때, $ab=3$이다.

(나)에서 $f(x)$, $g(x)$모두 증가함수이므로

함수 $f(x)+g(x)$의 최댓값은 $x=1$일 때,

$ab+a^2=19$ 따라서 $a^2=16$, $a=4$이다.

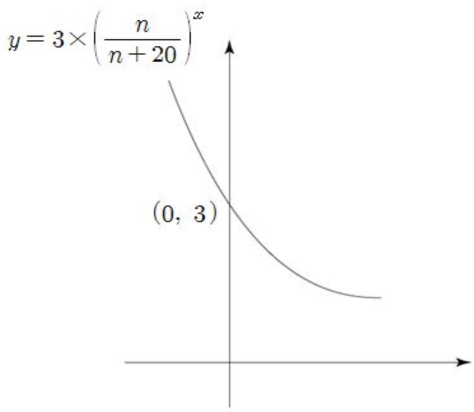
따라서 $b=\dfrac{3}{4}$

7. 우선 대략적인 개형을 파악하기 위해

$y=3\times\left(\dfrac{n}{n+20}\right)^x$의 특징을 파악해 보면

항상 점(0, 3)을 지나고 감소함수라는

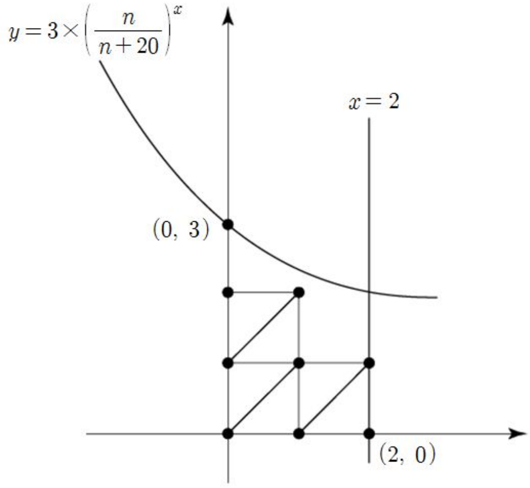
점을 알 수 있다.



위 그래프는 대략적인 개형이다.

이제 기울기가 1인 직선이 오직 하나가

되도록 n의 값을 찾아보자.

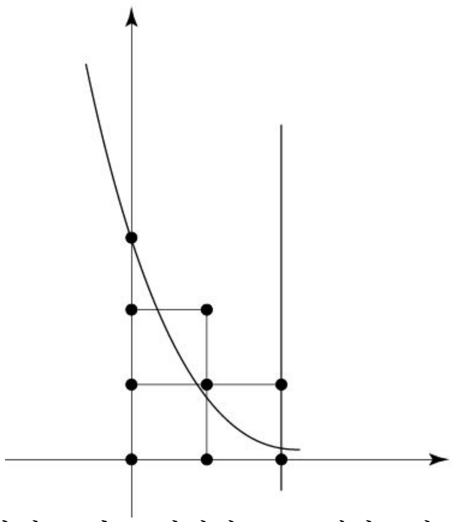


만약 위의 지수함수처럼 $x=1$에서 2와

3사이의 값을 가진다면 최소 점 (0, 0)과

점 (1, 1)을 잇는 직선과 점(0, 1)과 점

(1, 2)를 잇는 직선 2개 생기게 된다.



반대로 위 그림처럼 $x=1$에서 0과

1사이의 값을 가진다면 기울기가 1인

직선이 존재하지 않게 된다.

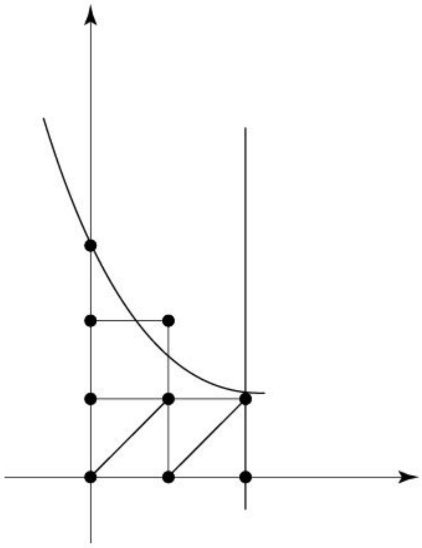
따라서 반드시 $x=1$에서 1이상 2미만의

값을 가져야 한다.

그러나 아래 그림처럼 $x=2$에서 곡선이

1보다 큰 값을 갖게 된다면 기울기가

1인 직선이 2개 존재하게 된다.



따라서 위 그림처럼 $x=2$에서 곡선은 0과 1사이의 값을 가져야 한다.

$1 \leq \ 3\times\left(\frac{n}{n+20}\right)^1 < 2$의 부등식을 풀면

$10 \leq \ n < 40$

$0 \leq \ 3\times\left(\frac{n}{n+20}\right)^2 < 1$의 부등식을 풀면

$n^2-20n-200<0$

$\Leftrightarrow \ -10+10\sqrt{3}<n<10+10\sqrt{3}$

$1.7<\sqrt{3}<1.8$이므로 둘을 동시에 만족하는 n의 값은

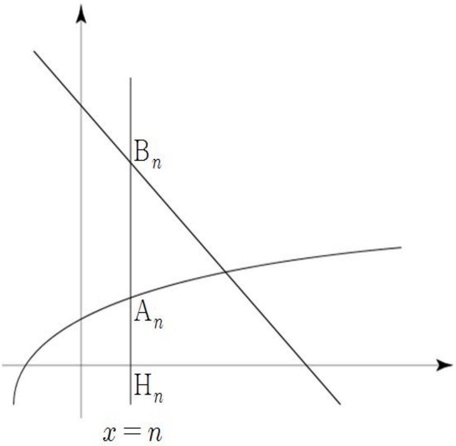
$n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \cdots\ ,27$

8. 우선 주어진 로그함수와 직선은 $x=5$에서 만난다. 따라서 교점은 $(5,\ 3)$이다. 그림을 그려보면.

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때는 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$의 값이 n이 증가할수록 감소한다.

$9<\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}<40$을 만족하는 n의 값은 $n=1,\ 2,\ 3$이다.

(아래 그림 참고)



$n=6,\ 7,\ 8$일 때는 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$의 길이는 증가하지만 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$의 길이는 감소한다.

그러나 $n=6,\ 7,\ 8$일 때는

$9<\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}<40$을 만족하는 n의 값이 없다.(모두 9보다 작다.)

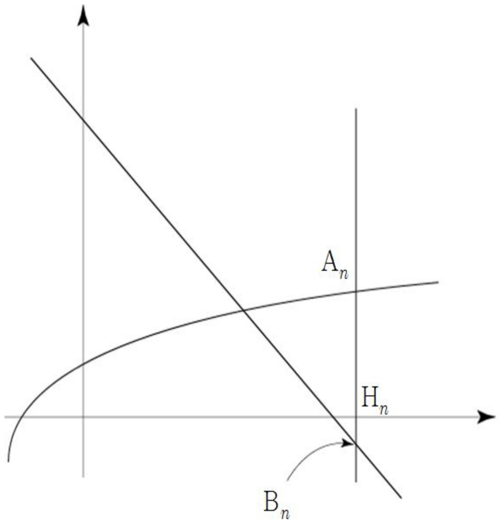
$n>8$일 때는 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$의 값이 n이 증가할수록 증가한다. $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$의 값을 n에 대하여 일반화하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\log_2(n+3)+n-8$이고,

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}=n-8$이다. 이제 $n>8$의 범위에서

$9<\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}<40$를 만족하는 n을 찾아보면 $n=10$부터 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$의 값이 $(\log_2 13+2)\times 2$로 9보다 크다.

(아래 그림 참고)



부등호의 양 변이 정수이므로,

$\overline{A_nB_n} \times \overline{B_nH_n}$가 정수가 되는 n을

찾아보면(정수가 큰 힌트이다) $n=13$일

때, 정수임을 알 수 있고, $n=13$을

넣어보면 $(4+5)\times 5$로 40보다 크다.

그렇다면 $n=12$를 넣어서 40보다

작은지 크기를 비교해보면

$(\log_2 15+4)\times 4 < 40$

$(\log_2 15+4) < 10$ 이므로 부등식을

만족한다.

따라서 $n=10,\ 11,\ 12$

모든 자연수 n의 값은

$n=1,\ 2,\ 3,\ 10,\ 11,\ 12$

따라서 39

9. $\sum_{n=1}^{8}(-1)^n a_n = 12$

이 식을 풀어 쓰면

$(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots$ 이므로

$d+d+\cdots$로 나타낼 수 있고, 따라서

$4d=12$에서 $d=3$이다.

$a_5=a_1+4d$에서 $a_5=10+12=22$

10. 조건 (나)에서 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$이 공비가 3인

등비수열이고, 수열$\{a_n\}$은 공비가 2인

등비수열이므로 수열 $\{b_n\}$도

등비수열이다. 수열 $\{b_n\}$의 공비는

$\frac{3}{2}$이다. 따라서 $b_n=9\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$b_3=4$

11. $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k}+3n^2+n$에서

$S_{2n}-\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{2n-1}$

이다.

(학생들을 가르치다 보면 S_{2n}과 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$을

많이 헷갈려 한다.)

$a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{2n-1}=3n^2+n$

이므로 $a_{2n-1}=6n-2$이다. a_{2n-1}의

공차가 6이므로 a_n의 공차는 3이다.

따라서 $a_n=3n+1$

12. $\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1}=30$에서

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=30$, 그런데

$a_{n+1}=a_n+2n$이므로

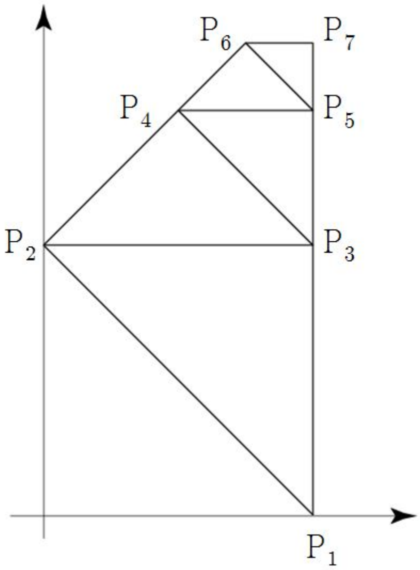
$a_2=a_1+2,\ a_4=a_3+6,\ a_6=a_5+10$

$a_8=a_7+14,\ a_{10}=a_9+18$ 이므로

$\sum_{n=1}^{5} a_{2n}=\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1}+2+6+10+14+18$

$=30+50=80$

13. 규칙에 따라 점 P_n을 나타내 보면 홀수 번 째의 점에서 x좌표가 항상 1임을 알 수 있고, y좌표는 P_{2k+1}일 때 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$이다.



따라서 P_{11}의 좌표는 $\left(1,\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)$이다.

$a=1,\ b=\frac{31}{16}$

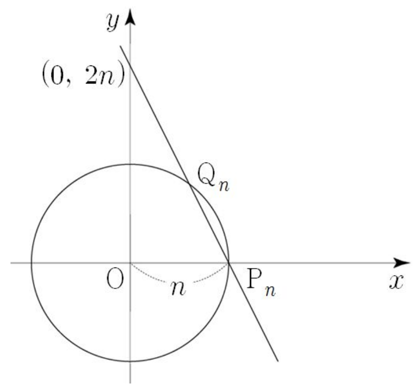
14. $\lim_{n\to\infty}\frac{4S_n-3n^2}{(a_n)^2}=\frac{1}{3}$ 에서 최고차항의 계수만 본다. 따라서 $\frac{4\times\frac{d}{2}-3}{d^2}=\frac{1}{3}$ 이어야 한다. $d=3$ $a_n=3n-2$ $a_5=13$

(왜 S_n을 $\frac{d}{2}$로 두었는지 모르겠으면 필자의 등차수열의 합에 관하여.. 라는 칼럼을 찾아보길 바란다.)

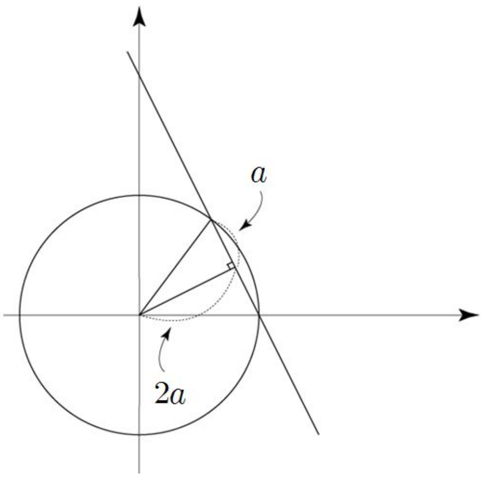
15. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-3^n}{S_n}=\frac{1}{3}$이 식을 자세히 살펴보자. 공비가 3보다 크다면 극한값이 1이 될 것이고 공비가 3보다 작다면 극한값이 존재하지 않을 것이다.(초항이 a, 공비가 r인 등비수열의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$이기 때문이다.)
따라서 공비가 3이다.

$\frac{\frac{a}{2}-1}{\frac{a}{2}}=\frac{1}{3},\ a=3$

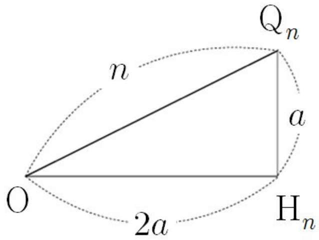
16. 그림과 같이 P_n의 좌표는 $(n,\ 0)$이다.



삼각형 OP_nQ_n의 넓이를 구하기 위해 원점에서 직선에 수선의 발을 내린다. 그 점을 H_n이라 하자. 또 아래 그림과 같이 선분 P_nH_n의 길이를 a라 두면 선분 OH_n의 길이는 $2a$로 둘 수 있다.(점 O와 점 H_n을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이기 때문이다. 이를 설명한 그림이 아래와 같다.



이제 a를 n에 관해 나타내보면
삼각형 $\mathrm{OH}_n\mathrm{Q}_n$에서 피타고라스의
정리를 이용한다.



$n^2 = a^2 + (2a)^2$ 따라서 $n^2 = 5a^2$
구하려는 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이는
밑변이 $2a$이고 높이가 $2a$이므로
$S_n = \frac{1}{2} \times 2a \times 2a = 2a^2 = \frac{2}{5}n^2$

구하려는 값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{100S_n}{n^2} = 40$

17. $g(x) = f(x) + |f(x)|$의 그래프는
$f(x) > 0$일 때는
$g(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$이고
$f(x) < 0$일 때는
$g(x) = f(x) - f(x) = 0$이다.
($f(x) = 0$일 때는 $g(x) = 0$이다.)
따라서 $g(x)$의 불연속점은
$x = -2,\ 1$일 때이다.
이차함수 $h(x)$를 $h(x) = (x+2)(x-1)$로
둘 수 있고, $h(3) = 5 \times 2 = 10$이다.

18. $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{f(x-3)} = 2$의 값을
$\frac{f(3)}{f(0)} = 2$으로 바꿔도 좋다($f(x)$는
$x = 1$에서만 불연속이기 때문이다.)
따라서 $\frac{-9+3a-3}{3} = 2 \quad a = 6$

19. (나)에서 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 2$ 이 $\frac{0}{0}$의
꼴이므로 $g(a) = 0$이다. 또, 사차함수
$f(x)$는 $(x-a)$를 인수로 갖는다. 여기서
$g(x)$가 $(x-a)$만 인수로 가진다면
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 0이 될 것이다.
$f(x)$가 $(x-a)^2$을 인수로 갖기
때문이다. $g(x)$가 $(x-a)$만 인수로
가진다면 분자에 $(x-a)$인수가 하나 더
남아 있으므로 우변이 0이다.
따라서 $g(x)$는 $(x-a)^2$를 인수로
갖는다. $g(x)$의 최고차항의 계수를 k라
하자.

$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2(x-a-2)^2}{k(x-a)^2} = 2$에서
$k = 2$이다. 따라서 $g(x) = 2(x-a)^2$
$g(3) = 18$이므로 $a = 6$

20. $f(x)=x^3+ax^2+2f'(1)x$의 양변을 미분하자. ($f'(0)=0$이라는 정보가 주어졌기 때문이다.)

$f'(x)=3x^2+2ax+2f'(1)$

$f'(0)=f'(1)=0$

따라서

$f'(1)=3+2a+2f'(1)$

$a=-\dfrac{3}{2}$

$f(4)=40$

21. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+5$가 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=4$에서 $f(1)=5$이고,

$f(2)=f(3)=5$에서

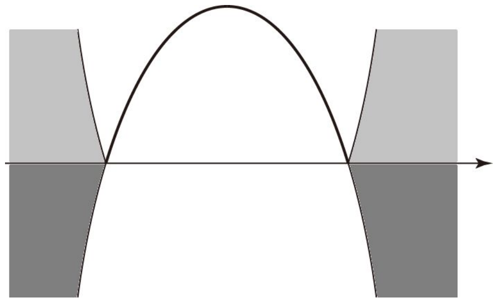
$f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+5$임을 알 수 있다. ($f(1)=f(2)=f(3)=5$이기 때문이다.)

또 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=4$에서 $f'(1)=4$이므로

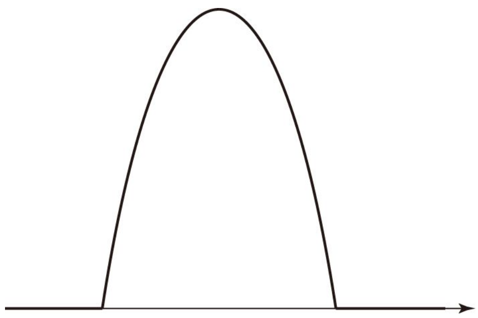
(사실 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)(x-2)(x-3)}{x-1}=4$라고 하는 편이 더 빠르다.)

a의 값을 2로 구할 수 있고 구하려는 $f(-1)$의 값은 -43이다.

22. 우선 (나) 조건부터 살펴보자. 함수 $f(x)$와 함수 $|f(x)|$의 그래프를 겹쳐서 나타내면 다음과 같다.



이 때, 옅게 색칠된 부분($|f(x)|$의 값들)과 진하게 색칠된 부분($f(x)$의 값들)을 서로 더해서 다시 그래프로 나타내면 다음과 같으며, 이 그래프가 $|f(x)|+f(x)$의 그래프이다.



이 때, 오직 구간 (2, 4)에서만 증가하기 위해서는 왼쪽에서 꺾여 올라가는 지점이 $x=2$, 극댓값을 갖는 x좌표가 $x=4$여야 한다.

→ $f(2)=0,\ f'(4)=0$ …… ㉠

$f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, (가) 조건과 ㉠에 의하여

$a=-1,\ b=8,\ c=-12$

→ $f(x)=-x^2+8x-12$ → $f(5)=3$

!!!!

대칭성을 이용하여 $f(x)$가 $x=4$ 대칭임을 이용,

$f(x)=a(x-2)(x-6)$ 로 두어도 좋다.

!!!!

23. $f'(x)=3x^2+6x-9$ 이고
$f'(1)=0$이므로 점 P에서의 접선은
$y=n^2-5$(x축과 평행한 직선)이다.
따라서 이 직선이 함수 $g(x)$와 만나지 않으려면, 함수 $g(x)$의 꼭짓점이 이 직선보다 위에 있어야 한다.
$g(x)=(x-3)^2+6n-10$ 이므로
$6n-10>n^2-5 \rightarrow n^2-6n+5<0$
$\rightarrow (n-1)(n-5)<0 \rightarrow 1<n<5$
$n=2,\ 3,\ 4 \qquad 2+3+4=9$

24. 우선 $f(x)=ax(x-1)(x-b)$에서
$b<0$일 때, $0<b<1$일 때, $b>1$일 때로 나눈다. $b=0,\ 1$일 때는 특수한 상황이여서 (나)조건에 의해 아니란걸 알 수 있다.
또, $b<0$일 때와 $0<b<1$일 때,
(나)의 $\int_t^{t+2} g(x)dx=0$을 만족하는 t의 최솟값의 4이다.를 만족하지 않는다.
따라서 $b>1$일 때의 개형이 그려져야 하고, t의 최솟값이 4이므로 $b=4$가 되어야 한다.
$f(x)=ax(x-1)(x-4)$ $f(5)=5$이므로
$a=\dfrac{1}{4}$ $20(a+b)=85$

25. 1) $0\le x<2$일 때
$\rightarrow -x+2+y+z+w=6$
$\rightarrow -x+y+z+w=4$
$$\begin{cases} x=0 \rightarrow & y+z+w=4 \\ x=1 \rightarrow & y+z+w=5 \end{cases}$$
$\rightarrow {}_{3+4-1}C_4+{}_{3+5-1}C_5=36$
2) $2\le x\le 4$일 때
$\rightarrow x-2+y+z+w=6$
$\rightarrow x+y+z+w=8$
$$\begin{cases} x=2 \rightarrow & y+z+w=6 \\ x=3 \rightarrow & y+z+w=5 \\ x=4 \rightarrow & y+z+w=4 \end{cases}$$
$\rightarrow {}_{3+6-1}C_6+{}_{3+5-1}C_5+{}_{3+4-1}C_4$
$=64$

26. $f(x)$가 우함수이므로 $xf(x)$는 기함수이다. 따라서 $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$
$\rightarrow \int_{-1}^{1}(x+2)f(x)dx=\int_{-1}^{1}2f(x)dx=\dfrac{4}{3}$
$\rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{3}$
이 때, $f(x)$가 우함수이므로
$\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{1}{2} \rightarrow \int_1^2 f(x)dx=\dfrac{1}{6}$
$\therefore\ 30\times\dfrac{1}{6}=5$

27. $G(t)=\mathrm{P}(t\le X\le t+6)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{t-m}{2}\le \dfrac{X-m}{2}\le \dfrac{t+6-m}{2}\right)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{t-m}{2}\le Z\le \dfrac{t+6-m}{2}\right)$
이 때, $\dfrac{t+6-m}{2}-\dfrac{t-m}{2}=\dfrac{6}{2}=3$이다.
따라서 $G(1)$가 최댓값을 가지는 경우는 $\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)$일 때이다.
$\rightarrow m=4 \rightarrow G(t)=\mathrm{P}\left(\dfrac{t-4}{2}\le Z\le \dfrac{t+2}{2}\right)$
$\rightarrow G(0)=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)=0.8185$

28. A부품의 무게에 대한 확률변수를 X, B부품의 무게에 대한 확률변수를 Y라고 할 때,

$\mathrm{P}(X \geq k)+\mathrm{P}(Y \leq k^2)=1$

→ $\mathrm{P}(Z \geq k-10)+\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{k^2-70}{3}\right)=1$

→ $k-10=\dfrac{k^2-70}{3}$ → $k=8$

29. (가) 조건과 (나) 조건에 의하여

$\sigma=2$, $m=14$

→ $\mathrm{P}(12 \leq X \leq 15)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{12-14}{2} \leq \dfrac{X-14}{2} \leq \dfrac{15-14}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 0.5)=0.5328$