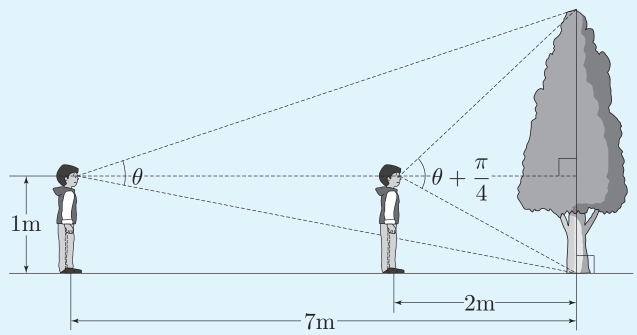
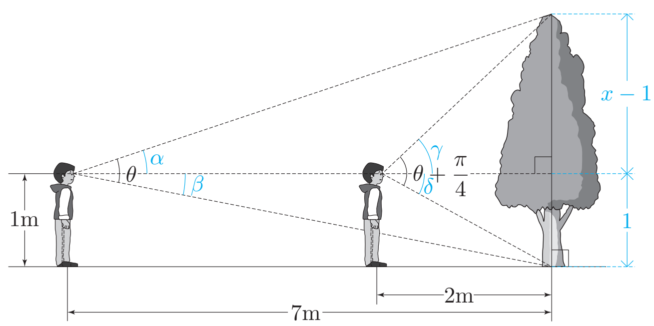
05 [2009학년도 6월 평가원 수리 가형 29번]

눈높이가 $1\mathrm{m}$인 어린이가 나무로부터 $7\mathrm{m}$ 떨어진 지점에서 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 θ이었다. 나무로부터 $2\mathrm{m}$ 떨어진 지점까지 다가가서 나무를 바라보았더니 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 $\theta+\dfrac{\pi}{4}$가 되었다. 나무의 높이는 $a(\mathrm{m})$ 또는 $b(\mathrm{m})$이다. $a+b$의 값은?



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

맑은로직



그림과 같이 나무의 전체 길이를 x라 하고, 두 눈높이 지점을 지나는 직선에 의해 θ와 $\theta+\dfrac{\pi}{4}$가 나뉘는 각을 각각 α, β, γ, δ라 하면 다음이 성립합니다.

$$\tan\alpha=\frac{x-1}{7},\quad \tan\beta=\frac{1}{7},\quad \tan\gamma=\frac{x-1}{2},\quad \tan\delta=\frac{1}{2}$$

$\alpha+\beta=\theta$, $\gamma+\delta=\theta+\frac{\pi}{4}$ 이므로 다음이 성립합니다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{x-1}{7}+\frac{1}{7}}{1-\frac{x-1}{7}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{7x}{50-x}=\tan\theta$$

$$\tan(\gamma+\delta)=\frac{\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{x-1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2x}{5-x}=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로 다음이 성립합니다.

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\frac{2x}{5-x}-\frac{7x}{50-x}}{1+\frac{2x}{5-x}\cdot\frac{7x}{50-x}}=1$$

이 방정식을 풀기 위해 분모와 분자에 $(50-x)(5-x)$를 곱하고 정리하면 다음과 같습니다.

$$2x(50-x)-7x(5-x)=(50-x)(5-x)+14x^2$$

$$x(100-2x-35+7x)=250-55x+15x^2$$

$$x(13+x)=50-11x+3x^2$$

$$x^2-12x+25=0$$

따라서 이 이차방정식의 두 실근의 합이 $a+b$이므로 $a+b=-\frac{-12}{1}=12$입니다.

정답 : ①

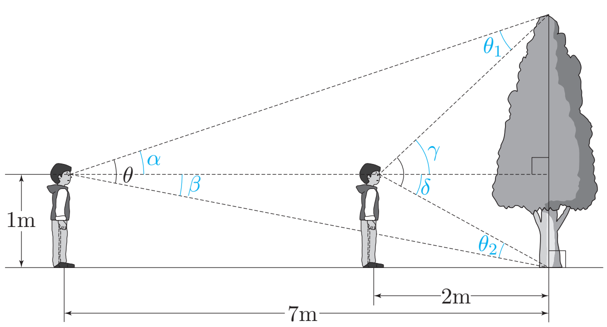
깊은로직 1 : 좀 더 세련된 풀이[31)]

31) 이 풀이는 꿀탐의 박영빈님이 제안하신 풀이입니다.

맑은로직에서 상황을 자세히 관찰하여 고정된 값과 고정되지 않은 값을 파악하면 계산이 훨씬 간결해집니다.

문제에서 β와 δ를 나타내는 삼각형은 모든 변의 길이가 상수로 나타납니다. 따라서 β와 δ는 고정된 값입니다. 따라서 높이값이 a 또는 b라는 것은 β와 δ 때문이 아니라, γ가 두 값을 가질 수 있고[32)] 그에 따라 높이값이 달라지는 것임을 알 수 있습니다.

32) α가 두 값을 가진다고 생각해도 됩니다. 즉 순서쌍 $(\alpha,\ \gamma)$가 두 개인 셈입니다.



33) 여기서 θ_1 또한 고정된 값임을 알 수 있습니다.

이때 $\gamma-\alpha=\theta_1$, $\delta-\beta=\theta_2$라 하면 θ_1과 θ_2는 그림과 같이 표시되고, $\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$입니다. 이제 θ_2, θ_1에 대한 탄젠트값을 차례로 구하면 다음과 같습니다.[33]

$$\tan\theta_2=\tan(\delta-\beta)=\frac{\tan\delta-\tan\beta}{1+\tan\delta\tan\beta}=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}}{1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{7}}=\frac{1}{3}$$

$$\tan\theta_1=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta_2\right)=\frac{1-\tan\theta_2}{1+1\cdot\tan\theta_2}=\frac{1-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

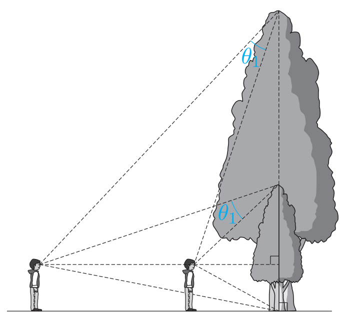
이제 $x-1=t$라 두고 $\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}=\tan(\gamma-\alpha)$임을 이용하면 다음의 식을 얻습니다.

$$\frac{1}{2}=\frac{\dfrac{t}{2}-\dfrac{t}{7}}{1+\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{t}{7}}=\frac{5t}{14+t^2}$$

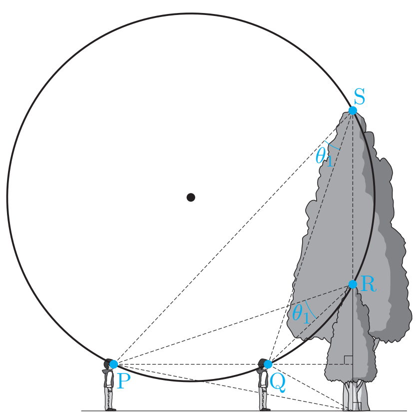
따라서 $14+t^2=10t$에서 두 근인 $a-1$과 $b-1$의 합이 10이므로 $(a-1)+(b-1)=10$에서 $a+b=12$를 얻습니다.

34) **이 풀이는 꿀팁의 박영빈님이 제안하신 풀이입니다.**

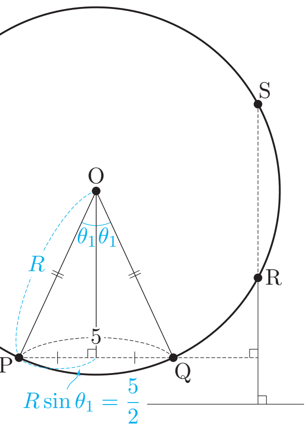
깊은로직 2 : 높이값이 두 개라는 점에 주목하면 숨겨진 원주각이 나온다[34]



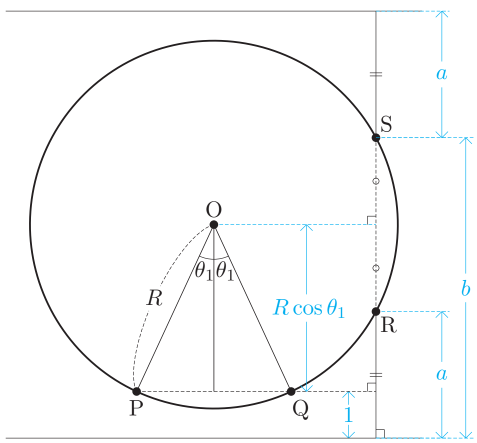
깊은로직 1에서 구한 바에 따르면 θ_1은 상수입니다. 그러면 문제에서 주어진 상황은 그림과 같이 높이가 다른 두 나무에 대하여 θ_1이 일정한 상황임을 알 수 있습니다.



이는 그림과 같이 어린이의 두 눈 P, Q와 나무의 두 꼭대기 R, S를 지나는 원에 대하여 $\angle PRQ = \angle PSQ = \theta_1$ 인 상황으로 해석할 수 있습니다. [35)]



그러면 이 원의 중심을 O 반지름을 R라 할 때, 삼각형 POQ는 이등변삼각형이고 $\angle POQ = 2\theta_1$ 이므로 $R\sin\theta_1 = \dfrac{5}{2}$ 에서 $R = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ 를 얻습니다.[36)]



이때 그림과 같이 $a+b = 2(1 + R\cos\theta_1)$ 이므로 이를 계산하면 $2\left(1 + \dfrac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = 12$ 입니다.

36) 깊은로직 1에서 $\tan\theta_1 = \dfrac{1}{2}$ 임을 알았으므로 밑변이 2, 높이가 1인 직각삼각형을 그리면 빗변이 $\sqrt{5}$ 입니다. 따라서 $\sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 임을 쉽게 알 수 있습니다.

여담 : 삼각함수 최고난도 문항 / 다시 등장한 원주각

삼각함수 기본 문제 중으로는 최고난도로 출제되었던, 전무후무한 난이도를 자랑하는 문제입니다. 그러나 풀이 과정에서 특별한 개념이 쓰이는 것은 전혀 없을 정도로 기본적인 개념만을 묻고 있습니다. 그리고 그 이면에는 '숨겨진 원주각'이 또 등장한다는 점에서, 같은 주제임에도 점점 심화되는 기출의 역사를 느낄 수 있습니다.

02 [2015학년도 9월 평가원 수학 B형 30번]

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

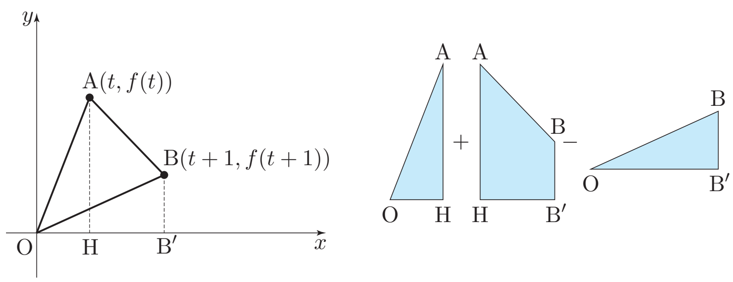
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.

(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

맑은로직

발문의 첫 문장과 (가) 조건에 따르면 함수 $f(x)$가 양의 실수 전체 집합에서 감소하고 $f(x)>0$이므로 두 점 $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 좌표평면에 나타내면 다음과 같습니다.



이제 (나) 조건을 이용하기 위해 세 점 $(0,\ 0)$ $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 각각 O, A, B라 하겠습니다. 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있습니다.

$$\square\mathrm{AOB'B}=\triangle\mathrm{AOB}+\triangle\mathrm{BOB'}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \triangle\mathrm{AOB}&=\square\mathrm{AOB'B}-\triangle\mathrm{BOB'}\\&=\triangle\mathrm{AOH}+\square\mathrm{AHB'B}-\triangle\mathrm{BOB'}\\&=\frac{tf(t)}{2}+\frac{1}{2}\{f(t+1)+f(t)\}-\frac{(t+1)f(t+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}\{(t+1)f(t)-tf(t+1)\}\end{aligned}$$

(나) 조건에 따르면 이 값이 $\dfrac{t+1}{t}$이므로 $\dfrac{1}{2}\{(t+1)f(t)-tf(t+1)\}=\dfrac{t+1}{t}$입니다. t는 t끼리, $t+1$은 $t+1$끼리 모이도록 하기 위해 양변에 $\dfrac{2}{t(t+1)}$를 곱하면 $\dfrac{f(t+1)}{t+1}-\dfrac{f(t)}{t}=$

$-\dfrac{2}{t^2}$ 입니다.

이제 (다) 조건인 $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx$를 이용하기 위해 양변에 $\displaystyle\int_1^x$를 취하면 다음과 같습니다.[21)]

$$
\begin{aligned}
(\text{좌변}) &= \int_1^x \left\{\frac{f(t+1)}{t+1} - \frac{f(t)}{t}\right\} dt & \quad (\text{우변}) &= \int_1^x \left(-\frac{2}{t^2}\right) dt \\
&= \int_1^x \frac{f(t+1)}{t+1}dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt & &= \left[\frac{2}{t}\right]_1^x \\
&= \int_2^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt - \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt & &= \frac{2}{x} - 2 \\
&= \left\{\int_1^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt - \int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt\right\} - \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt & &= \frac{2}{x} - 2 \\
&= \int_x^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt - 2 & &= \frac{2}{x} - 2
\end{aligned}
$$

따라서 $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt = \frac{2}{x}$입니다. 이를 이용하여 $\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx$를 구하면 다음과 같습니다.

$$
\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx = \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{f(x)}{x}dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{4}{7} + \frac{4}{9} = \frac{64}{63}
$$

따라서 $p+q=127$입니다.

정답 : 127

21) 정적분을 취하기 전에 $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx$가 나온다는 걸 미리 예상할 수 있다면 베스트겠지만, 보이지 않았더라도 일단은 (다) 조건을 어떻게든 이용하기 위해서 밑을 1로 두고 정적분을 시도해볼 수는 있을 것입니다.

깊은로직 1 : 부정적분으로 해석하기

부정적분을 이용하여 주어진 조건을 해석할 수도 있습니다. $\displaystyle\int \frac{f(x)}{x}dx = F(x) + C$ (단, C는 적분상수)라 두면 (다) 조건을 $F(2) - F(1) = 2$라 해석할 수 있습니다. 한편 $\dfrac{f(t+1)}{t+1} - \dfrac{f(t)}{t} = -\dfrac{2}{t^2}$의 양변을 부정적분하면 $F(t+1) - F(t) = \dfrac{2}{t} + C$ (단, C는 적분상수)를 얻습니다. 이때 $t=1$을 대입하면 $C=0$을 얻습니다. 이 이후의 풀이는 맑은로직과 같습니다.

22) 이 풀이는 박종현님이 제안하신 풀이입니다.

깊은로직 2 : 사실은 (다) 없이도 풀 수 있는 문제?[22)]

주어진 조건을 잘 활용하면 (다) 조건 없이도 문제를 풀 수 있습니다. $\dfrac{f(x)}{x} = g(x)$라 하면 g는 $(1,\ \infty)$에서 감소하면서 0으로 수렴하는 함수입니다.

g가 구간 $(1,\ \infty)$에서 감소함을 규명하기

f가 감소함수이므로 $1 < a < b$이면 $f(a) > f(b)$가 성립합니다. g가 감소함수임을 보이기 위해서는 $\dfrac{f(a)}{a} > \dfrac{f(b)}{b}$가 성립함을 보이면 됩니다.

$f(a) > f(b)$의 양변을 a로 나누면 $\dfrac{f(a)}{a} > \dfrac{f(b)}{a} \cdots$ ①이 성립합니다. 그러면 $\dfrac{f(b)}{a}$가 $\dfrac{f(b)}{b}$보다 큼을 보이면 원하는 바를 얻을 수 있을 것입니다.

한편 $1 < a < b$이므로 $1 > \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$이 성립합니다. 이 식의 각 변에 $f(b)$를 곱하면 $\dfrac{f(b)}{a} > \dfrac{f(b)}{b} \cdots$ ②를 얻습니다.

따라서 ①과 ②를 종합하면 $\dfrac{f(a)}{a} > \dfrac{f(b)}{a} > \dfrac{f(b)}{b}$이므로 $\dfrac{f(a)}{a} > \dfrac{f(b)}{b}$가 성립합니다. 따라서 g는 감소함수입니다.

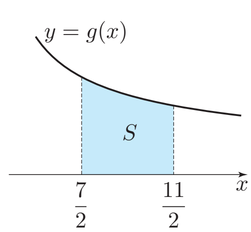
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$임을 규명하기

$x > 0$에서 $0 < f(x) < f(1)$이므로 양변을 x로 나누고 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}$를 취하면 다음과 같습니다.

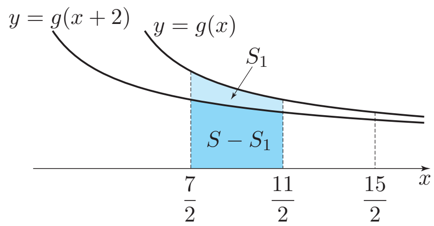
$$\lim_{x\to\infty} 0 \le \lim_{x\to\infty} g(x) \le \lim_{x\to\infty} \frac{f(1)}{x}$$

$$0 \le \lim_{x\to\infty} g(x) \le 0$$

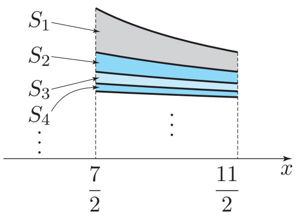
따라서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$입니다.



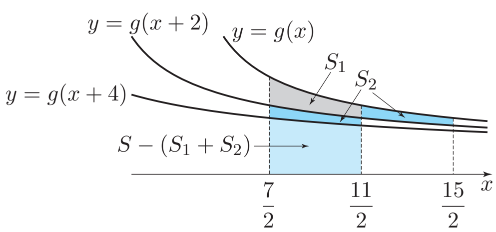
이때 구하는 값은 $\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)\,dx$인데, 이를 그래프로 나타내면 그림과 같으며, 구하는 값은 색칠된 영역의 넓이와 같습니다. 이를 S라 하겠습니다.



이때 $y=g(x)$를 x축 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프인 $y=g(x+2)$의 그래프를 생각하면, 색칠된 영역은 $x=\frac{7}{2}$, $x=\frac{11}{2}$, $y=g(x)$, $y=g(x+2)$로 둘러싸인 영역의 넓이 S_1과 $x=\frac{7}{2}$, $x=\frac{11}{2}$, $y=g(x+2)$, x축으로 둘러싸인 영역의 넓이 $S-S_1$으로 나눌 수 있습니다.

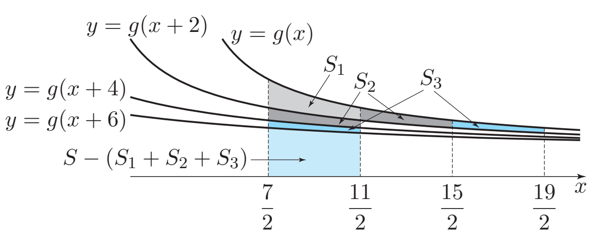


이 $S-S_1$을 동일한 방법으로 $y=g(x+4)$를 생각하여 영역을 분할하면 $S=S_1+S_2+\{S-(S_1+S_2)\}$로 분할할 수 있습니다. 이를 무한히 반복하면 $S=S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots$, 즉 $S=\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 입니다.



이때 $S_1=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\{g(x)-g(x+2)\}\,dx$이고, $S_2=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\{g(x+2)-g(x+4)\}\,dx$인데,

평행이동에 의해 $S_2=\int_{\frac{11}{2}}^{\frac{15}{2}}\{g(x)-g(x+2)\}\,dx$ 입니다.



마찬가지로 S_3도 $S_3=\int_{\frac{15}{2}}^{\frac{19}{2}}\{g(x)-g(x+2)\}\,dx$입니다. 이를 일반화하고 S_n의 식을 구하고 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$을 계산하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
S_n&=\int_{\frac{4n+3}{2}}^{\frac{4n+7}{2}}\{g(x)-g(x+2)\}\,dx\\
&=\int_{\frac{4n+3}{2}}^{\frac{4n+7}{2}}\{g(x)-g(x+1)+g(x+1)-g(x+2)\}\,dx\\
&=\int_{\frac{4n+3}{2}}^{\frac{4n+7}{2}}\{g(x)-g(x+1)\}\,dx+\int_{\frac{4n+3}{2}}^{\frac{4n+7}{2}}\{g(x+1)-g(x+2)\}\,dx\\
&=\int_{\frac{4n+3}{2}}^{\frac{4n+7}{2}}\frac{2}{x^2}dx+\int_{\frac{4n+3}{2}}^{\frac{4n+7}{2}}\frac{2}{(x+1)^2}dx\\
&=\left[-\frac{2}{x}\right]_{\frac{4n+3}{2}}^{\frac{4n+7}{2}}+\left[-\frac{2}{x+1}\right]_{\frac{4n+3}{2}}^{\frac{4n+7}{2}}\\
&=4\left\{\left(\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+7}\right)+\left(\frac{1}{4n+5}-\frac{1}{4n+9}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[4\left\{\left(\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{4k+7}\right)+\left(\frac{1}{4k+5}-\frac{1}{4k+9}\right)\right\}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[4\left\{\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4n+7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4n+9}\right)\right\}\right]=\frac{64}{63}
\end{aligned}$$

03 [2015학년도 수능 수학 B형 30번]

함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

03 [2017학년도 6월 평가원 수학 가형 30번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 a $(0 < a < 2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) = f(-x)$

(나) $\displaystyle\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여 $f(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$일 때 $abc = -\frac{q}{p}\pi$이다. $p + q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

맑은로직

(가) 조건에서 f가 짝함수임을 알 수 있고, 발문에서 f가 미분가능한 함수라 하였으므로 f'이 존재하며, 이를 (가)와 엮어 생각하면 f'은 홀함수임을 알 수 있습니다.

(나) 조건은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 넣어도 항상 성립합니다. 좌변과 우변이 같으므로 좌변의 도함수와 우변의 도함수도 같으며, 이에 근거하여 양변을 미분하면 $f(x+a) - f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdots$①을 얻고, 이는 x에 대한 항등식입니다. 이때 좌변과 우변이 모두 미분가능하므로 좌변의 도함수와 우변의 도함수도 같으며, 이에 근거하여 양변을 미분하면 $f'(x+a) - f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdots$②을 얻고, 이 또한 x에 대한 항등식입니다.

이제 a, b, c의 값을 구해봅시다. 발문에 따르면 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$라 하였고 (가) 조건에서 f가 짝함수라 하였으므로 $\left[-\frac{a}{2},\ 0\right]$에서 $f(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$입니다. 이때 f가 짝함수이고 f'이 홀함수이므로 다음이 성립합니다.

$$\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{k} f(x)\,dx$$

$$f(-k) = f(k)$$

$$f'(-k) = -f'(k)$$

이를 이용하려면 다음과 같이 (나), ①, ②에 $x = -\frac{a}{2}$를 대입하면 됩니다.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx = \sin\left(-\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) - f\left(-\frac{a}{2}\right) = 0 = \cos\left(-\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'\left(\frac{a}{2}\right) - f'\left(-\frac{a}{2}\right) = 2f'\left(\frac{a}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

이 중에서 두번째 식이 제일 간단하므로 두번째 식을 먼저 계산하면 다음과 같습니다.

$$0 = \cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore -\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3} = \cdots,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \cdots$$

이들 중에서 $0 < a < 2\pi$ 인 경우는 $-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$ 뿐입니다. 따라서 $a = \frac{5}{3}\pi$ 입니다. 이제 이를 이용하여 첫번째 식과 세번째 식을 계산하면 다음과 같습니다.

$$\left(\frac{b}{3}+\frac{c}{10}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

위쪽 식에 $a = \frac{5}{3}\pi$ 를 대입하면 우변의 값이 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{3}b+\frac{1}{10}c = -\frac{1}{2}\cdots$③입니다. 그리고 아래쪽 식에 $a = \frac{5}{3}\pi$ 를 대입하면 우변의 값이 $\frac{1}{2}$ 입니다. 좌변은 f 의 $x = \frac{a}{2}$ 에서의 왼쪽 기울기, 즉 $x = \frac{5}{6}\pi$ 에서의 왼쪽 기울기와 같으므로 $-3b\sin(3x) - 5c\sin(5x)$ 에 $x = \frac{5}{6}\pi$ 를 대입한 값과 같습니다. 따라서 $-3b - \frac{5}{2}c = \frac{1}{2}\cdots$④입니다.

③과 ④를 연립하면 $b = -\frac{9}{4}$, $c = \frac{5}{2}$ 를 얻습니다. 따라서 $abc = \left(\frac{5}{3}\pi\right)\times\left(-\frac{9}{4}\right)\times\frac{5}{2} = -\frac{75}{8}\pi$ 입니다. 따라서 $p+q = 83$ 입니다.

정답 : 83

깊은로직 : a를 구하는 방법들과 그 사고과정

(나)를 미분한 식에 $x = -\frac{a}{2}$ 를 대입하여 f 의 대칭성 활용하기

맑은로직에서 활용한 방법입니다. $x = \frac{a}{2}$ 는 문제에서 f 의 함수식이 직접적으로 주어진 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$ 의 오른쪽 끝이고, $x = -\frac{a}{2}$ 는 f 가 짝함수라는 조건을 통해 함수식이 간접적으로 주어진 구간 $\left[-\frac{a}{2},\ 0\right]$ 의 왼쪽 끝입니다. 즉 우리가 f 의 함수식을 아는 구간은 $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$ 인 상황입니다. 이때 f 가 짝함수이므로 $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$ 를 이용하는 것은 문제에 주어진 여러 조건들[32]을 잘 조합하여 풀이한 것입니다.

32) 함수식 조건과 짝함수 조건과 (나) 조건

(나) 조건에 $x = 0$ 과 $x = -a$ 을 대입하여 f 의 대칭성 활용하기

f 가 짝함수이므로 $\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$ 가 성립함을 이용할 수도 있습니다. 그러면 $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)$ 에서 $a = \frac{5}{3}\pi$ 를 얻습니다. 이 또한 f 의 대칭성과 (나) 조건을 잘 조합하여 풀이한 것입니다.

여담 1 : f를 교육과정 내의 방법으로는 구할 수 없지만, 교과 외 공식으로 구할 수는 있다

맑은로직에서는 f의 전체 함수식을 구하지 않고 문제에 주어진 닫힌 구간만을 이용했습니다. f의 함수식을 구하려면 제법 정교한 식 변형이 필요합니다. 문제는 이 식 변형을 하기 위해서는 교육과정에서 빠진 삼각함수 공식[33]을 이용해야 하고, 그 이후의 식 변형도 만만치가 않습니다.

여러분께 교과외 공식과 그 공식을 식 변형에 접목하는 사고과정을 소개하는 것은 별 의미가 없어 방법만 알려드리자면, $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x-\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$ 임을 이용하면 됩니다.[34] 이 이후의 과정은 교육과정 내의 내용만을 이용합니다.

$\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$라 할 때 (나) 조건을 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$F\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-F(x)=\sin x-\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$F\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)=F(x)+\sin x$$

이때 $h(x)=F(x)+\sin x$라 하면 $h\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)=h(x)$이므로, h의 그래프는 $\frac{5}{3}\pi$마다 같은 모양이 반복됩니다. 따라서 주기가 $\frac{5}{3}\pi$인 주기함수일 가능성이 있습니다.[35] 이때 F와 $\sin x$가 홀함수이므로 h도 홀함수인데, 그러면 $\left[-\frac{5}{6}\pi,\ 0\right]$에서의 그래프와 $\left[0,\ \frac{5}{6}\pi\right]$의 그래프가 서로 원점에 대하여 대칭이므로 주기가 $\frac{5}{3}\pi$보다 작을 수는 없습니다. 따라서 h는 주기가 $\frac{5}{3}\pi$인 주기함수입니다.

양변을 미분하면 $h'(x)=f(x)+\cos x$이고, 이 식에서 우변이 미분가능하므로 좌변도 미분가능합니다. 따라서 양변을 한 번 더 미분하면 $h''(x)=f'(x)-\sin x$입니다. 이제 $h\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=h\left(\frac{5}{6}\pi\right)$와 $h''\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=h''\left(\frac{5}{6}\pi\right)$를 이용하면 맑은로직의 ③과 ④의 식을 얻어 b와 c의 값을 확정지어 답을 구할 수 있습니다.

그런데 h는 구했지만 아직 f는 구하지 못했으니, 이제 f를 구하기 위해 h'의 주기성을 이용해봅시다. 닫힌구간 $\left[-\frac{5}{6}\pi,\ \frac{5}{6}\pi\right]$에서 $h'(x)=-\frac{9}{4}\cos(3x)+\frac{5}{2}\cos(5x)+\cos x$이고, 정수 n에 대하여 이 그래프를 x축 방향으로 $\frac{5n}{3}\pi$만큼 평행이동한 그래프가 h'의 그래프이므로 닫힌구간 $\left[\frac{5(2n-1)}{6}\pi,\ \frac{5(2n+1)}{6}\pi\right]$에서 h'의 함수식은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}h'(x)&=-\frac{9}{4}\cos(3x-5n\pi)+\frac{5}{2}\cos\left(5x-\frac{25n}{3}\pi\right)+\cos\left(x-\frac{5n}{3}\pi\right)\\&=(-1)^{n+1}\times\frac{9}{4}\cos(3x)+\frac{5}{2}\cos\left(5x-\frac{n}{3}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{n}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

33) 2016학년도까지는 교육과정 내의 공식이었으나, 2017학년도부터는 아닙니다.

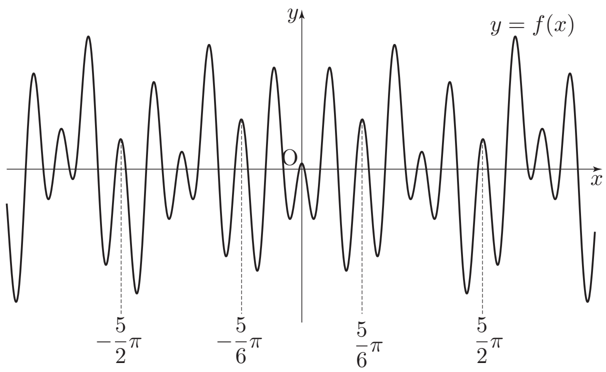
34) 등식이 성립한다는 것은 덧셈정리를 이용하여 좌변과 우변의 값이 같음을 통해 확인할 수 있습니다.

35) $\frac{5}{3}\pi$보다 작은 양수 p가 $h(x+p)=h(x)$를 만족할 가능성을 배제하지 않은 것입니다.

이때 $h'(x) = f(x) + \cos x$이므로, 정수 n에 대하여 $\left[\frac{5(2n-1)}{6}\pi, \frac{5(2n+1)}{6}\pi\right]$에서 $f(x)$의 함수식은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} f(x) &= h'(x) - \cos x \\ &= (-1)^{n+1} \times \frac{9}{4}\cos(3x) + \frac{5}{2}\cos\left(5x - \frac{n}{3}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{n}{3}\pi\right) - \cos x \end{aligned}$$

이를 이용하여 f의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



04 [2017학년도 9월 평가원 수학 가형 30번]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = |2\sin(x + 2|x|) + 1|$$

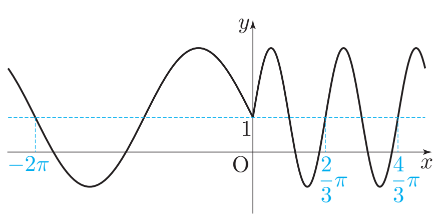
에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오.

맑은로직

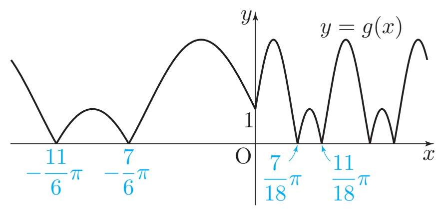
문제의 조건에 따르면 실수 전체의 집합에서 h의 이계도함수가 존재하므로 h''은 실수 전체의 집합에서 정의됩니다.[36] 이는 '도함수가 h''인 함수'인 h'가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 의미합니다. 또한 h'이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 h'은 실수 전체의 집합에서 연속입니다.

$h = f(g(x))$이므로 앞서 주어진 h'과 h''에 대한 조건을 활용하기 위해서는 우선 f와 g에 대해서 분석해야 합니다. 이때 f는 사차함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능한데 반해, g는 절댓값으로 인해 미분가능하지 않은 점이 존재하는 함수로 강하게 의심됩니다. 따라서 g를 먼저 분석해보겠습니다. 이때 g의 함수식에는 절댓값이 두 번 취해져 있으므로, 먼저 함수 $y = 2\sin(x + 2|x|) + 1$의 그래프를 그린 후 그 그래프에 절댓값을 씌워 g의 그래프를 그리겠습니다.

36) 또한 문제의 조건에 따르면 h''은 실수 전체의 집합에서 연속이기도 합니다. 풀이의 흐름 상 나중에 활용되므로 주석으로 언급합니다.



$2\sin(x+2|x|)+1 = \begin{cases} 2\sin(3x)+1 & (x \ge 0) \\ -2\sin x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 이므로 이 함수의 그래프는 위 그림과 같습니다.



따라서 $y=g(x)$의 그래프는 위 그림과 같습니다. 이로부터 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점, 즉 $g'(k)$가 정의되지 않는 실수 k가 존재함[37)]을 알 수 있고, 이러한 실수 k는 다음과 같이 두 가지 유형으로 분류할 수 있습니다.

37) 이는 '도함수 $g'(x)$'라는 표현을 쓸 수 없고 오직 '미분계수 $g'(x)$'라는 표현만 가능함을 의미합니다.

① $g(k)=0$인 모든 실수 k

이때 $x=k$에서 $y=g(x)$의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기는 절댓값은 같고 부호만 다릅니다.

② $k=0$

이때 $x=0$에서 $y=g(x)$의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기는 절댓값도 다르고 부호도 다릅니다.

분석한 내용을 토대로 h에 대한 조건을 활용해봅시다. $h(x)=f(g(x))$이고, f는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, g는 일부 미분가능하지 않은 지점 (①, ②)을 제외한 곳에서 전부 미분가능합니다. 따라서 미분가능하지 않은 점을 제외한 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$입니다. 마찬가지로 두 번 미분가능하지 않은 점을 제외한 모든 실수 x에 대하여 $h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$입니다.

문제의 조건에서 h'이 연속이므로 $\lim_{x\to k} h'(x) = \lim_{x\to k} f'(g(x))g'(x)$가 존재해야 하며, 그 값이 곧 $h'(k)$입니다. 이때 $g'(x)$가 $x=k$에서 좌극한과 우극한이 각각 존재하지만 부호가 달라서 $\lim_{x\to k} g'(x)$는 존재하지 않는 상황이므로, $\lim_{x\to k} f'(g(x))=0$이어야 합니다. 따라서 $g(x)$는 연속함수이므로 연속함수의 합성에 의해 $\lim_{x\to k} f'(g(x)) = f'(g(k))=0$입니다. 따라서 $f'(0)=0,\ f'(1)=0$입니다.

문제의 조건에서 h''이 연속이므로 $h''(x)=f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$는 연속함수입니다. 덧셈으로 이어진 각각의 극한 $\lim_{x\to k} f''(g(x))\{g'(x)\}^2$와 $\lim_{x\to k} f'(g(x))g''(x)$을 보면, 후자에서 $\lim_{x\to k} f'(g(x))=0$이므로 ①이든 ②이든 관계없이 $\lim_{x\to k} f'(g(x))g''(x)$가 존재하며 그 값이 0임을 알 수 있습니다. 따라서 따라서 전자도 수렴해야 h''이 연속이라는 조건을 만족할 수 있습니다.

이제 전자가 수렴함을 이용하여 새로운 정보를 얻어봅시다. $\lim_{x\to k}\{g'(x)\}^2$가 존재하지 않는 $x=k$에서 $f''(g(k))=0$입니다. 이를 ①과 ②에 대하여 각각 살펴보겠습니다.

① $\lim_{x \to k} g'(x)$가 존재하지 않지만, 좌극한과 우극한이 부호만 다르고 절댓값은 같으므로 $\lim_{x \to k} \{g'(x)\}^2$가 존재합니다. 따라서 ①의 경우 이미 $\lim_{x \to k} f''(g(x))\{g'(x)\}^2$가 존재하므로, 얻을 수 있는 추가적인 정보는 없습니다.

② $\lim_{x \to k} g'(x)$가 존재하지 않고, 좌극한과 우극한이 부호도 다르고 절댓값도 다르므로 $\lim_{x \to k} \{g'(x)\}^2$가 존재하지 않습니다. 따라서 $\lim_{x \to k} f''(g(x)) = f''(g(k)) = 0$입니다. 이때 $k=0$, $g(k)=1$이므로 $f''(1)=0$입니다.

$f'(0) = f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$이고 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $f'(x) = 4x(x-1)^2$입니다. 따라서 $f'(3) = 48$입니다.

정답 : 48

여담 : 풀이의 모호한 부분 보완하기

맑은로직에서는 약간 모호한 부분이 있습니다. 처음에 g를 분석할 때 ①, ②에서 알아낸 정보는 g의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기에 관한 내용(부호는 다르고, 절댓값은 같은지 다른지)이었습니다. 그런데 이를 h''의 연속성에 활용할 때에는 이를 논리적 근거 없이 $x=k$ 좌우에서의 g'의 부호로 바꿔서 사용한 부분이 모호한 것이죠.

물론 실제로 뒤의 진술이 틀린 것은 아닙니다. 다만 뒤의 진술을 뒷받침하려면 '왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기'를 근거로 대어서는 안됩니다. 대신 g의 함수식을 통해 g'을 직접 구하고, 함수식을 이용하여 좌극한과 우극한을 규명해야 합니다. 그러면 실제로 $\lim_{x \to k-} g'(x) =$ (왼쪽 기울기), $\lim_{x \to k+} g'(x) =$ (오른쪽 기울기) 임을 확인할 수 있으므로 풀이가 정당화됩니다.

맑은로직보다 더 맑은로직

해석하면서 자연스럽게 얻었던 조건인 '왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기' 정보를 활용하여 풀이해보겠습니다. 핵심 조건인 'h와 h'가 $x=k$에서 미분가능하다'를 다음과 같이 수식으로 나타낼 수 있습니다.

$$\lim_{x \to k} \frac{h(x) - h(k)}{x-k} = h'(k), \qquad \lim_{x \to k} \frac{h'(x) - h'(k)}{x-k} = h''(k)$$

이를 그대로 이용하여 풀이해보겠습니다. 먼저 윗식을 풀이하면 다음과 같습니다.[38)]

$$\begin{aligned} \lim_{x \to k} \frac{h(x) - h(k)}{x-k} &= \lim_{x \to k} \frac{f(g(x)) - f(g(k))}{x-k} \\ &= \lim_{x \to k} \left\{ \frac{f(g(x)) - f(g(k))}{g(x) - g(k)} \times \frac{g(x) - g(k)}{x-k} \right\} \end{aligned}$$

이때 $\lim_{x \to k} \frac{f(g(x)) - f(g(k))}{g(x) - g(k)} = f'(g(k))$이고, $\lim_{x \to k} \frac{g(x) - g(k)}{x-k}$는 존재하지 않지만 좌극한과 우극한은 각각 존재하므로 전체의 극한이 수렴하려면 $f'(g(k)) = 0$이면 됩니다. 따라서 $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$을 얻습니다. 그리고 $h'(k) = 0$을 얻습니다.

38) 이는 합성함수의 미분법 유도과정과 정확히 일치합니다.

다음으로 아랫식을 풀이하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k}\frac{h'(x)-h'(k)}{x-k}&=\lim_{x\to k}\frac{f'(g(x))\,g'(x)}{x-k}\quad(\because h'(k)=0)\\&=\lim_{x\to k}\frac{\{f'(g(x))-f'(g(k))\}\,g'(x)}{x-k}\quad(\because f'(g(k))=0)\\&=\lim_{x\to k}\left\{\frac{f'(g(x))-f'(g(k))}{g(x)-g(k)}\times\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times g'(x)\right\}\end{aligned}$$

이때 ①인 경우 좌극한은 $f''(g(k))\times$(왼쪽 기울기)^2, 우극한은 $f''(g(k))\times$(오른쪽 기울기)^2 입니다. ①에서는 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 부호만 다르고 절댓값은 같습니다. 따라서 $f''(g(k))$의 값에 관계없이 좌극한과 우극한이 같으므로 ①일 때에는 항상 $h''(k)$가 존재하게 되어 추가적인 정보를 얻지 못합니다. 반면 ②인 경우에는 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 부호도 다르고 절댓값도 다르므로 좌극한과 우극한이 같기 위해서는 $f''(g(k))=0$이어야 합니다. 따라서 $f''(g(k))=f''(1)=0$을 얻습니다.

여담 : h''의 연속성은 사족 조건이고, 없이 푸는게 더 낫다

다 풀고 나니 알 수 있는 것이 두 가지 있습니다. 하나는 h''의 연속성 조건이 없어도 문제를 풀 수 있다는 것이고, 나머지 하나는 연속성 풀이보다는 미분가능성 풀이가 훨씬 더 간결하다는 것입니다. 이 둘을 종합하면, 아마도 평가원이 굳이 연속성 조건을 준 것은 '미분가능성을 이용하여 간결하고 정확하게 푸는 것'을 의도하면서도, 그렇게 풀지 못한 학생은 h', h''의 연속성을 이용해서라도 어떻게든 풀 수 있도록 배려해준 것으로 조심스럽게 추측할 수 있습니다.

12 [2018학년도 수능 수학 가형 21번]

양수 t에 대하여 구간 $[1,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (1\le x<e)\\ -t+\ln x & (x\ge e)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

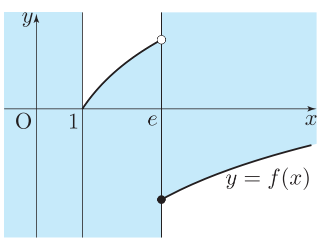
1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\}\ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다.

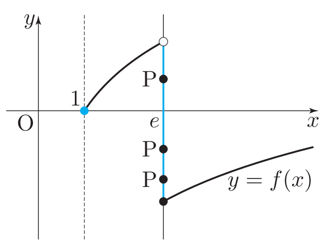
$h'\left(\dfrac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은?

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$
④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

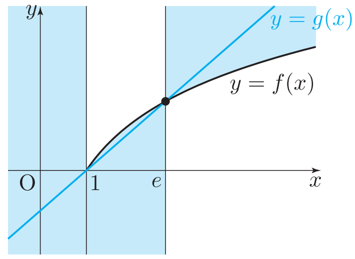
맑은로직



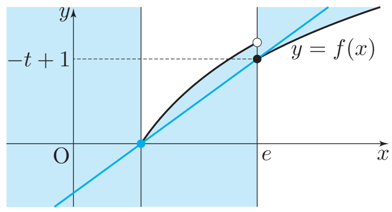
주어진 부등식을 해석하면 $1\le x<e$일 때 $g(x)\le f(x)$이고, $x\ge e$일 때 $g(x)\ge f(x)$입니다. 이를 좌표평면에 나타내면 직선 $y=g(x)$는 색칠된 영역에 그려져야 합니다.



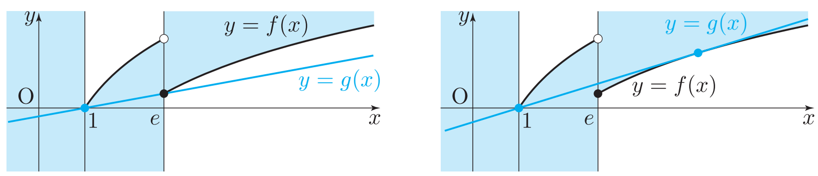
그러면 $y=g(x)$는 그림에서 색칠된 선분 위의 점 P를 반드시 지납니다. 이때 P의 위치에 관계없이 g의 기울기가 최소가 되기 위해서는 $y=g(x)$가 $(1,\ 0)$을 지나야 합니다. 따라서 g의 기울기가 최소가 될 때 $y=g(x)$는 항상 $(1,\ 0)$을 지납니다.



문제에서 t가 양수라고 했지만, 문제의 상황을 이해해보기 위해 $t=0$인 상황을 생각해 봅시다. 그러면 문제의 조건을 만족시키기 위해서는 $y=g(x)$는 반드시 $(e,\ 1)$을 지나야 합니다.

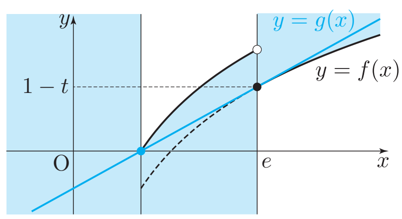


t가 0보다 아주 살짝 큰 상황에서는 위 그림과 같이 $y=g(x)$가 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ 1-t)$를 지날 때 주어진 조건을 만족시키며 기울기가 최소가 됩니다.



(a) (b)

그런데 t가 어느 정도 커졌을 때에는 $y=g(x)$가 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ -t+1)$을 지나면 (a)와 같이 색칠된 영역을 벗어나게 되어 주어진 조건을 만족시키지 못합니다. 이러한 상황에서는 (b)와 같이 $y=g(x)$가 곡선 $y=-t+\ln x$와 접할 때 주어진 조건을 만족시키며 기울기가 최소가 됩니다.



위 두 상황을 구분하는 지점은 $y=g(x)$가 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ 1-t)$를 지날 때인 동시에 $y=g(x)$가 곡선 $y=-t+\ln x$와 접할 때일 때입니다. 이때 곡선 $y=-t+\ln x$ 위의 점 $(e,\ 1-t)$가 접점이므로 접선의 기울기는 $\frac{1}{e}$이고, 이는 $\frac{1-t}{e-1}$와 같습니다. 따라서 $\frac{1}{e}=\frac{1-t}{e-1}$에서 $t=\frac{1}{e}$입니다.

지금까지 알아낸 사실을 정리하면 다음과 같습니다.

① $0 < t < \frac{1}{e}$

$h(t) = \frac{1-t}{e-1}$ 입니다.

② $t \geq \frac{1}{e}$

$h(t)$는 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y = -t + \ln x$에 그은 접선의 기울기입니다. $y' = \frac{1}{x}$이고, 접점의 x좌표를 k라 하면 $h(t) = \frac{1}{k}$이고, 접선의 방정식은 다음과 같습니다.

$$y - (-t + \ln k) = \frac{1}{k}(x - k)$$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $-(-t + \ln k) = \frac{1}{k}(1-k)$에서 $t = \frac{1}{k} - 1 + \ln k$ 입니다. 따라서 $h\left(\ln k + \frac{1}{k} - 1\right) = \frac{1}{k}$ 입니다.

이제 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)$와 $h'(a)$를 각각 구하겠습니다.

(1) $h'\left(\frac{1}{2e}\right)$

$0 < \frac{1}{2e} < \frac{1}{e}$ 이므로 앞의 ①의 경우에 해당합니다. $0 < t < \frac{1}{e}$일 때 $h'(t) = \frac{1}{1-e}$ 이므로 $h'\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{1-e}$ 입니다.

(2) $h'(a)$

$0 < t < \frac{1}{e}$일 때 함수 $h(t) = \frac{t-1}{1-e}$가 가질 수 있는 값의 범위는 $\{y \mid \frac{1}{e} < y < \frac{1}{e-1}\}$ 입니다. 따라서 $t = a$는 구간 $\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$에 속하지 않습니다. 즉 앞의 ②의 경우에 해당합니다.

$h(t) = \frac{1}{k} = \frac{1}{e+2}$ 일 때, $k = e+2$입니다. 따라서 $a = \ln(e+2) + \frac{1}{e+2} - 1$ 입니다. 한편 $h\left(\ln k + \frac{1}{k} - 1\right) = \frac{1}{k}$의 양변을 미분하면 다음과 같습니다.

$$h'\left(\ln k + \frac{1}{k} - 1\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{k^2}$$

양변에 $k = e+2$를 대입하면 $h'(a)\left\{\frac{1}{e+2} - \frac{1}{(e+2)^2}\right\} = -\frac{1}{(e+2)^2}$ 입니다. 이를 정리하면 $h'(a) = -\frac{1}{e+1}$을 얻습니다.

그러므로 $h'\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a) = \frac{1}{(e-1)(e+1)}$ 입니다.

정답 : ④

깊은로직 1 : $h'(a)$를 음함수 미분법으로 계산하기

$h'(a)$를 구할 때 음함수 미분법을 이용하여 계산을 단축할 수 있습니다. 우리가 구한 두 관계식은 다음과 같습니다.

$$h(t) = \frac{1}{k}, \qquad t = \frac{1}{k} - 1 + \ln k$$

왼쪽 식의 양변을 t에 대하여 미분하면 $h'(t) = -\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dt}$를 얻습니다. 오른쪽 식의 양변을 k에 대하여 미분하면 $\frac{dt}{dk} = -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}$입니다. $h(a) = \frac{1}{e+2}$이므로 $t = a$일 때 $k = e+2$이고, 이를 각 식에 대입하면 다음과 같습니다.

$$h'(a) = -\frac{1}{(e+2)^2}\frac{dk}{dt}, \qquad \frac{dt}{dk} = -\frac{1}{(e+2)^2} + \frac{1}{e+2}$$

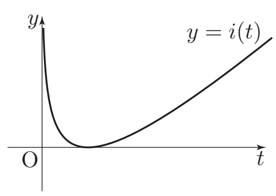
이때 $\frac{dt}{dk}$와 $\frac{dk}{dt}$는 서로 역수 관계임을 이용하여 계산하면 $h'(a) = -\frac{1}{e+1}$을 얻습니다.

깊은로직 2 : 그래서 $t \geq \frac{1}{e}$에서 $h(t)$의 의미는 뭔가요?

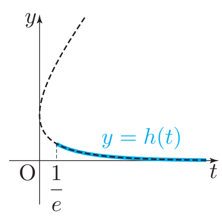
방금 우리가 다룬 두 관계식을 다시 봅시다.

$$h(t) = \frac{1}{k}, \qquad t = \frac{1}{k} - 1 + \ln k$$

왼쪽 식과 오른쪽 식을 연립하면 $t = h(t) - 1 - \ln h(t)$입니다. 이는 함수 $i(t) = t - 1 - \ln t$를 생각했을 때, h가 i의 역함수 또는 유사역함수임을 의미합니다.

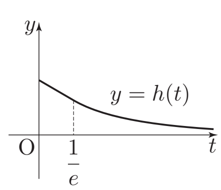


(a)



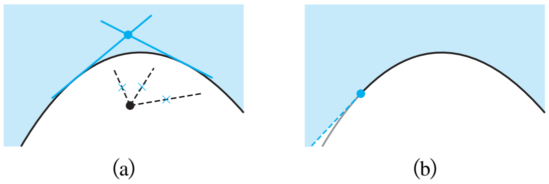
(b)

$y = i(t)$의 그래프는 (a)와 같고, 이는 역함수가 존재하지 않는 함수입니다. $y = h(t)$의 그래프는 (b)와 같이 $y = i(t)$를 $y = t$에 대하여 대칭이동한 곡선의 일부를 취하면 됩니다. 이때 $h(t)$의 의미가 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y = -t + \ln x$에 그은 접선의 기울기임을 고려하면, 주어진 그래프에서 $h(t) \leq \frac{1}{e}$인 부분이 $y = h(t)$의 그래프임을 알 수 있습니다.



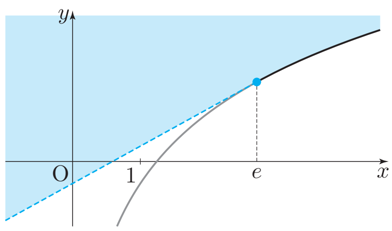
$0 < t < \frac{1}{e}$에서 $h(t) = \frac{1-t}{e-1}$임을 이용하여 h의 그래프를 완성하면, 문제에 주어진 조건대로 $h(t)$가 미분가능한 함수임을 알 수 있습니다.

깊은로직 3 : 접할선과 볼록성으로 풀이하기

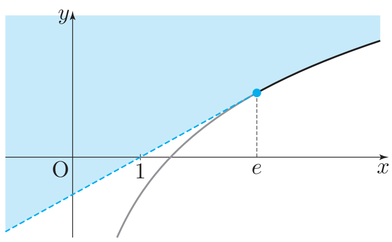


atom.ac의 맑은개념 페이지에서 부교재로 제공하고 있는 '접할선과 볼록성'에서, (a)와 같이 위로 볼록한 곡선에 접선을 그을 수 있는 영역은 곡선의 위쪽 영역임을 배웠습니다. (b)와 같이 곡선이 잘린 경우에는 끝점에서의 미분계수를 이용하여 곡선을 연장한 직선[48]이 곡선의 역할을 대신함을 배웠습니다. 이를 이용하면 $h(t)$의 전환점이 언제 발생하는지를 시각적으로 명확히 확인할 수 있습니다.

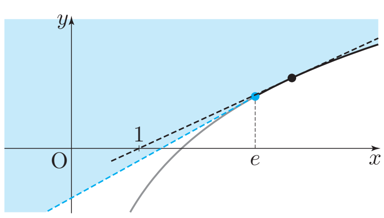
48) 이를 부교재에서는 접선이라 했습니다.



그림과 같이 점선의 x절편이 1보다 작으면 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x$에 접선을 그을 수 없습니다. 따라서 $h(t)=\dfrac{1-t}{e-1}$입니다.



그림과 같이 점선의 x절편이 1이면 $(1,\ 0)$이 점선 위에 놓입니다. 따라서 $h(t)=\dfrac{1-t}{e-1}$입니다.



그림과 같이 점선의 x절편이 1보다 크면 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x$에 접선을 그을 수 있습니다. 따라서 $h(t)$는 접선의 기울기입니다.

깊은로직 4 : 수식으로 풀이하기

그래프 없이 수식으로 풀이해봅시다. 주어진 부등식을 다음과 같이 해석할 수 있습니다.

$$g(x) - \ln x \le 0 \quad (1 \le x < e)$$

$$g(x) + t - \ln x \ge 0 \quad (x \ge e)$$

이때 $g(x) = m(x-1) + g(1)$라 하고, $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $A(x)$를 $A(x) = g(x) - \ln x$라 하면, 다음 조건을 만족시키는 m의 최솟값이 $h(t)$입니다.

① 구간 $[1, e)$에서 함수 $A(x)$의 최댓값이 0보다 작거나 같다.

② 구간 $[e, \infty)$에서 $A(x) + t$의 최솟값이 0보다 크거나 같다.

이때 $A'(x) = m - \dfrac{1}{x}$이므로 m의 값에 따라 A의 증감 양상이 달라집니다.

(1) $m < 0$

A는 $[1, \infty)$에서 감소합니다.

(2) $0 < m \le \dfrac{1}{e}$

A는 $\left[1, \dfrac{1}{m}\right)$에서 감소, $x = \dfrac{1}{m}$에서 극소이자 최소, $\left(\dfrac{1}{m}, \infty\right)$에서 증가합니다.

이때 $\dfrac{1}{m} \ge e$입니다.

(3) $\dfrac{1}{e} < m < 1$

A는 $\left[1, \dfrac{1}{m}\right)$에서 감소, $x = \dfrac{1}{m}$에서 극소이자 최소, $\left(\dfrac{1}{m}, \infty\right)$에서 증가합니다.

이때 $1 < \dfrac{1}{m} < e$입니다.

(4) $m \ge 1$

A는 $[1, \infty)$에서 증가합니다.

(1)의 해석

① $A(1) = g(1)$이 A의 최댓값이므로 $g(1) \le 0$이면 ①을 만족시킵니다.

② $m < 0$이면 $\lim_{x \to \infty}\{A(x) + t\} = -\infty$이므로 ②를 만족시키지 못합니다.

따라서 $m < 0$인 경우, 즉 $h(t) < 0$인 경우는 존재하지 않습니다.[49]

49) 또한 g가 일차함수이므로 $m = 0$인 경우도 존재하지 않습니다. 따라서 $h(t) \le 0$인 경우는 존재하지 않음을 알 수 있습니다.

(2)의 해석

① 구간 $[1, e]$에서 함수 $A(x)$의 최댓값은 $A(1) = g(1)$이므로, $g(1) \le 0$이면 ①을 만족시킵니다.

② 구간 $[e, \infty)$에서 함수 $A(x) + t$의 최솟값은 $A\left(\dfrac{1}{m}\right) + t$이므로, $A\left(\dfrac{1}{m}\right) + t \ge 0$이면 ②를 만족시킵니다.

①에서 $g(1) \le 0$, ②에서 $1 - m + g(1) + \ln m + t \ge 0$입니다. 두번째 식을 변형하면 $g(1) + t \ge m - 1 - \ln m$인데, 이 부등식을 만족하는 m이 최소가 되기 위해서는 $g(1)$이 최대이고 부등식의 등호가 성립하면 됩니다.50)

따라서 $g(1) = 0$이고, $t = h(t) - 1 - \ln h(t)$입니다. 이때 $t \ge \frac{1}{e}$입니다.51)

50) $g(1)$이 커져야 좌변의 값이 커집니다. 한편 우변의 함수 $y = m - 1 - \ln m$이 구간 $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$에서 감소함수이므로, 우변의 값이 커지면 커질수록 m의 값이 작아집니다. 그리고 우변의 값이 가장 클 때에는 좌변과 값이 같을 때(등호가 성립할 때)이므로, 그 때 m이 최소입니다.

51) 정의역이 $\left(0,\ \frac{1}{e}\right]$인 m에 대한 함수 $y = m - 1 - \ln m$의 치역이 $\left\{y \,\middle|\, y \ge \frac{1}{e}\right\}$이기 때문입니다.

(3)의 해석

① 구간 $[1,\ e]$에서 함수 $A(x)$의 최댓값은 $A(1) = g(1)$이므로, $g(1) \le 0$이면 ①을 만족시킵니다.

② 구간 $[e,\ \infty)$에서 함수 $A(x) + t$의 최솟값은 $A(e) + t$이므로, $A(e) + t \ge 0$이면 ②를 만족시킵니다.

①에서 $g(1) \le 0$, ②에서 $m(e-1) + g(1) - 1 + t \ge 0$입니다. 이때 $m \ge \frac{1 - t - g(1)}{e-1}$이므로 $g(1)$이 최대일 때 m이 최소입니다.

따라서 $h(t) = \frac{1-t}{e-1}$입니다. 이때 m의 범위는 $\frac{1}{e} < m < 1$이므로 t의 범위를 구해야 합니다. $\frac{1}{e} < m < \frac{1}{e-1}$일 때 $0 < t < \frac{1}{e}$입니다. 이에 반해 $\frac{1}{e-1} < m < 1$일 때에는 $2 - e < t < 0$인데, 문제에서 t가 양수라 하였으므로, 이 범위는 우리가 다룰 필요가 없는 상황입니다.

(4)의 해석

① 구간 $[1,\ e]$에서 함수 $A(x)$의 최댓값은 $A(e)$이므로, $A(e) \le 0$이면 ①을 만족시킵니다.

② 구간 $[e,\ \infty)$에서 함수 $A(x) + t$의 최솟값은 $A(e) + t$이므로, $A(e) + t \ge 0$이면 ②를 만족시킵니다.

①에서 $m(e-1) + g(1) - 1 \le 0$, ②에서 $m(e-1) + g(1) - 1 + t \ge 0$입니다. 이때 $\frac{1 - t - g(1)}{e-1} \le m \le \frac{1 - g(1)}{e-1}$입니다. 이때 $g(1)$이 최대일 때 m이 최소이므로 $\frac{1-t}{e-1} \le m \le \frac{1}{e-1}$인데, 이는 (4)의 전제인 $m \ge 1$에 어긋납니다.

결론

$t = i(t) - 1 - \ln i(t)$라 할 때, $h(t)$의 함수식은 다음과 같으며, 미분을 통해 함수를 분석하고 부등식을 해석하면 그래프를 전혀 그리지 않고도 문제를 풀이할 수 있습니다.

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1-t}{e-1} & \left(0 < t < \dfrac{1}{e}\right) \\ i(t) & \left(t \ge \dfrac{1}{e}\right) \end{cases}$$