서울대 박사가 알려주는

# 〈수학의 비밀〉

스마트하게 성적을 올리는 수학 공략집

"절대로 읽지 마라! 그저 열심히'만' 공부해라!

성적이 오르지 않아도 괜찮다면!"

통합본

어수강 지음

# 머리말

: 그저 열심히'만' 공부 중이신가요? **열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는다면 공부 방법을 바꾸어야 합니다.**

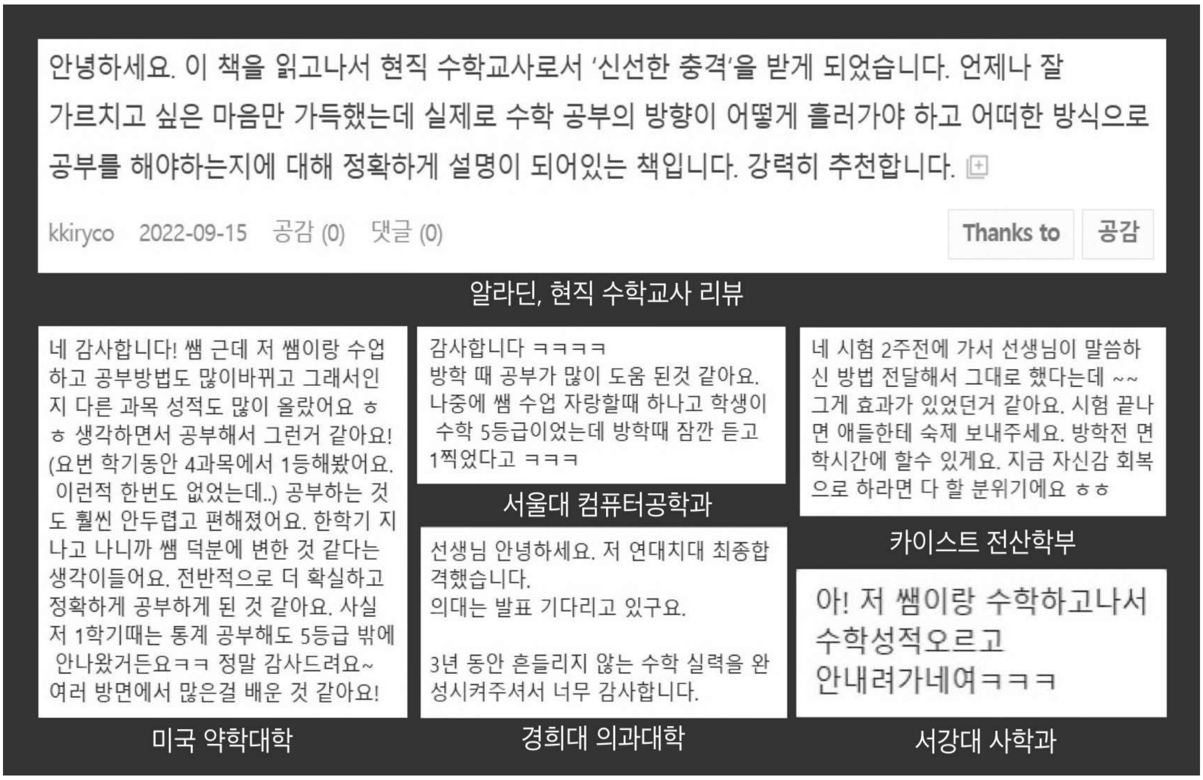
우리가 몸짱이 되고자 운동을 할 때, 운동 관련 책이나 유튜브 또는 전문 트레이너를 통해 인체 구조와 운동의 원리에 대해 알고 운동한다면 무작정 피트니스에 등록해서 힘닿는 대로 운동하는 것보다 효율적이고 재미있을 것입니다.

수학 공부도 마찬가지입니다. 잘못된 방법으로 공부하면 효율도 떨어지고, 수학에 대한 흥미와 자신감마저 잃어버릴 수도 있습니다. **반면 수학의 구조와 원리를 알고 공부한다면 훨씬 효율적이고 재미있게 공부할 수 있을 것입니다.**

교육현장에서 문제집을 7-8권씩 푸는데도 성적이 오르지 않아 괴로워하는 학생들을 많이 봅니다. 고등학교 수학을 그저 열심히'만' 공부한다면 실패할 확률이 높습니다. 이 책은 '여러분의 노력이 헛되지 않도록, 적어도 노력한 만큼은 성적도 올라야 한다.'라는 마음으로 집필했습니다.

**이 책에서는 수학의 구조와 원리를 바탕으로 한 효율적인 공부 방법을 제시합니다.**[1] 그리고 이에 대한 이해를 돕기 위해 다양한 실전 문제(내신, 수능, 논술 및 면접 기출 문항 등)을 예로 들어 설명하였습니다.[2] 이 책을 통해 공부 방법을 숙지한 후에, 수학의 모든 개념과 문제에 이를 적용해 공부한다면 특별한 수학적 재능 없이도 높은 성취를 거둘 것이라 확신합니다.

<이 책의 근간인 "수학의 구조 특강"과 이 책에 대한 후기>




[1] 이 책은 저의 시그니처 수업인 "수학의 구조 특강"의 내용을 바탕으로 합니다.

[2] 이 공부 방법은 (이해를 돕기 위해 책에서 예로 든 실전 문제 뿐 아니라) 수학의 모든 개념과 모든 문제에 적용 가능합니다.

1) 누구를 위한 건가요?

☐ 본격적으로 고등수학을 공부하고자 하는 학생
☐ **열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는 학생**
☐ 성실하게 공부하는데도 성적이 들쭉날쭉한 학생
☐ **고등학교 입학 후 성적이 곤두박질친 학생**
☐ 문제를 많이 푸는데도 처음 보는 고난도 문제가 두려운 학생
☐ **안정적인 1등급을 원하는 학생**
☐ 최상위권 대학 진학을 희망하는 학생
☐ 내신 · 수능 · 논술 · 면접 준비를 한 큐에 끝내고 싶은 학생 및 선생님
☐ 위와 같은 어려움을 겪는 학생들을 지도하고 계신 선생님
☐ **1등급 학생 또는 1등급을 원하는 학생들을 지도하고 계신 선생님**

2) 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

☐ (수학의 구조와 원리를 바탕으로 한) **구체적이고 효과적인 공부 방법**
☐ 효과적인 공부로 노력 이상의 안정적이고 높은 성취
☐ **안정적이고 높은 성취로 흥미와 자신감 향상**
☐ 수학 불안 및 시험 불안 해소
☐ 처음 보는 고난도 문제에 대한 두려움 해소
☐ 효과적인 내신 · 수능 · 논술 · 면접 준비 및 성공적인 대학 입시
☐ 수학에 대한 메타적인 관점과 효과적인 수학 지도 방법
☐ 티칭 개선으로 인한 자신감 향상
☐ 학생들의 성취도 향상으로 인한 즐거움과 보람
☐ **최근 10년간 지도한 학생의 과반 이상 'SKY'에 진학시킨 저자의 인사이트 및 노하우**

3) 당부의 말

: 무엇을 얻을 수 있는지만 보고 무작정 이 책을 구입하지 마세요. 당연한 얘기지만 단순히 이 책을 읽는 것만으로 수학 성적이 향상되지는 않습니다. 이 책은 별로 노력하지 않고도 수학 1등급을 받게 해주는 책이 아닙니다.

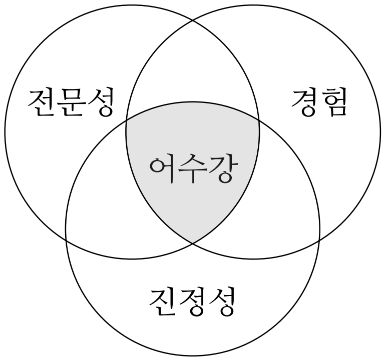
**이 책에서 제시하는 공부 방법에 대해 충분히 고민해보고, 예제의 풀이를 확인하기 전에 반드시 스스로의 힘으로 예제를 풀어볼 것을 권장합니다.**[3] 공부 방법을 숙지한 후에는 수학의 모든 개념과 문제를 공부하는데 이를 적용하기 위해 노력해야 합니다. 이와 같이 '성실'하게 '노력'한다면 시행착오는 줄어들고, 수학 1등급까지 걸리는 시간은 단축되며, 그 과정은 즐거워질 것입니다.

[3]이 책에는 이해를 돕기 위한 고등학교 1학년 및 2학년 과정의 다양한 예제와 그 풀이가 수록되어 있습니다. 따라서 고등학교 2학년 과정까지 한 번 이상 공부한 후에 이 책을 보는 것을 권장합니다.

# 목차

# 저자 소개

: 저자 어수강 박사는 전문성과 경험, 진정성을 바탕으로 공교육과 사교육을 넘나들며 학생들을 지도하고 있습니다. 학생들의 수학에 대한 흥미와 자신감 회복, 성취도 향상뿐 아니라 학생들의 하루하루가 빛날 수 있도록 고민하고 노력합니다.




∗ 전문성 : 수학 전공 이학박사로 첨단 수학의 연구 문제를 해결하여 국제 전문학술지에 다수의 논문을 게재하였고, 국제 전문학술지의 논문 심사위원으로서 다수의 논문을 심사하는 등 수학 전공자로서 뛰어난 전문성을 갖추고 있습니다.

∗ 경험 : 공교육과 사교육을 넘나들며 다양한 학생들을 지도하였습니다. 공교육에서 하나고등학교, 서울과학고등학교, EBS & KAIST 수학캠프, 서울대학교 과학영재원에서 학생들을 지도하였고, 사교육에서는 최상위권 학생 뿐 아니라 수학 5등급 이하의 학생들이 수학 1등급을 받고 최상위권 대학에 진학시킨 풍푸한 경험을 갖추고 있습니다.

∗ 진정성 : 아이들이 겪는 어려움을 함께 고민하고, 아이들이 성장하는 과정에 함께하는 것을 기쁨과 보람으로 생각합니다. 형편이 어려운 학생들을 위해 무상으로 5년 이상 꾸준히 지도하고 소정의 장학금을 지급하기도 하였습니다.

**[약력]**

서울대학교 이학박사 (Ph.D. in Mathematics)

(前) 하나고등학교 교사

(前) 서울과학고등학교 교사

(前) EBS & KAIST 수학캠프 지도교사

(前) 서울대학교 과학영재원 지도교사

**[논문]**

석사논문

A study on competition numbers of planar graphs (2016)

박사논문

Study on structures of digraphs and graphs in the aspect of their holes (2019)

국제 전문학술지 게재 논문[4)]

1. On $(1, 2)$-step competition graphs of bipartite tournaments (2017)
2. The partial order competition dimensions of bipartite graphs (2019)
3. A graph with the partial order competition dimension greater than five (2019)
4. The graph grabbing game on $\{0, 1\}$-weighted graphs (2019)
5. The niche graphs of bipartite tournaments (2020)
6. On $m$-step competition graphs of bipartite tournaments (2020)
7. On chordal phylogeny graphs (2021)

**[홈페이지 및 이메일]**

블로그 : blog.naver.com/math-fish

이메일 : mathfish@snu.ac.kr

전자도서 : www.upaper.net/mathfish

[4)]현재 국제 전문학술지에 투고하여 심사 중인 논문은 scholar.google.com에서 “Soogang Eoh”로 검색하면 확인하실 수 있습니다.

# 제 1 장

# 첫 번째 비밀 : 집합

## ① 수학에서 다루는 모든 대상은 집합

: **대상이 분명한 모임을 집합이라 합니다.** 빨간 사과의 모임은 집합일까요? 사람에 따라 빨간 사과에 대한 기준이 다를 수 있으므로 빨간 사과의 모임은 집합이 아닙니다. 반면 자연수의 모임은 어떨까요? 어떤 수가 주어지면 자연수인지 아닌지 정확하게 판단할 수 있으므로 자연수의 모임은 집합입니다. 마찬가지로 정수의 모임, 유리수의 모임, 실수의 모임, 복소수의 모임은 모두 집합입니다.

우리는 다항식을 정의함으로써 주어진 대상이 다항식인지 아닌지를 분명하게 구분할 수 있으므로 다항식의 모임 역시 집합이 됨을 알 수 있습니다. 마찬가지로 유리식과 무리식, 방정식과 부등식, 함수의 모임 뿐 아니라 직선, 삼각형, 사각형, 원의 모임 또한 그 정의를 통하여 집합임을 알 수 있습니다.[1)]

## ② 수학에서 집합만을 다루는 이유

: 빨간 사과의 성질을 연구한다고 하면 어떨까요? 보는 사람에 따라 주어진 사과가 빨간 사과인지 아닌지에 대한 판단이 달라질 수 있기 때문에 빨간 사과에 대한 성질을 제대로 연구하기 어려울 것입니다. **이처럼 대상이 분명하지 않은 것은 제대로 연구하기 어렵기 때문에, 연구를 제대로 하려면 먼저 그 대상이 분명해야 합니다.** 이것이 수학에서 집합만을 다루는 이유입니다.

## ③ 효율적이고 체계적인 학습 방법

: 수학에서 다루는 모든 대상은 집합(대상이 분명한 모임)이므로 새로운 대상이 나오면
[공부법 1] **원소인 것과 원소가 아닌 것을 구별하는 방법 (정의)**
[공부법 2] **두 원소가 서로 같은지 다른지 구별하는 방법 (상등)**
[공부법 3] **기존의 집합과 비교 · 대조되는 성질**
에 대하여 신경 써서 공부해야 합니다.

---

[1)]수학 교과서의 목차를 보고 우리가 다루는 모든 대상이 정말로 집합인지 확인해보시기 바랍니다.

## [공부법1] 원소인 것과 원소가 아닌 것을 구별하는 방법 (정의)

: **중학교에서는 구별법을 아는지 묻는 문제를 직접 출제하기도 합니다.** 주어진 대상이 다항식인지 아닌지를 분명하게 구별할 수 있어야 다항식의 연산과 성질에 대해 제대로 공부할 수 있고, 함수인지 아닌지를 분명하게 구별할 수 있어야 함수에 대해 제대로 공부할 수 있겠죠? 구별법을 아는 것이 공부의 시작이기 때문입니다.

**반면, 고등학교에서는 구별법을 아는지 직접 묻기보다는 문제에 녹여내는 경우가 많습니다.** 주어진 대상이 어떤 집합의 원소인지 파악한 후에 그 집합의 성질을 정확하게 적용해야 해결할 수 있는 문제가 출제됩니다. **방정식이 주어졌는데 항등식의 성질을 쓴다거나, 반대로 항등식이 주어졌는데 방정식의 이론을 적용한다면 문제를 제대로 풀지 못할 가능성이 높습니다.**

다음 문제에 대해 생각해 봅시다.

**[예제1-1]** $x$에 대한 방정식 $(k+2)x^2+2(k+3)x+k+6=0$이 실근을 가지도록 하는 실수 $k$의 범위를 구하시오. [풀이1] [풀이2]

**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

**[풀이1]** 주어진 방정식이 실근을 가져야하므로

$$D/4 = (k+3)^2 - (k+2)(k+6) \geq 0$$

이고, 이를 풀면

$$k \leq -\frac{3}{2}$$

이다. ⊠

위의 풀이는 (답은 맞았지만) 틀린 풀이입니다. [예제1-1]과 같은 유형의 문제를 처음 접하는 학생 중 상당수가 [풀이1]과 같이 잘못된 풀이를 합니다. 하지만 몇 번 틀리고 난 뒤에는 곧잘 유형화해서 이후에는 잘 틀리지 않습니다.

그렇다면 이런 유형의 문제를 충분히 풀어보지 않았기 때문에 [예제1-1]을 [풀이1]과 같이 틀리는 걸까요? 그것도 이유일 수 있지만 근본적인 이유는 아니라고 생각합니다.

이차방정식의 근의 판별식에 대한 아래의 [정리1-1]에 근거하여 [예제1-1]을 분석해 봅시다.

**[정리1-1]** 실수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a \neq 0$일 때, $x$에 대한 이차방정식

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

에 대하여

① $b^2 - 4ac > 0 \iff$ (1.1)는 서로 다른 두 실근
② $b^2 - 4ac = 0 \iff$ (1.1)는 서로 같은 두 실근
③ $b^2 - 4ac < 0 \iff$ (1.1)는 서로 다른 두 허근

가 성립한다. 이때, $b^2 - 4ac$를 *이차방정식의 근의 판별식*이라 하고 $D$로 나타낸다.

**[분석1-1]** **[예제1-1]의 [풀이1]와 같이 틀리는 이유는 문제에 주어진 $x$에 대한 방정식**

$$(k+2)x^2 + 2(k+3)x + k + 6 = 0 \tag{1.2}$$

**이 실계수 이차방정식인지 제대로 확인하지 않고 [정리1-1]을 사용했기 때문입니다.** 우리는 방정식 (1.2)이 $k = -2$인 경우 이차방정식이 아님을 쉽게 알 수 있습니다. **(1.2)은 $k = -2$이면 일차방정식이고 $k \neq -2$이면 이차방정식이 되므로, 이에 따라 경우를 나누면 [예제1-1]의 [풀이2]와 같이 쉽게 해결할 수 있습니다.** ■

**[풀이2]** 실수 $k$의 값에 따라 $x$에 대한 방정식

$$(k+2)x^2 + 2(k+3)x + k + 6 = 0$$

의 차수가 달라지므로 $k = -2$인 경우와 $k \neq -2$인 경우로 나누어 생각한다.

Case 1) $k = -2$

: 주어진 방정식이 $2x + 4 = 0$이므로 이를 풀면 $x = -2$이다. 따라서 이 방정식은 실근을 가진다.

Case 2) $k \neq -2$

: 주어진 방정식 $(k+2)x^2 + 2(k+3)x + k + 6 = 0$가 $x$에 대한 실계수 이차방정식이므로, [정리1-1]에 의하여

$$D/4 = (k+3)^2 - (k+2)(k+6) \geq 0$$

일 때, 실근을 가진다. 이를 풀면

$$k \leq -\frac{3}{2}$$

이다. 그런데 $k \neq -2$ 이므로

$$k < -2 \text{ 또는 } -2 < k \leq -\frac{3}{2}$$

이다.

위의 두 경우를 종합하면 답은 $k \leq -\dfrac{3}{2}$ 이다. ■

[**예제1-1**]과 같은 문제를 [**풀이1**]과 같은 방식으로 접근하여 틀리는 근본적인 이유는

**"이와 같은 형태의 문제는 [정리1-1]을 써서 풀면 돼!"**

**라고 문제와 그 풀이를 유형화하여 암기하는 방식으로 공부했기 때문일 것입니다.** 문제 유형별로 풀이를 암기하는 방식으로 공부한다면 암기한 것을 잊어버리거나 새로운 유형의 문제가 나올 때마다 제대로 풀지 못하고 틀릴 가능성이 높습니다.

이때, 이 문제를 안 풀어봤거나 풀어봤지만 풀이를 기억해 내지 못해서 틀렸다고 진단하면 이를 해결하기 위해 더 많은 문제를 반복적으로 많이 푸는 방식의 처방을 할 가능성이 높습니다. 하지만 기억력에는 한계가 있고 새로운 유형의 문제는 얼마든지 출제될 수 있기 때문에 이는 제대로 된 해결책이라고 보기 어렵습니다.

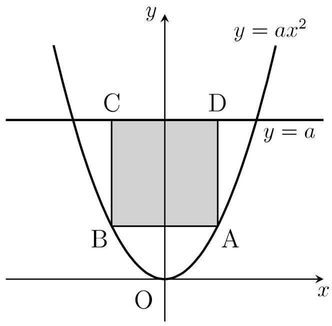
**반면, 이차방정식의 근의 판별식을 사용하기 전에 주어진 식이 실계수 이차방정식인지 아닌지 파악하는 습관을 기른 학생이라면 이 문제를 정확하게 해결할 가능성이 높습니다. 문제를 제대로 풀지 못했더라도**

**"주어진 대상이 어떤 집합의 원소인지 아닌지 구별하는 방법이나 대상이 속하는 집합의 성질"**

**에 대해 잘못 알고 있던 것들을 수정하고 보완함으로써 공부의 완성도를 높여가면 문제의 형태가 달라지더라도 같은 실수를 하지 않게 될 것입니다.**

예를 하나 더 살펴보도록 하겠습니다.

**[예제1-2]** 함수 $y = ax^2\,(a > 0)$의 그래프 위의 두 점 A, B와 직선 $y = a$ 위의 두 점 C, D에 대하여 사각형 ABCD가 정사각형일 때, 정사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하자. 이때, $\lim_{a\to\infty} S(a)$의 값을 구하시오. (단, A의 $x$좌표는 양수이고 $y$좌표는 $a$보다 작다.) [풀이]




**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

[예제1-2]를 함께 분석해 봅시다.

**[분석1-2]** $\mathrm{A}(t, at^2), \mathrm{B}(-t, at^2), \mathrm{C}(-t, a), \mathrm{D}(t, a), t > 0$라 하자. 사각형 ABCD가 정사각형이므로

$$2t = a - at^2 \text{ 이고 } S(a) = 4t^2$$

가 성립합니다.[2)]

이제 우리가 찾아낸 식

$$2t = a - at^2 \tag{1.3}$$

가 어떤 집합의 원소인지 같이 생각해봅시다. (1.3)은 등호를 포함하고 있으므로 등식입니다. 등식 (1.3)은 항등식일까요? 아니면 방정식일까요?

(1.3)은 $a$, $t$의 값에 관계없이 항상 성립하나요? $t = 1$, $a = 1$인 경우 등호가 성립하지 않기 때문에 (1.3)은 항등식이 아닌 방정식이라는 것을 쉽게 알 수 있습니다. 그럼 어떤 방정식일까요? (1.3)은 **무엇을 미지수로 생각하는지에 따라** 아래와 같이

1. $a$만을 미지수로 생각하면 $a$에 대한 일차 이하의 방정식
2. $t$만을 미지수로 생각하면 $t$에 대한 이차방정식
3. $a$와 $t$를 모두 미지수로 생각하면 부정방정식

이 됩니다. **일차 이하의 방정식, 이차방정식, 부정방정식의 해법이 모두 다르기 때문에** 우리가 방정식 (1.3)을 어떻게 볼 것인지에 따라 전략이 달라질 수밖에 없다는 것을 쉽게 알 수 있습니다. **(1.3)을 어떻게 생각하는지에 따라 문제에 대한 접근이 완전히 달라짐**에도 불구하고, 많은 학생들이 (1.3)에 대해 충분히 생각해보지 않고 그저 생각나는 대로 풀기 때문에 제대로 풀지 못하거나 답은 맞혔지만 풀이에 대해 제대로 설명하지 못하는 경우가 많습니다.

그렇다면 방정식 (1.3)은 어떻게 보아야 할까요? $a$만을 미지수로 생각해서 일차 이하의 방정식으로 생각하는게 가장 간단할 것 같지만 이는 잘못된 접근입니다.[3)] 왜냐하면 우리가 구하는 것이

$$\lim_{a\to\infty} 4t^2$$

이기 때문에 $a$는 미지수가 아닙니다. $a$의 값이 무한히 커질 때, $4t^2$의 값이 어떻게 되는지를 구하는 것이기 때문입니다. 따라서 $2t = a - at^2$를 $t$에 대한 이차방정식으로 보고 $t$의 값을 구하면 됩니다. ■

---

2) 상위권 학생이라면 여기까지는 대부분 잘하지만 여기서부터 학생들이 헤매다가 풀기를 포기하거나 생각나는 대로 아무렇게나 해보다가 답만 맞히는 경우가 많습니다. 여기서 잠시 멈추고, 연습장에 문제를 끝까지 풀어본 후에 아래의 설명을 보시기 바랍니다.

3) $a$만을 미지수로 생각할 경우 : 미적분을 공부한 학생이라면 $a = \dfrac{2t}{1-t^2}$이고 $a \to \infty$이면 $t \to 1$임을 통해 문제를 해결할 수 있습니다. 하지만 문제를 해결할 수 있다고 해서 올바른 접근이라고 할 수는 없습니다.

이제 [분석1-2]를 바탕으로 [예제1-2]를 다시 풀어본 후에 [예제1-2]의 [풀이]을 보도록 합시다.

**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

**[풀이]** A$(t, at^2)$, B$(-t, at^2)$, C$(-t, a)$, D$(t, a)$, $t > 0$라 하자. 사각형 ABCD가 정사각형이므로

$$2t = a - at^2 \text{ 이고 } S(a) = 4t^2$$

이다. 등식 $2t = a - at^2$을 $t$에 대해 정리하면

$$at^2 + 2t - a = 0 \ (a > 0)$$

이므로 이차방정식의 근의 공식을 통해

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+a^2}}{a}$$

임을 알 수 있다. 그런데 $t > 0$이므로

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1+a^2}}{a}$$

이다. 그런데 $\lim_{a\to\infty} t = \lim_{a\to\infty} \dfrac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a} = 1$이므로 극한의 성질에 의해

$$\lim_{a\to\infty} 4t^2 = 4$$

가 된다. ■

알고 보니 별로 어렵지 않죠? [분석1-2]에서 언급했듯이 [예제1-2]는 등식 $2t = a - at^2$을 어떻게 볼 것인지에 따라 문제에 대한 접근법이 완전히 달라질 수밖에 없습니다. 즉, **이 식이 어떤 식인지(어떤 집합의 원소인지) 잘못 파악하면 문제를 제대로 풀지 못하거나 헤매다가 시간을 허비하게 될 가능성이 높습니다. 반면 이 식이 어떤 식인지 정확하게 파악한다면 쉽고 정확하게 풀 수 있게 됩니다.** 그러므로

[공부법 1] 원소인 것과 원소가 아닌 것을 구별하는 방법 (정의)

에 대해 신경 써서 공부할 것을 권장합니다.

# 제 2 장

## 두 번째 비밀 : 명제

### ① 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제

: **참 · 거짓이 분명한 식 또는 문장을 명제**라 합니다. 예를 들어 "유재석은 키가 크다."는 문장은 사람에 따라 키가 크다는 것에 대한 기준이 다를 수 있으므로 명제가 아닙니다. 반면 "5는 자연수이다."는 참인 명제이고 "얼룩소는 소가 아니다."는 거짓인 명제입니다.

조금 더 중요한 예를 들어보겠습니다. 피타고라스 정리는 명제일까요? **중학교 수학 과정에서 피타고라스 정리가 성립함을 증명하였으므로 피타고라스 정리는 참인 명제입니다.** 마찬가지로 나머지 정리, 인수 정리, 중선 정리는 모두 명제입니다. 뿐만 아니라 등식의 성질, 켤레복소수의 성질, 제곱근의 성질, 로그의 성질, 극한의 성질, 곱셈 공식, 이차방정식의 근의 공식, 미분 공식, 드 모르간의 법칙, 지수 법칙 등 수학에서 다루는 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제입니다.[1)]

### ② '$p \to q$' 꼴의 명제

: **학생들에게 이차방정식의 근의 공식에 대해서 물어보면**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**라고 답하는 경우가 많습니다. 하지만 이것은 이차방정식의 근의 공식의 결론일 뿐, 이차방정식의 근의 공식이라 할 수 없습니다.** 이차방정식의 근의 공식은

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0,\ a,\ b,\ c\text{는 실수})\text{이면 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

입니다.[2)] **이차방정식의 근의 공식 뿐 아니라 모든 명제는 가정과 결론으로 이루어진 '$p \to q$'의 꼴로 생각할 수 있습니다.** 이를 토대로 효율적이고 체계적인 학습 방법에 대해서 알아보겠습니다.

[1)] 수학 교과서에서 정리 · 성질 · 공식 · 법칙 중에서 명제가 아닌 것이 있는지 확인해 보기 바랍니다.

[2)] 이때 $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0,\ a,\ b,\ c\text{는 실수})$을 가정, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$를 결론이라 합니다.

### ③ 효율적이고 체계적인 학습 방법

: 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제이므로 정리 · 성질 · 공식 · 법칙이 나오면

[공부법 4] **명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어**

[공부법 5] **명제의 가정과 결론**

[공부법 6] **필요충분조건**

에 대하여 신경 써서 공부해야 합니다.[3] 왜 그런지 하나씩 살펴볼까요?

[3]학습 방법에 대한 상담 및 수업에서는 다섯 가지를 이야기하지만 이 책에서는 세 가지만 이야기하도록 하겠습니다.

## [공부법4] 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어

: 참 · 거짓이 분명한 식 또는 문장을 명제라 합니다. **그런데 수학에서 다루는 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제므로 정리 · 성질 · 공식 · 법칙이 나오면 그것이 왜 참인지 또는 왜 거짓인지를 명확히 알아야 합니다. 즉, 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어에 대해 신경 써서 공부해야 합니다.**[4)]

다음 문제에 대해 생각해봅시다.

**[예제2-1]** 두 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$과 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여

$$\{1,\ 2,\ 3\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

를 만족하는 집합 $X$의 개수를 구하시오. [풀이1] [풀이2]

**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

4)이것이 중요한 학습목표이기 때문입니다.

고등학교 1학년 과정에는 다음과 같은 정리가 있습니다.

**[정리2-1]** 자연수 $n$에 대하여 집합 $A$의 원소가 $n$개일 때,

1) $A$의 부분집합의 개수는 $2^n$개
2) $A$의 원소 중 특정한 $m$개를 포함하고 $r$개를 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{n-m-r}$개 (단, $m$, $r$은 0 이상의 정수이고 $m+r \le n$)

이다. [증명]

[정리2-1]을 이용해서 [예제2-1]을 다음과 같이 풀 수 있습니다.

**[풀이1]** $X$는 1, 2, 3을 포함하는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합이므로 $X$는 $2^{5-3}$개이다. ■

**상위권 학생들을 포함한 대부분의 학생들이 위와 같은 유형의 문제를 [예제2-1]의 [풀이1]과 같은 방식으로 해결합니다. 이는 올바른 풀이지만 올바르게 공부한 것이라 보기는 어렵습니다.**[5] 왜 그런지 아래의 [예제2-2]를 풀어보도록 합시다.

**[예제2-2]** 두 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$과 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$에 대하여

$$\{1,\ 2,\ 3\} \subset X \subset Y \subset Z \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$$

을 만족하는 집합 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수를 구하시오. [풀이]

**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

[5] [정리2-1]의 결과를 올바르게 적용해서 문제를 해결했지만, 풀이를 여기에서 마친다면 [정리2-1]에 쓰인 핵심 아이디어를 놓치기 쉽기 때문입니다.

[예제2-2]는 [예제2-1]의 [풀이1]과 같이 [정리2-1]의 결과를 적용해서 풀기는 어렵습니다. [예제2-2]를 풀지 못했거나 지나치게 복잡한 방법으로 해결했다면 이는 [예제2-2]가 특별히 어려운 문제라거나 [예제2-2]와 그 풀이를 제대로 유형화하지 못했기 때문이 아니라, [정리2-1]을 증명하는데 쓰인 핵심 아이디어를 놓쳤기 때문일 가능성이 높습니다.

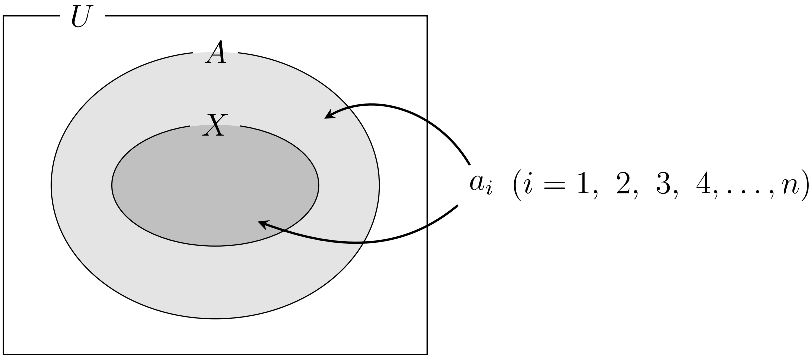
그럼 [정리2-1]의 증명에 쓰인 핵심 아이디어가 무엇인지 알아보고, 이를 이용하여 [예제2-1]과 [예제2-2]를 다시 풀어보도록 하겠습니다.

**[증명]** 전체집합을 $U$라 하고 집합 $A$를

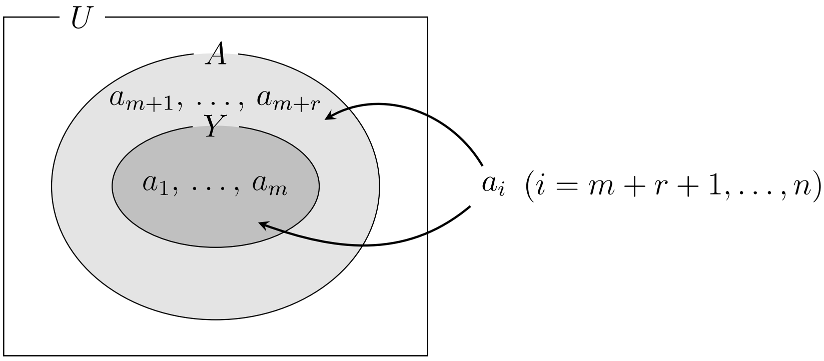
$$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n\}$$

이라 하자.

1) $X \subset A$라 하자. 이때 $A$의 원소의 입장에서 경우의 수를 생각해보면, 아래의 벤 다이어그램에서 $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$이 들어갈 수 있는 영역은 $X$ 또는 $A - X$의 두 가지이므로 $X \subset A$를 만족하는 $X$의 개수는 $2^n$개이다.




2) $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$은 포함하고 $a_{m+1},\ a_{m+2}, \ldots,\ a_{m+r}$은 포함하지 않는 $A$의 부분집합을 $Y$라 하자. 마찬가지로 $A$의 원소의 입장에서 경우의 수를 생각해보면, 아래의 벤 다이어그램에서 $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$이 들어갈 수 있는 영역은 $Y$ 뿐이고, $a_{m+1},\ a_{m+2}, \ldots,\ a_{m+r}$이 들어갈 수 있는 영역은 $A - Y$ 뿐이다. 한편 $a_{m+r+1},\ a_{m+r+2}, \ldots,\ a_n$이 들어갈 수 있는 영역은 $Y$ 또는 $A - Y$의 두 가지이다.




따라서 $Y$가 될 수 있는 것의 개수는 $2^{n-m-r}$개이다. ■

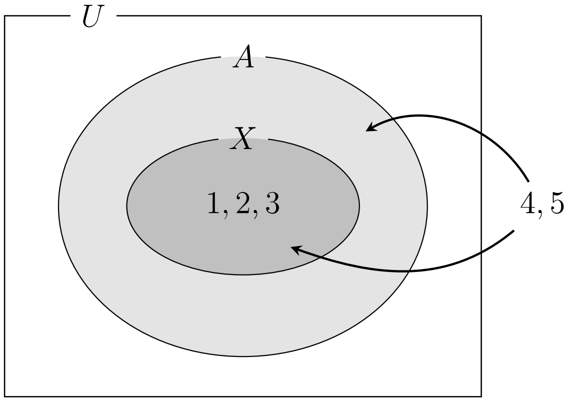
[**정리2-1**]의 [**증명**]에 쓰인 핵심 아이디어는

**"원소의 입장에서 경우의 수를 생각"**

**하는 것입니다.** 그럼 이제 [정리2-1]의 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 이용하여 [예제2-1]과 [예제2-2]를 풀어볼까요?

먼저 [예제2-1]의 두 번째 풀이를 보겠습니다.

**[풀이2]** 집합 $A$를 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$라 하자. 그러면 $X$는 1, 2, 3을 포함하는 $A$의 부분집합이므로 아래의 벤 다이어그램에서 1, 2, 3이 들어갈 수 있는 영역은 $X$ 뿐이고, 4, 5가 들어갈 수 있는 영역은 $X$ 또는 $A - X$의 두 가지이다.




따라서 $X$의 개수는 $2^2$개이다. ■

[정리2-1]의 핵심 아이디어를 이용한 [예제2-1]의 [풀이2]도 쉽지만, [예제2-1]의 [풀이1]이 워낙 간단하기 때문에 [정리2-1]의 핵심 아이디어가 별 필요 없는 것처럼 느껴질 수도 있습니다.

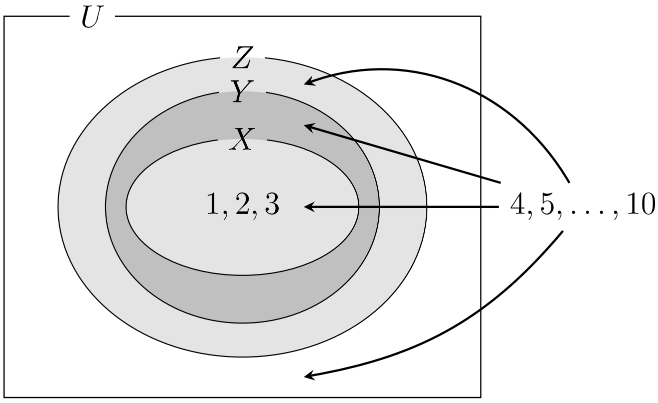
[정리2-1]의 핵심 아이디어를 이용하여 [예제2-2]를 다시 풀어본 후에 다음 페이지의 [풀이]을 보도록 합시다.

**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

**[풀이]** 집합 $U$를 $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$이라 하자. 그러면 아래의 벤 다이어그램에서 1, 2, 3이 들어갈 수 있는 영역은 $X$ 뿐이고, 4, 5, …, 10이 들어갈 수 있는 영역은

$$X \ \text{또는}\ Y - X \ \text{또는}\ Z - Y \ \text{또는}\ U - Z$$

의 네 가지이다.




따라서 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수는 $4^7$개이다. ■

[예제2-2]는 [정리2-1]의 결과를 적용하여 풀기는 매우 어렵지만 [정리2-1]의 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 이용하면 [예제2-1]과 같이 쉽게 풀 수 있습니다.

**"[예제2-1]은 [정리2-1]의 결과를 적용해서 푸는 문제"와 같이 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부하면, 명제의 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 놓치게 됩니다.** 이렇게 되면, 시험에서 [예제2-2]와 같이 [정리2-1]의 핵심 아이디어를 제대로 학습했는지 평가하는 문제를 해결하지 못할 가능성이 매우 높습니다. **명제의 증명과 이에 쓰인 핵심 아이디어를 정확하게 이해하는 것은 매우 중요한 학습 목표이기 때문에 신경 써서 공부해야 합니다.**[6)]

예를 하나 더 살펴보도록 하겠습니다.

**[예제2-3]** $0 \le \theta \le 5\pi$인 실수 $\theta$에 대하여

$$\sin\theta = 7\cos\theta + \frac{8\sqrt{7}}{3}$$

을 만족하는 $\theta$의 개수를 구하시오. [풀이1] [풀이2]

**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

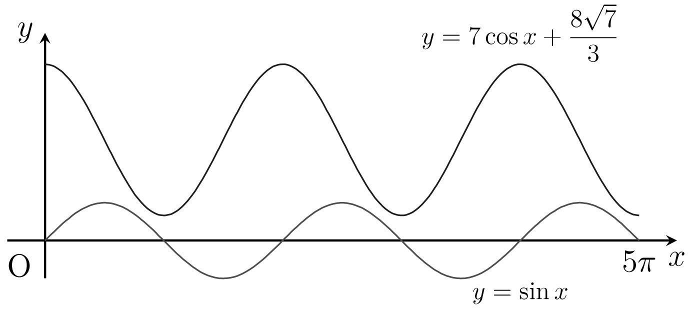
6) 명제의 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 이해하는 것은 매우 중요한 학습 목표이기 때문에, 다양한 형태로 시험에 출제가 됩니다.

**[풀이1]** $0 \leq x \leq 5\pi$에서 $y = \sin x$와 $y = 7\cos x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$의 그래프의 교점의 개수를 구한다. ⊠

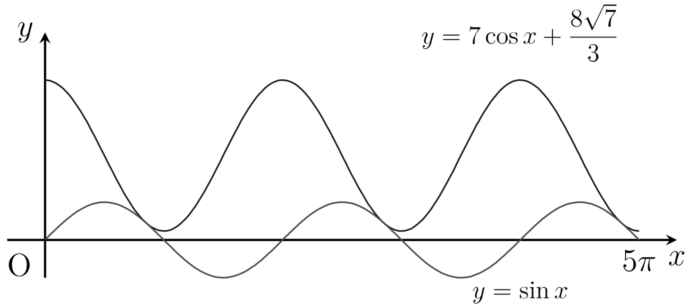
[예제2-3]의 [풀이1]이 제법 그럴듯해 보이지만, 이 문제는 이와 같은 방식으로 풀기 어렵습니다.[7] 왜 그럴까요? 이에 대해 충분히 고민해 본 후에 다음 페이지의 [분석2-1]을 보도록 합시다.

[7] 대부분 학생들이 [예제2-3]과 같은 유형의 문제를 크게 두 가지 방법으로 해결합니다. 첫 번째는 [풀이1]과 같이 그래프를 이용한 방법이고, 두 번째는 $\sin\theta = 7\cos\theta + \frac{8\sqrt{7}}{3}$의 양변을 제곱한 후 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$임을 이용하여 대수적으로 푸는 방법입니다. 두 번째 방법을 [예제2-3]에 적용하면 계산이 너무 복잡해서 실수하기 쉽습니다.

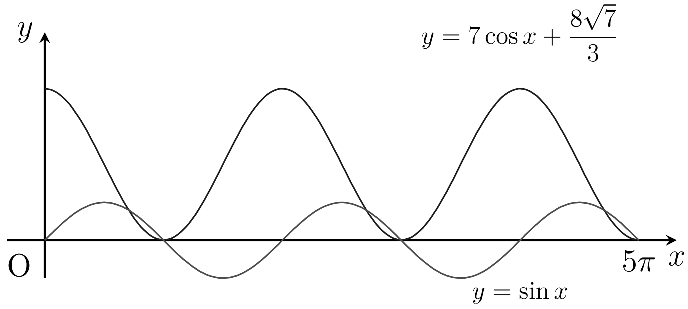
**[분석2-1]** [예제2-3]을 [풀이1]과 같이 풀기 어려운 이유는 간단합니다. 특수각에 대한 삼각함수의 값을 계산하는 것만으로는 두 함수 $y=\sin x$와 $y=7\cos x+\frac{8\sqrt{7}}{3}$의 그래프의 개형이 아래의 [그림1], [그림2], [그림3] 중 어떤 것과 같은지 알 수 없기 때문입니다.




[그림1]




[그림2]



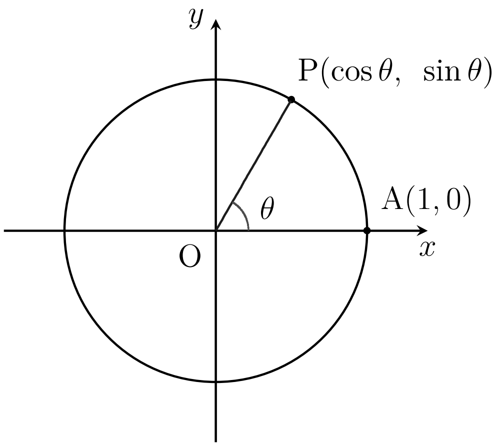

[그림3]

그러므로 고등학교 수준에서 [예제2-3]을 [풀이1]과 같이 풀기는 어렵습니다. ■

그럼 [예제2-3]은 어떻게 풀어야 할까요? 충분히 고민해 본 후에 다음 페이지를 보도록 합시다.

**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

**삼각함수의 그래프를 유도하는데 쓰인 핵심 아이디어는 아래의 그림과 같이**



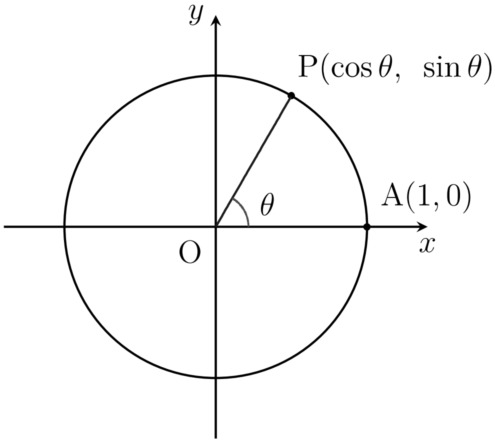

**"점 $\mathrm{A}(1,0)$과 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}$에 대하여**
**$\angle\mathrm{POA}=\theta$일 때, 점 $\mathrm{P}$의 좌표를 $\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta)$로 생각할 수 있다는 것"**

**입니다.**[8] 이를 이용해 [예제2-3]을 다시 풀어본 후에 다음 페이지의 [풀이2]를 보도록 합시다.

**[풀이]** 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

[8] 보다 자세한 내용이 알고 싶으시면 '수학의 정석'의 '수학I (기본)'의 110쪽을 참고하셔도 좋습니다.

**[풀이2]** 좌표평면 위의 점 A의 좌표를 $(1, 0)$이라 하자. 이때, 실수 $\theta$에 대하여 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$라 하면 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 $\angle\mathrm{AOP} = \theta$인 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이 된다.




**그런데** $0 \le \theta \le 5\pi$**이므로 점** P**는** A**에서 출발해서 원** $x^2 + y^2 = 1$ **위를 반시계 방향으로 두 바퀴 반 회전하는 것으로 생각할 수 있다.**

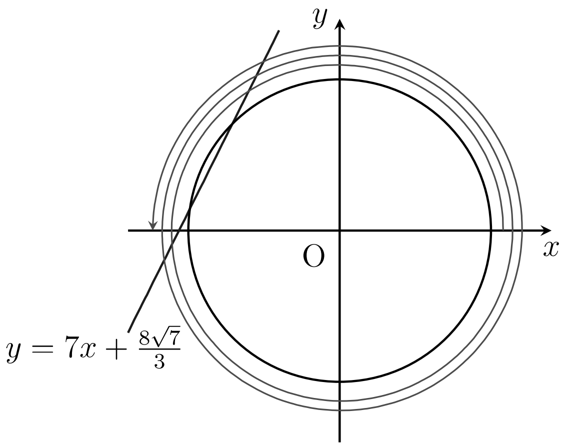
한편, 주어진 식 $\sin\theta = 7\cos\theta + \frac{8\sqrt{7}}{3}$에 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$를 대입하면 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$이므로

$$\text{“실수 } 0 \le \theta \le 5\pi\text{에 대하여 } \sin\theta = 7\cos\theta + \frac{8\sqrt{7}}{3} \text{ 을 만족하는 } \theta\text{의 개수”}$$

가

$$\text{“직선 } y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}\text{과 원 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 위를 움직이는 점 P가 만나는 횟수”}$$

와 같음을 알 수 있다. 이를 좌표평면에 그림으로 나타내면 아래와 같다.[9)]




점 P가 점 A에서 출발하여 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 반시계 방향으로 두 바퀴 반 회전하는 동안 직선 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$와 6번 만나므로 답은 6개이다. ■

---

9) 직선 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$의 $x$절편이 $-1$ 보다 작고, 원의 중심 O와 직선 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$과 원 $x^2 + y^2 = 1$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1 보다 작음을 통해 원과 직선의 위치 관계를 알 수 있습니다.

[예제2-3]은 [풀이1]처럼 $y=\sin x$와 $y=7\cos x+\frac{8\sqrt{7}}{3}$의 그래프를 이용해서 접근해서 푸는 것은 고등학교 수준에서 불가능하고, $\sin\theta=7\cos\theta+\frac{8\sqrt{7}}{3}$의 양변을 제곱한 후 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$를 이용하여 방정식으로 접근하면 계산이 매우 복잡하고 어려울 뿐 아니라 실수하기도 매우 쉽습니다.[10] 반면, $(\cos\theta,\ \sin\theta)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이라는 사실에 착안하면 [풀이2]와 같이 쉽게 풀 수 있습니다.[11]

이 아이디어가 핵심적인 역할을 하는 문제는 시중 문제집에도 많이 수록되어 있습니다. 예를 들어 볼까요?

**[예제2-4]** 실수 $\theta$에 대하여
$$\frac{\sin\theta-4}{\cos\theta-3}$$
의 최댓값 $M$과 최솟값 $m$의 합 $M+m$의 값을 구하시오.

문제를 충분히 풀어본 최상위권 학생들의 경우, $(\cos\theta,\ \sin\theta)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이라는 것을 이용하여 [예제2-4]와 같은 문제를 쉽게 해결합니다.[12] 그런데 최상위권 학생들 중 대부분이 [예제2-3]을 풀 때는 이 아이디어를 떠올리지 못하고 [풀이1]처럼 그래프를 이용해서 접근하거나 양변을 제곱한 후에 풀려고 합니다. 왜 그럴까요?

**최상위권 학생들조차도 대부분 "[예제2-3]은 그래프를 이용해 푸는 문제", "[예제2-4]는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$를 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점으로 생각해서 푸는 문제"와 같이 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부했기 때문일 것입니다.**

**명제와 그 증명의 핵심 아이디어를 이해하는 것은 중요한 학습 목표이기 때문에 시험에도 자주 출제가 됩니다.**[13] 때로는 익숙한 방법으로 쉽게 풀 수 있도록 출제가 되기도 하지만, 때로는 [예제2-2]나 [예제2-3]과 같이 익숙한 방법으로는 해결하기 어려운 형태로 출제가 되기도 합니다. **시험에 이와 같은 문제가 출제될 경우, 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한 학생은 크게 당황할 가능성이 높지만, 명제와 그 증명의 핵심 아이디어에 대해 신경 써서 공부한 학생이라면 당황하지 않고 쉽고 정확하게 해결할 수 있을 것이라 생각합니다.**[14] **그러므로 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 신경 써서 공부하는 것을 크게 권장합니다.**

---

[10] 계산만 복잡한 것이 아니라, 양변을 제곱하는 과정에서 필요충분조건이 깨지기 때문에 실수하기 쉽습니다.

[11] 대단한 풀이는 아니지만, 학교 수업에서 이 풀이로 하나고 2기 학생들에게 기립박수를 받았던 기억이 나네요 :)

[12] $\frac{\sin\theta-4}{\cos\theta-3}$가 점 $(3,4)$와 원 $x^2+y^2=1$ 위의 한 점 $P(\cos\theta,\sin\theta)$를 지나는 직선의 기울기임을 이용하면 쉽게 풀 수 있습니다. 자세한 풀이는 생략합니다.

[13] 중요하기 때문에 시험에 출제되는 것이지, 시험에 출제되기 때문에 중요한 것이 아닙니다.

[14] 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한 학생이라면, 시험에서 [예제2-2]나 [예제2-3]과 같은 문제를 접할 경우 크게 당황할 가능성이 높습니다. 이와 같은 문제에 시간만 뺏기고 답을 내지 못하게 되면 멘탈이 무너져 시험 전체에 크게 마이너스가 되기도 합니다.