

당신이 수학을 망치는 N가지 이유

“절대로 읽지 마라. 그저 열심히‘만’ 공부해라.

성적이 오르지 않아도 괜찮다면”

수학을 망치는 이유를 알면 해결책이 보인다.

어수강 지음

들어가며

할 수만 있다면 누구나 수학을 잘하고 싶을 것이다. 특히, 의약 계열이나 SKY 같은 상위권 대학 진학을 목표로 하는 학생이라면 더욱 그럴 것이다. 1등급과 100점으로 가득한 성적표를 상상해 보자. 상상만으로도 신나지 않는가?

하지만 수학을 잘하고 싶은 우리의 바람과 달리 수학은 그리 만만치 않다. 때로 수학은 마치 굶주린 맹수 같다. 우리가 조금만 허점을 보이면, 고난도 문항이라는 날카로운 이빨과 신유형이라는 매서운 발톱으로 우리의 노력을 갈가리 찢어버리는 맹수. 때문에 수학을 포기하거나 수학 불안에 시달리는 학생들이 많다.

지금은 수학 박사이자 수학 선생인 나 또한 그랬다. 수학을 잘하고 싶었지만, 현실은 수학 48점이었다.

1. 중학교 1학년 1학기 수학 점수 48점. 나는 우등반과 열등반 중에서 열등반에 배정되었다.
2. 고등학교 1학년 첫 모의고사 수학 점수 48점. 이때부터 나는 고등학교 2학년 5월까지 모의고사 4~6등급을 벗어나지 못했다.

나는 48점에 좌절했고, 어떻게 해야 할지 몰라 답답해했다.

한편 나와 비슷한 처지에 있던 나의 친구들은 학습량을 늘리고 문제를 더 많이 풀면 성적도 좋아질 것이라 확신하는 것 같았다. 문제집을 3권 풀던 친구는 5권을 풀기로 했고, 밤 12시까지 공부하던 친구는 새벽 2시까지 공부하기로 했다. 하지만 그중 대부분은 성적이 제자리걸음이거나 시간이 지날수록 성적이 떨어졌고, 차츰 수학을 포기하기 시작했다.

나의 친구들처럼 단순히 학습량을 늘리는 것은 답이 아닌 것 같았다. 나는 답을 찾기 위해 고민했고, 스스로에게 질문했다.

1. 대학은 어떤 학생을 뽑을까?
2. 시험은 왜 보는 걸까?

본질에 집중하니 답은 의외로 간단했다. 나는 이 질문에 대한 답을 바탕으로 공부 방법을 개선했고, 단 2개월 만에 모의고사에서 수학 1등급을 받았다.¹⁾

¹⁾이 질문에 대한 답과 구체적인 공부 방법은 각각 이 책의 중반부와 후반부에서 다루기로 한다.

나는 사실 수학보다 화학을 더 좋아했고 잘했다. 그럼에도 내가 화학이 아닌 수학을 전공한 이유는

“나의 친구들이 수학 때문에 좌절하거나 꿈을 포기했기 때문이다.”

그 누구보다 열심히 공부했음에도 나의 친구들에게 수학 1등급은 허락되지 않았다. 이 때문에 의대 진학을 포기한 친구도 있었고, 교사가 되길 포기한 친구도 있었다. 열심히‘만’ 공부하는 것은 답이 아니다. **실력이 쌓이지 않는 방법으로 그저 열심히‘만’ 공부한다면, 오히려 노력한 만큼 더 크게 좌절할 것이다. 실력이 쌓이는 방법으로 노력해야 한다. 나의 사랑하는 친구들처럼, 간절한 마음으로 노력했음에도 단지 ‘방법’을 몰라 좌절하거나 포기하는 친구들이 없도록 돕고 싶었다. 이것이 내가 화학이 아닌 수학을 택한 이유이자 지금 이 책을 쓰고 있는 이유이다.**

이 책은 세 장으로 구성했다. 첫 번째 장에서는 학생들이 수학에서 좌절하고 포기하는 이유에 대해서 이야기한다. 두 번째 장에서는 수포자였던 내가 어떻게 어려움을 극복하고 2개월 만에 1등급이 될 수 있었는지 이야기한다. 마지막으로 세 번째 장에서는 실력이 쌓이는 공부 방법에 대해 이야기한다. 이 방법으로 성실하고 꾸준하게 노력한다면 수학 4등급 학생도 최소 2등급은 받을 것이라고 확신한다.

1. 이 책은 누구를 위한 건가요?

- 열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않아 고민인 학생과 부모님
- 고등학교 입학 후 성적이 곤두박질친 학생과 부모님
- 안정적인 1등급을 원하는 학생과 부모님
- 상위권 대학 진학을 희망하는 학생과 부모님
- 위와 같은 학생들을 지도하고 계신 선생님

2. 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

- 내신 또는 수능을 망친 이유와 개선 방법
- 즉각 적용 가능한 구체적이고 효과적인 공부 방법
- 성적 향상으로 인한 흥미와 자신감 향상
- 수학 불안 및 시험 불안 해소
- 변화무쌍한 입시제도에도 흔들리지 않는 편안함
- 최근 10년간 지도한 학생의 과반 이상 'SKY'에 진학시킨 저자의 인사이트 및 노하우

3. 당부의 말

무엇을 얻을 수 있는지만 보고 **무작정 이 책을 구입하지 마라**. 당연한 얘기지만 단순히 이 책을 읽는 것만으로 수학 성적이 향상되지는 않을 것이다. 이 책은 별로 노력하지 않고도 수학 1등급을 받게 해주는 책이 아니기 때문이다.

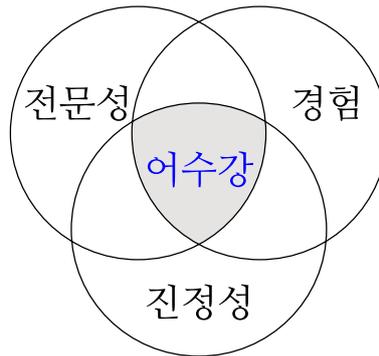
열심히 '만' 공부하는 것은 답이 아니지만, 공부하지 않으면 답이 없다. 이 책에서 제시하는 공부 방법에 대해 충분히 고민해보고, 이를 공부하는데 적용하기 위해 노력해야 한다. '성실'하게 '노력'한다면 시행착오는 줄어들고, 수학 1등급까지 걸리는 시간은 단축되며, 그 과정은 즐거워질 것이다.

목차

저자 소개	5
1 당신 또는 당신의 자녀가 수학을 망치는 N 가지 이유	7
1. 중학교 수학은 90~100점이었는데, 고등수학은 고작 60점이라고?	8
2. 수학에 재능이 없어서일까?	12
3. 열심히 공부했는데 아는 게 없다?	14
4. 선행학습, 남들보다 일찍 시작해야 할까?	18
5. ○○이 무너지면 백약이 무효하다.	20
2 어떻게 수포자에서 서울대 수학 박사가 됐을까?	25
1. 입시에서 가장 정확한 네비게이션은 대학의 ○○이다.	26
2. 내신 3등급은 떨어지고, 7등급은 합격하는 것이 가능할까?	29
3. ○○○의 법칙으로 2개월 만에 5등급에서 1등급 달성!	32
4. 무한 경쟁에서 살아남을 수 있었던 이유	38
3 그대로 따라하면 성적이 오르는 치트키	41
1. 고1 내신 5등급이 수시로 SKY 간다고?	43
2. 완전 학습을 위한 세 가지 도구	47
3. 장기기억으로 이어지는 체계적인 공부 방법!	53
4. 무의미한 반복 학습에서 탈출하기	56

저자 소개

: 저자 어수강 박사는 전문성과 경험, 진정성을 바탕으로 공교육과 사교육을 넘나들며 학생들을 지도하고 있습니다. 학생들의 수학에 대한 흥미와 자신감 회복, 성취도 향상뿐 아니라 학생들의 하루하루가 빛날 수 있도록 고민하고 노력합니다.



* 전문성 : 수학 전공 이학박사로 첨단 수학의 연구 문제를 해결하여 국제 전문학술지에 다수의 논문을 게재하였고, 국제 전문학술지의 논문 심사위원으로서 다수의 논문을 심사하는 등 수학 전공자로서 뛰어난 전문성을 갖추고 있습니다.

* 경험 : 공교육과 사교육을 넘나들며 다양한 학생들을 지도하였습니다. 공교육에서 하나고등학교, 서울과학고등학교, EBS & KAIST 수학캠프, 서울대학교 과학영재원에서 학생들을 지도하였고, 사교육에서는 최상위권 학생 뿐 아니라 수학 5등급 이하의 학생들이 수학 1등급을 받고 최상위권 대학에 진학시킨 풍부한 경험을 갖추고 있습니다.

* 진정성 : 아이들이 겪는 어려움을 함께 고민하고, 아이들이 성장하는 과정에 함께하는 것을 기쁨과 보람으로 생각합니다. 형편이 어려운 학생들을 위해 무상으로 5년 이상 꾸준히 지도하고 소정의 장학금을 지급하기도 하였습니다.

[약력]

서울대학교 이학박사 (Ph.D. in Mathematics)

(前) 하나고등학교 교사

(前) 서울과학고등학교 교사

(前) EBS & KAIST 수학캠프 지도교사

(前) 서울대학교 과학영재원 지도교사

이산수학 교과서 저자, 더 블랙라벨 검토위원 등

[논문]

석사논문

[A study on competition numbers of planar graphs \(2016\)](#)

박사논문

[Study on structures of digraphs and graphs in the aspect of their holes \(2019\)](#)

국제 전문학술지 게재 논문²⁾

1. [On \$\(1, 2\)\$ -step competition graphs of bipartite tournaments \(2017\)](#)
2. [The partial order competition dimensions of bipartite graphs \(2019\)](#)
3. [A graph with the partial order competition dimension greater than five \(2019\)](#)
4. [The graph grabbing game on \$\{0, 1\}\$ -weighted graphs \(2019\)](#)
5. [The niche graphs of bipartite tournaments \(2020\)](#)
6. [On \$m\$ -step competition graphs of bipartite tournaments \(2020\)](#)
7. [On chordal phylogeny graphs \(2021\)](#)

[홈페이지 및 이메일]

블로그 : blog.naver.com/math-fish

이메일 : mathfish@snu.ac.kr

전자도서 : <https://docs.orbi.kr/docs/11799/>

²⁾현재 국제 전문학술지에 투고하여 심사 중인 논문은 scholar.google.com에서 “Soogang Eoh”로 검색하면 확인하실 수 있습니다.

당신 또는 당신의 자녀가 수학을 망치는 N 가지 이유

노력이 배신하지 않는다고?

강남의 학원가에 가본 적이 있는가? 아이들은 학교가 끝나면 학원으로 몰려간다. 초등학생도 예외는 아니다. 초등학생이 수학의 정석으로 공부하는가 하면, 초등학생을 대상으로 하는 의대준비반이 성행하고 있다. 학원은 밤 10시까지 불이 꺼질 줄 모른다.

초등학생에서 대학생이 되기까지 10년 이상 치열하게 공부한다. 이 지독한 경쟁에서 승리한 소수는 의약 계열뿐 아니라 SKY 정원의 상당 부분을 차지한다. 하지만 치열하게 노력했던 모두가 입시에 성공하는 것은 아니다.¹⁾ 치열하게 공부한 10명 중 한 번에 입시에 성공하는 것은 고작 2~3명 정도다. 그렇다면 10명 중 적어도 7명은 노력에 배신당했다는 말 아닌가.

“노력은 배신하지 않는다.”

는 말은 무척 교훈적이지만 우리의 입시 현실과는 잘 맞아떨어지지 않는다.

초등학생 때부터 치열하게 공부한 학생 중 대다수가 노력에 배신당하는 이유는 무엇일까? 이유를 알면 해결책도 쉽게 찾을 수 있을 것이다. 이 장에서는 학생들이 열심히 공부했음에도 수학을 망치는 N 가지 이유에 대해 알아보도록 하자.

¹⁾물론 입시 결과에서 타 지역의 추종을 불허할 만큼 높은 성과를 내고 있다.

1. 중학교 수학은 90~100점이었는데, 고등수학은 고작 60점이라고?

중학교 수학은 항상 90~100점이었는데, 고등학교 수학에서 60점을 받는 것이 충격적인가? 놀랍게도 이는 매우 흔한 일이다. 왜냐하면 중학교 수학과 고등학교 수학의 차이로 인해, 필연적으로 그럴 수 밖에 없기 때문이다. 이에 대해 자세히 알아보자.

1. 내신 체계가 다르다.

학군지의 중학교에선 수학 점수가 90~100점인 학생의 비율이 30% 이상인 경우가 많다.²⁾³⁾ 간단히 말해서 30명 중 10명 이상이 90~100점을 받는다.

과목	1학기				
	평균	성취도별분포비율			
		A	B	C	D
국어	81.7	36.4	30.0	16.6	9.2
사회	71.9	20.3	20.7	14.7	19.8
역사	77.3	37.8	16.1	12.4	14.3
수학	75.5	39.6	18.9	12.4	5.5

과목	1학기				
	평균	성취도별분포비율			
		A	B	C	D
국어	82.7	41.6	31.5	11.9	5.8
사회	86.2	57.2	19.8	9.9	6.0
역사	69.5	32.3	16.9	10.5	6.6
수학	85.0	60.3	16.3	7.0	5.1

그럼 고등학교에서는 어떨까? 고등학교의 1등급, 2등급, 3등급, 4등급의 비율은 각각 4%, 7%, 12%, 17%다. 중학생 30명 중 20명(중학교 수학 점수가 90~100점인 학생 10명 이상 포함)만 인문계 고등학교에 진학한다고 가정하면, 20명 중 1등급, 2등급, 3등급, 4등급인 학생의 수는 각각 0.8명, 1.4명, 2.4명, 3.4명이다.

따라서 중학교 수학 점수가 90~100점이었던 학생 10명 이상의 학생 중 적어도 2명은 5등급을 받을 수 밖에 없다. 기준을 4등급으로 잡으면 중학교 수학 90~100점이었던 학생 10명 이상의 학생 중 적어도 5.4명이 4등급 이하의 성적을 받게 된다. **한 마디로 중학교 수학 90~100점이었던 학생의 절반 이상이 고등학교에선 4등급 이하의 성적을 받을 수 밖에 없으며, 이는 매우 필연적인 결과이다.**

²⁾다음의 두 표는 목동 소재 두 중학교의 2023년 3학년 1학기 중간고사 내신 성적 통계이다. 한 학교는 90점 이상인 학생의 비율이 39.6%이고 다른 학교는 60.3%인 것을 확인할 수 있다. 물론 학교마다 다르고, 같은 학교라도 시험 때마다 차이가 있을 것이다.

³⁾출처 : 학교알리미

2. 고등학교 수학은 중학교 수학과 ‘급’이 다르다.

중학교 수학은 양이 많지도 않고 내용이 그리 어렵지도 않다. 때문에 문제의 풀이도 짧을뿐더러 유형에도 한계가 있다. 고난도 문제라 해도 풀이도 고작해야 10 줄이 채 되지 않는 것이 대부분이다. 아마 학습 능력이 괜찮은 학생이라면 문제집을 1~2권을 반복해서 몇 번 풀면 시험에서 90~100점을 받는 것이 그리 어렵지 않을 것이다.

하지만 고등학교 수학은 중학교 수학과는 체급이 다르다. 우선 중학교 수학보다 고등학교 수학에서 다루는 내용이 훨씬 더 어려울뿐 아니라 문제의 유형에도 제한이 없다. 신유형이 끝없이 쏟아진다. 고난도 문항의 경우 풀이가 100줄이 넘는 문항도 출제된다. ⁴⁾

한 마디로 고등학교 수학은 중학교 수학과 비교할 수 없을 정도로 내용도 훨씬 어렵고 문제의 유형도 다양할 뿐 아니라, 풀이 또한 매우 길고 복잡하다. 또한 문제집을 7~8권씩 푼다고 해도 시험에서 생소한 형태의 고난도 문제를 맞닥뜨리게 된다. 때문에 학습 능력이 매우 뛰어난 극소수에 속하지 않는다면, **고등학교 수학에서 성적 폭락은 예고된 참사인 것이다.**⁵⁾⁶⁾

과목	1학기						
	평균	표준 편차	성취도별분포비율				
			A	B	C	D	E
화법과 작문 (2)	55.1	24.7	35.6	17.8	13.3	20.0	13.3
언어와 매체 (2)	61.8	18.7	33.0	26.3	23.0	15.2	2.6
심화 국어 (4)	65.8		32.2	28.4	39.4		
실용 수학 (2)	56.8		31.0	19.0	50.0		
기하 (2)	62.5		22.4	46.6	31.0		
수학과제 탐구 (2)	55.6		16.7	30.2	53.1		

과목	1학기						
	평균	표준 편차	성취도별분포비율				
			A	B	C	D	E
화법과 작문 (4)	47.7	24.8	4.3	10.9	8.7	8.7	67.4
언어와 매체 (4)	62.1	15.0	0.8	12.4	19.7	28.7	38.5
고전 읽기 (3)	53.7		17.6	22.4	60.0		
미적분 (3)	45.5	23.7	2.8	4.5	10.9	11.7	70.1
기하 (3)	51.7		30.9	12.0	57.1		
경제 수학 (3)	25.7		11.4	6.8	81.8		

하지만 너무 걱정하지 말자. 수학을 망치는 이유에 대해 이야기하는 것은 겁을 주기 위함이 아니라 효과적인 해결책을 찾기 위함이니까! 이 책을 끝까지 읽고 나면, 예고된 참사를 해결하는데 즉각 적용 가능한 자신만의 방법을 찾게 될 것이다.

⁴⁾평가원 모의고사의 문항 중 경우 풀이가 정확히 100 줄인 것도 있었다.

⁵⁾다음의 두 표는 강남지역 자사고인 세화고와 휘문고의 2023년 3학년 1학기 내신 성적 통계이다. 수학 교과 평균이 25.7~62.5점 정도인 것을 확인할 수 있다. 물론 이 또한 학교마다 다르고, 같은 학교에서도 시험 때마다 차이가 있을 것이다.

⁶⁾출처 : 학교알리미

3. 중학교 때처럼 고등학교 때도 전 과목을 잘하는 게 가능할까?

먼저 통계적인 관점에서 생각해 보자. 계산의 편의를 위해 인문계 고등학교에 진학하는 중학생의 각 교과별 A학점(90~100점)의 비율이 50%라고 하자.⁷⁾ 한편, 고등학교의 교과별 1등급 비율은 4%이고 2등급 비율은 7%이다.

따라서 중학교 수학에서 A학점을 받았던 학생이 고등학교 수학에서 1등급을 받을 확률은 8%이고, 2등급을 받을 확률은 14%이다.⁸⁾ 이때, 전체 교과가 8과목이라 하면 중학교 전 과목에서 A를 받았던 학생이 고등학교 전 과목에서 1등급을 받을 확률을 단순 계산하면

$$\left(\frac{8}{100}\right)^8 = 0.00000017\%$$

가 된다. 전 과목에서 1등급 또는 2등급 받을 확률을 생각하면

$$\left(\frac{22}{100}\right)^8 = 0.00054876\%$$

가 된다. 물론 이는 실제 수치와는 거리가 멀다. 왜냐하면 위 수치가 각 과목별 성취가 모두 독립적이라는 잘못된 가정으로부터 나온 것이기 때문이다. 수학 1등급을 받은 학생이 과학 1등급을 받을 확률이 8%이고, 한국사 1등급을 받은 학생이 세계사 1등급을 받을 확률이 고작 8%겠는가?

이번에는 이 확률을 10배로 높여서, 고등학교에서 수학 1등급을 받은 학생이 다른 과목에서 1등급을 받을 확률이 각각 80%라고 가정해 보자.⁹⁾ 이때, 고등학교 8과목에서 모두 1등급을 받을 확률은

$$\frac{4}{100} \times \left(\frac{8}{100}\right)^7 = 0.8388608\%$$

이다. 채 1%가 되지 않는다. **전교생이 250명인 학교에서 전 과목이 1등급인 학생은 고작 2명 뿐이란 것이다.** 중학교 때처럼 고등학교 때도 전 과목을 잘하는 게 가능하겠는가?

⁷⁾이는 중학교 교과별 A학점의 비율이 $\frac{1}{3}$ 이고, 전체 중학생 중 성적이 우수한 순서대로 $\frac{2}{3}$ 만 인문계 고등학교에 진학했다고 가정으로부터 나온 수치이다.

⁸⁾중학교 수학에서 A학점을 받은 학생들이 고등학교 수학에서 1등급과 2등급을 휩쓸 것이라고 가정하고 계산했다.

⁹⁾이 확률을 99%로 높이고 계산해도 8과목 모두 1등급을 받을 확률은 4%를 넘을 수 없다.

이번에는 중학교와 고등학교 교과 과목의 수준 차이에 초점을 맞추고 생각해 보자. **고등학교에서 공부하는 과목들은 중학교의 과목과는 비교할 수 없을 만큼 양도 많고 난이도 역시 높다. 때문에 중학교에서 90점을 받은 정도로 공부했다 하더라도 고등학교에서는 60점도 받지 못할 수도 있다.**

이를 운동에 비유해 보자. 축구, 농구, 테니스, 탁구, 쇼트트랙, 스피드 스케이팅, 태권도, 유도. 8종목을 모두 잘 하는 것이 가능할까? 당신이 어느 정도 운동에 재능이 있다면 각 종목의 기본기를 익히거나 취미 수준의 실력을 갖추는 것은 가능할 수도 있다. 하지만 아마추어 대회에 나가거나 전국체전에 나갈 정도로 실력을 갖추는 것이 가능할까? 8가지 종목을 모두 훈련한다면, 모든 종목을 잘하기는커녕 하나도 제대로 하지 못할 가능성이 높다.

중학교의 각 과목에서 90점을 받는 것은 각 종목의 기본기를 익히거나 취미 수준의 실력을 갖추는 것으로 생각할 수 있고, 고등학교의 각 과목에서 90점을 받는 것은 각 종목의 아마추어 대회에 나가거나 전국체전에 나갈 정도로 실력을 갖추는 것으로 생각할 수 있다. 공부에 어느 정도 재능이 있는 학생이 충분한 시간을 들여 노력한다면 중학교의 전 과목에서 90점을 받는 것이 가능할 수도 있다. 하지만 고등학교의 각 과목에서 90점을 받는 것은 어떨까? 전 과목을 모두 공부한다면, 모든 과목을 잘하기는커녕 하나도 제대로 하지 못할 것이다. 아마 학년이 올라갈수록 성적이 떨어질 것이다. 당신이 학습 능력이 탁월한 극소수에 속하지 않는다면 말이다.

공부에 특별한 재능이 있는 경우가 아니라면 고등학교에서 3년 내내 전 과목을 잘하는 것은 불가능에 가깝다. 그럼에도 불구하고 대다수의 학생들이 전 과목을 잘하기 위한 공부를 한다. 이것이 대다수의 학생들이 공부를 망치는 주된 이유 중 하나이다.

그렇다고 좌절하지는 말자. 고등학교에서 3년 내내 전교 1등을 해야 하는 것은 아니니까. 고등학교 1학년 때 성적이 5등급이어도 SKY를 포함한 최상위권 대학에 합격할 수 있다. 그것도 수시로! 중요한 것은 평균 등급이나 석차가 아니다. 이에 대해서는 이 책의 중반부와 후반부에서 알아볼 것이다.

2. 수학에 재능이 없어서일까?

고등학교 수학에서 1등급을 받으려면 수학적 재능이 있어야 할까? 결론부터 말하자면 그렇지 않다. **재능은 양날의 검이다. 재능을 과신하면 결국엔 실패할 것이다. 반면, 재능이 없더라도 차근차근 실력을 쌓아나가면 성공할 것이다.** 나는 이것이 교육의 힘이라고 믿는다.¹⁰⁾ 재능의 양면성에 대해 자세히 알아보자.

1. 재능이 재앙이 될 수도 있다.

재능이 재앙이 될 수도 있을까? 학생 A와 B의 사례를 살펴보자.

1. 학생 A의 중학교 수학 성적은 100점이었다. 학생 A는 “(중학교) 수학 문제를 보면 해결 아이디어가 술술 떠오른다.”고 했고, 답도 척척 잘 맞혔다. 하지만 고등학교 입학 후, “더 이상 문제의 해결 아이디어가 떠오르지 않는다.”고 했다. 더 이상 문제를 척척 풀지 못했다. 학생 A의 고등학교 1학년 수학 성적은 1학기 60점(5등급), 2학기 30점(7등급)으로 곤두박질쳤다.¹¹⁾¹²⁾
2. 학생 B는 고등학교 3년 내내 압도적인 수학 1등이었다. 고난도 수학 문제도 바로바로 답을 내는가 하면, 각종 수학 경시에서도 두각을 나타냈다. 학생 B는 항상 자신만만했다. 학생 B의 친구들은 “학생 B가 천재 같다.”고 했다. 학생 B는 우수한 성적으로 고등학교를 졸업하고 서울대학교 수학과에 진학했다. 하지만 대학 입학 후 1년도 채 되지 않아 수학을 포기했다.¹³⁾

중학교 때는 수학에 탁월한 재능이 있는 것 같았던 학생 A와 천재 같았던 학생 B는 각각 고등학교와 대학교에 진학한 후 제대로 손도 써보지 못하고 급격하게 무너졌다. 대체 어찌된 일일까?¹⁴⁾

¹⁰⁾ 어차피 재능 있는 학생은 성공하고 재능 없는 학생은 실패할 운명이라면 교육이 왜 필요하겠는가?

¹¹⁾ 수업 교재를 7번이나 반복해서 풀었는데도 성적이 떨어졌다.

¹²⁾ 1학년 2학기 중간고사 30점을 맞은 이후, 나와 함께 공부했고, 수시로 연세대학교에 진학했다. 수능 수학 점수는 96점으로 1등급이었다.

¹³⁾ 학생 B는 나보다도 수학 센스가 뛰어났다. 하지만 나는 학생 B가 수학과에 진학하면 수학을 포기하게 될 것이라고 생각했다. 그래서 학생 B가 고등학교 1학년일 때부터 수학과는 쳐다보지도 말고, 공대나 경영학과에 진학할 것을 권유했다. 굳이 수학과에 진학할 것이라면 공부 방법을 바꾸어야 한다고 했다. 하지만 압도적인 수학 1등이었던 학생 B는 내 충고를 괜히 하는 이야기 정도로 흘려들었던 것 같다. π π

¹⁴⁾ 이에 대해 각자 충분히 고민해 보고 다음 페이지를 보면 좋을 것 같다!

나는 학생 A와 학생 B의 재능이 오히려 독이 된 것이라 생각한다. 떠오른 아이디어를 (배운 것에 근거해서) 검증하는 절차 없이 ‘대충’ 생각나는 데로 풀어도 100점이니까, ‘대충’ 생각나는 데로 푸는데 실력이 쌓이겠는가? 기초가 쌓이지 않으면 타고난 재능을 넘어서는 수준에 도달하는 순간 무너지게 된다. 재능을 넘어서는 수준에서는 더 이상 그럴듯한 아이디어가 떠오르지 않기 때문이다.

초등학교 때는 수학을 잘 했는데 중학교에서 무너질 수도 있고, 학생 A처럼 중학교 때는 수학을 잘 했는데 고등학교 수학에서 무너질 수도 있다. **타고난 재능에 따라 시점에 차이가 있을 뿐, 재능을 과신해서 대충대충 공부한다면 기초를 쌓지 못해 결국 무너지고 말 것이다.**

2. 수학에 재능이 있어야만 수학을 잘할 수 있을까?

당신의 목표가 세계적인 수학자가 되는 것이라면 그럴 수도 있다. 하지만 당신의 목표가 SKY에 진학하는 것이라면 그렇지 않다. 당신의 목표가 더 좋은 변호사나 의사가 되는 것이라면 그렇지 않다.¹⁵⁾ **중요한 것은 재능이 아니라 ‘실력이 쌓이는 방법’으로 ‘꾸준히 노력’하는 것이다.**

실력이 쌓이는 공부 방법에 대해서는 이 책에서 알려줄테니, 당신은 그저 꾸준히 노력하기만 하면 된다.¹⁶⁾ 그러니 수학에 재능이 없다고 포기하자 말자!

¹⁵⁾ 수학 자체가 목표라면 재능이 필요할 수도 있지만, 수학이 목표를 이루기 위한 수단이라면 재능이 없어도 괜찮다.

¹⁶⁾ 이 책에서는 누구나 쉽게 이해하고 적용할 수 있는 공부 방법, 수학뿐 아니라 다양한 분야에 적용할 수 있는 효과적인 공부 방법에 대해 알려줄 것이다. 수학의 구조와 원리를 바탕으로 보다 높은 수준에서 이해하고 적용할 수 있는 공부 방법은 전자책 “**수학의 비밀**” 시리즈에서 다룬다.

3. 열심히 공부했는데 아는 게 없다?

열심히 공부하는데도 자꾸 성적이 떨어진다면 어떻게 해야 할까? 열심히‘만’ 하는 것은 정답이 아니다. **실력이 쌓이지 않는 방법으로 열심히‘만’ 공부한다면 더 크게 좌절할 뿐이다.** 열심히 공부하는데도 실력이 쌓이지 않는 이유에 대해 알아보도록 하자!

1. 쉽다고 착각하라. 수학을 망칠 것이다!

열심히 공부하는데도 실력이 쌓이지 않는 주된 이유 중 하나는 **사실 잘 모르는데도 불구하고 잘 안다고 ‘착각’하기 때문이다.** 믿지 못하겠다면 다음 물음에 답해 보도록 하자.

1. 다항식의 정의는 무엇인가?
2. 집합의 정의는 무엇인가?
3. 등식 $ax = b$ (a, b 는 상수)를 만족하는 x 의 값은?

중고등학교 과정을 한 번이라도 공부한 학생이라면 다항식의 정의, 집합의 정의, $ax = b$ 의 해법에 대해서 공부한 적이 있을 것이다. 이중 대부분의 경우는 수업에서 다항식의 정의에 대해 들었을 때, 교과서나 문제집에서 집합의 정의를 보았을 때, 또는 $ax = b$ 의 해법을 접했을 때, 이것이 어렵다고 생각하지 않았을 것이다. 아마도 매우 쉽고 간단하게 이해했다고 생각했을 것이다.

하지만 결과는 어떤가? 이 세 가지 질문에 모두 제대로 답했는가? 혹시 다항식의 정의를 “항이 여러 개인 식”이라고 답했다면, 집합의 정의를 “수의 모임” 또는 “어떤 기준을 만족하는 것들의 모임”이라고 답했다면 모두 틀렸다. 등식 $ax = b$ 를 만족하는 x 의 값을 “ $\frac{b}{a}$ ”라고 답했다면 이 또한 틀렸다.

다항식의 정의에 대해 제대로 답하지 못했다면, 집합의 정의나 $ax = b$ 의 해법에 제대로 답하지 못했다면, 이에 대해 사실 잘 모르는데도 불구하고 잘 안다고 ‘착각’했기 때문일 가능성이 높다. **이처럼 쉽고 간단한 것조차도 제대로 이해하지 못했음에도, 제대로 공부하고 있다고 착각한다면 실력이 쌓이겠는가?** 이보다 훨씬 어려운 개념이나 문제를 제대로 이해할 수 있겠는가? 아마 아닐 것이다.

열심히 공부하고도 수학을 망치고 싶은가? 그렇지 않다면 당신이 완전하게

아는 것과 잘 모르지만 안다고 ‘착각’하고 있는 것이 무엇인지부터 알아야 한다. 완전하게 아는 것과 안다고 착각하는 것을 어떻게 구분할 수 있는지, 완전하게 학습하려면 어떻게 해야 하는지는 이 책의 제3장에서 알아보도록 하자.

2. 잘못된 학습, 불완전 학습과 완전 학습

간단한 예제를 통해 학습의 세 가지 수준에 대해 알아보자.

[예제1] 두 자연수 3^{20} 과 4^{15} 의 대소를 비교하시오.

계산하지 말고 위 [예제1]에 즉각 답해보아라. 수업에서 학생들에게 위 예제를 제시한 후, 계산하지 않고 즉각 답해보라고 하면 대부분의 학생들은 제대로 답하지 못한다. 하지만 칠판에

$$3^{20} = 9^{10} \text{이고 } 4^{15} = 8^{10}$$

을 적어주고, 다시 답해보라고 하면 거의 모든 학생들이 3^{20} 이 4^{15} 보다 크다고 정확하게 답한다. 왜 그럴까?

학생들에게 3^{20} 과 4^{15} 은 비교하기 어렵지만 9^{10} 과 8^{10} 은 비교하기 쉬운 이유가 무엇인지 생각해 보라고 하면, 대부분의 학생들은 3^{20} 과 4^{15} 은 밑과 지수가 모두 다르기 때문에 비교하기 어렵지만 9^{10} 과 8^{10} 은 지수는 같고 밑만 다르기 때문에 비교하기 쉽다고 답한다.¹⁷⁾ 이를 일반화하면

“여러 가지를 동시에? 어려우면 하나씩”

이라는 문제의 핵심 아이디어를 얻을 수 있다.¹⁸⁾

이제 위 [예제1]에 대한 세 가지 학습 수준을 다음과 같이 생각할 수 있다.

1. 잘못된 학습 : 위 예제를 제대로 풀지 못하면 잘못 학습한 것이다.
2. 불완전 학습 : 기계적으로 풀이‘만’ 할 수 있다면 불완전 학습한 것이다.
3. 완전 학습 : 풀이뿐 아니라 핵심 개념과 아이디어까지 이해했다면 완전 학습한 것이다.

¹⁷⁾수학을 어려워 하는 학생들도 대부분 잘 대답한다!

¹⁸⁾밑과 지수가 서로 다르면? 밑과 지수를 동시에 생각해야 하기 때문에 어렵다. 하지만 지수가 같으면? 밑만 생각하면 되기 때문에 쉬운 것이다.

잘 모르는데 잘 안다고 착각했다면 ‘잘못’ 학습한 것이다. 잘못된 학습은 실패로 직결된다. 그렇다면 불완전 학습은 어떨까?

중학교의 수학은 문제의 유형이 제한적이기 때문에 문제집 1~2권 정도만 기계적으로 풀 수 있으면, 중학교 수학 시험에서는 쉽게 90~100점을 받을 수 있다. 하지만 고등학교 수학의 경우 문제의 유형에 제한이 거의 없기 때문에 문제집을 7~8권 이상 푼다고 해도 시험에서 생소한 형태의 고난도 문제를 맞닥뜨리게 된다. 때문에 학습 능력이 매우 뛰어난 극소수에 속하지 않는다면, 불완전 학습은 곧 성적 폭락으로 이어진다.

수학을 망치고 싶지 않다면 완전 학습하라!¹⁹⁾ 고등학교 수학 문제의 유형에는 제한이 거의 없지만, 핵심 개념이나 아이디어는 몇 개 되지 않기 때문에 완전 학습한다면 매우 쉽게 성공할 수 있다. 예를 들어, 앞의 예제에서 얻은 핵심 아이디어인

“여러 가지를 동시에? 어려우면 하나씩”

는 사실 모든 고난도 문제에 즉각 적용 가능한 치트키이다. 사실 이거 하나만 잘 해도 고난도 문제를 쉽게 풀 수 있다.²⁰⁾²¹⁾ 이에 대한 자세한 설명이 궁금하다면 다음 링크를 클릭하기 바란다.

거의 모든 고난도 문제에 적용 가능한 치트키!

<https://blog.naver.com/math-fish/222923048780>

¹⁹⁾완전 학습을 위해서는 핵심 개념과 핵심 아이디어가 무엇인지 파악해야 한다. 완전 학습하는 방법에 대해서는 이 책의 제3장에서 자세히 다룰 것이다.

²⁰⁾간단한 것 하나만 다루는 문제가 어려울 수 있을까? 아마 무척 쉬울 것이다. 바꾸어 말하면, 고난도 문제는 다루는 대상이 복잡하거나 여러 개의 대상을 다루는 문제뿐이다.

²¹⁾복잡한 대상을 다루기 어려운 이유는 무엇일까? 그것은 그 대상이 여러 가지 요소로 이루어져 있기 때문이다. 예를 들어 3^{20} 에 대해 생각해 보자.

$$3^{20} = \underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{20\text{번}}$$

이다. 즉, 20개의 3으로 이루어져 있기 때문에 복잡한 것이다. 또 다른 예로, 분수식 $\frac{2^x + x + 1}{x^2 + 2}$ 은

$$2^x, x, 1, x^2, 2$$

의 5가지로 이루어져 있기 때문에 복잡한 것이다. 이 분수식의 $x = 1$ 에서의 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x + x + 1}{x^2 + 2}$ 를 계산할 때, $\lim_{x \rightarrow 1} 2^x = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 4$, $\lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$ 임을 이용하여 계산하는 것도 여러 가지를 동시에 다루는 것보다 하나씩 하는 것이 쉽기 때문이다.

즉, 대상이 복잡하다는 것은 그 대상이 여러 가지 요소로 이루어져 있다는 것이다. 즉, 대상이 복잡해서 어렵다는 것은 다루는 대상이 여러 개라서 어렵다는 것으로 생각할 수 있다. 따라서 고난도 문제는 다루는 대상이 여러 개인 문제 뿐이다.

어떻게 수포자에서 서울대 수학 박사가 됐을까?

나는 수포자였다. 영어는 수학보다 심했다. 다음은 내가 중학교 시험에서 받은 점수다.

“수학 48점, 그리고 영어 7점”

고등학교 입학 후에도 상황은 크게 다르지 않았다. 나는 모의고사에서 수학과 영어 모두 4~6등급을 벗어나지 못했다. 나는 무언가 잘못됐다고 생각했지만, 무엇이 잘못됐는지, 어떻게 해야 할지 몰라 답답해했다.

나와 비슷한 처지에 있었던 나의 친구들은 하나같이 학습량을 늘렸지만, 대부분은 갈수록 성적이 떨어졌고 차츰 수학을 포기하기 시작했다. 나의 친구들처럼 열심히 ‘만’ 공부하는 것은 답이 아닌 것 같았다. 나는 본질에 대해 고민했다.

1. 대학은 어떤 학생을 뽑을까?
2. 시험은 왜 보는 걸까?

본질에 집중하니 답은 의외로 간단했다. 나는 이 질문에 대한 답을 바탕으로 공부 방법을 개선했고, 단 2개월 만에 모의고사에서 수학 1등급을 받았다.

공부 방법을 개선하고 얼마 지나지 않아 나는 수학으로부터 자유로워졌다. 수학 때문에 스트레스 받지도 않았고, 수학을 공부하는데 따로 시간을 투자하지 않아도 시험에서 좋은 성적을 거둘 수 있게 됐다. 수포자였던 내가 2개월 만에 해낸 것이라면 당신도 할 수 있을 것이다. 이 장에서는 수포자였던 내가 어떻게 단기간에 ‘수학적 자유’를 달성했는지 함께 알아보자!¹⁾

¹⁾이 책에서는 누구나 쉽게 이해하고 즉각 적용할 수 있는 공부 방법에 대해 다루고, 수학의 구조와 원리를 바탕으로 보다 높은 수준에서 이해하고 적용할 수 있는 공부 방법은 전자책 “**수학의 비밀**” 시리즈에서 다룬다.

1. 입시에서 가장 정확한 네비게이션은 대학의 ○○이다.

함께 상상해 보자. 당신은 망망대해에서 표류중이다. 그저 열심히 노‘만’ 젓는다면 어떻게 될까? 아마도 당신의 노력은 헛수고가 될 것이다. 아주 운이 좋다면 목적지에 도착할 수도 있지만 잘못된 방향으로 떠내려갈 가능성이 훨씬 높다.

입시도 마찬가지다. 열심히‘만’ 공부하는 것은 답이 아니다. 대학의 욕망을 모르면 당신의 노력은 헛수고가 될 가능성이 높다. **대학 입시에서 성공하고 싶다면, 가장 정확한 네비게이션인 대학의 욕망을 따라가야 한다.**

1. 대학의 욕망은 무엇일까?

우리나라 대학 입시제도는 그야말로 변화무쌍하다. 하지만 입시제도가 아무리 변화무쌍해도 변하지 않는 것이 하나 있다. 그것은 바로

“우수한 학생을 선발하고자 하는 대학의 욕망”

이다. **대학 입장에서 입시의 목적은 단 하나, 우수한 학생을 선발하는 것뿐이다.** 당신의 스펙이 나쁘다고 하더라도, 우수한 학생이라는 것만 입증할 수 있다면 대학은 어떻게든 당신을 선발하기 위해 노력할 것이다. 당신의 스펙이 아무리 좋더라도, 당신이 우수하지 않다는 것을 들킨다면 대학은 어떻게든 당신을 떨어뜨리고자 할 것이다.²⁾

그렇다면 어떤 학생이 우수한 학생일까? 다음 중 우수한 학생을 골라보아라.

1. 영어로 의사소통은 할 수 없지만 영어 지문은 잘 외우는 학생
2. 익숙한 문제는 빠르게 잘 풀지만 생소한 문제는 전혀 풀지 못하는 학생
3. 배운 것을 바탕으로 논리적으로 사고하는 학생
4. 유연하게 사고하는 학생

모두가 같은 선택을 했을 것이라 생각한다. 대학 입시에 성공하고 싶다면 대학이 원하는 우수한 학생이 되는데 초점을 맞추고 공부해야 한다.

²⁾제도적으로 가능한 선에서 우수한 학생은 최대한 선발하고, 그렇지 않은 학생은 떨어뜨리려고 노력한다는 이야기다!

2. 시험은 왜 보는 걸까?

토플(TOEFL)을 예로 들어보자. 토플 시험의 목적은 무엇일까? 아마도 토플 시험의 목적은 영어로 읽고, 쓰고, 듣고, 말할 수 있는지를 평가하는 것이다.³⁾ 미국의 대학은 (영어가 모국어가 아닌 학생들의) 토플 점수를 통해 영어로 의사소통이 가능한지를 평가한다.

그렇다면 대학수학능력시험(수능)의 목적은 무엇일까? 수능의 목적은 수험생들이 학습 목표를 얼마나 달성했는지를 평가하는 것이다. 그리고 이를 통해 대학에서 우수한 학생을 선발할 수 있도록 하는 것이다. 내신뿐 아니라 면접이나 논술도 마찬가지다. (적어도 입시에서만만큼은) 시험은 우수한 학생을 선별하는 도구일 뿐이다. 이를 알고 나면 어떤 문제가 시험에 출제될지, 어떻게 공부해야 할지 알 수 있게 된다.

수학을 예로 들어보자. 다음은 연세대학교 면접구술시험 문제이다.⁴⁾⁵⁾

[예제2] 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고, 다음을 만족하며, $f(0) = 1$ 인 함수 $f(x)$ 가 존재하는가?

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x^2f(x)dx = 0$$

만약 존재하면 예를 하나 찾고, 그렇지 않다면 이유를 설명하시오.

위 [예제2]는 연립일차방정식의 해를 판별하는 문제다.⁶⁾ 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c + 1$$

로 놓고, 연립일차방정식을 풀면 $f(x)$ 가 주어진 조건을 모두 만족시키도록 하는 a, b, c 의 값을 쉽게 구할 수 있다.

하지만 연세대학교에 지원한 학생 중 대부분은 이 문제를 풀지 못했다. 이는 지원자들이 연립일차방정식의 해법을 몰랐기 때문이 아니다. 지금까지 접했던

³⁾토플은 reading, writing, listening, speaking의 네 개 영역으로 구성되어 있다.

⁴⁾2019학년도 수시모집 특기자전형 중 과학공학인재계열·IT명품인재계열

⁵⁾자세한 풀이가 궁금하다면 다음 링크를 클릭하기 바란다.

문자의 개수 vs 식의 개수 (feat. 연세대학교 면접 기출)

<https://blog.naver.com/math-fish/223218902405>

⁶⁾방정식의 해를 판별하는 것은 매우 중요한 학습 목표 중 하나이다.