1. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a, b)$가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다. (나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a \times b$의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$) [4점]

(2022년 3월 21번)

1. **[출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.**

점 $A(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 $B(b, a)$이다.

조건 (가)에서 점 $A(a, b)$가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이므로

$b=\log_2(a+2)+k$ …… ㉠

조건 (나)에서 점 $B(b, a)$가 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위의 점이므로

$a=4^{b+k}+2$ …… ㉡

㉠에서

$b-k=\log_2(a+2)$, $2^{b-k}=a+2$

$a=2^{b-k}-2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 정리하면

$4^{b+k}+2=2^{b-k}-2$

$4^k\times4^b-2^{-k}\times2^b+4=0$ …… ㉣

조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나이므로 방정식 ㉣을 만족시키는 실수 b는 오직 하나이고

$2^b=t\ (t>0)$으로 놓으면 t에 대한 이차방정식

$4^kt^2-2^{-k}t+4=0$ …… ㉤

은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t에 대한 이차방정식 ㉤의 두 근의 곱은 $\frac{4}{4^k}=4^{1-k}>0$이므로 t에 대한 이차방정식 ㉤이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉤의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 한다.

$D=(-2^{-k})^2-4\times4^k\times4$

$=4^{-k}-16\times4^k=0$

위의 방정식의 양변에 4^k을 곱하여 정리하면

$2^{4k+4}=1$, $k=-1$

㉤에 대입하여 정리하면

$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0$, $\frac{1}{4}(t-4)^2=0$

$t=4$

즉, $2^b=4$에서 $b=2$이다.

$k=-1$, $b=2$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$a=4^{2+(-1)}+2=6$

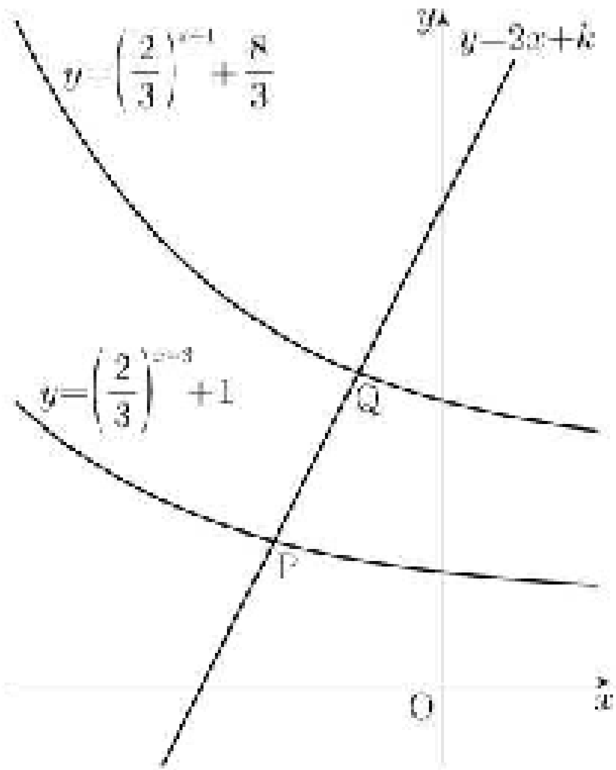
따라서 $a\times b=6\times2=12$

7. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$ 일 때, 상수 k의 값은? [4점]

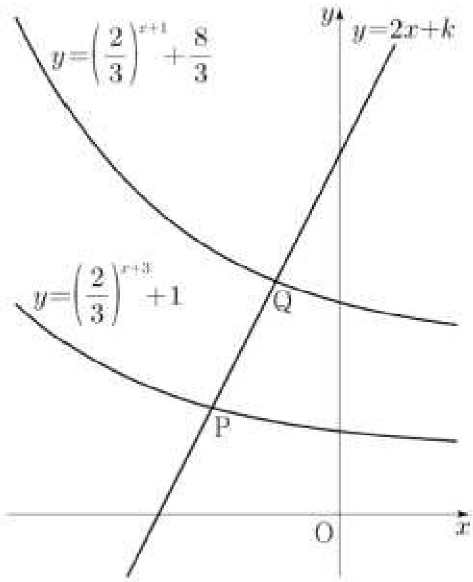
① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



(2022학년도 수능 9번)

7. **출제의도** : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, $q(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k)$, $\mathrm{Q}(q,\ 2q+k)$

로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로

$q-p=1$

즉, $q=p+1$이다.

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ …… ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=2p+k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

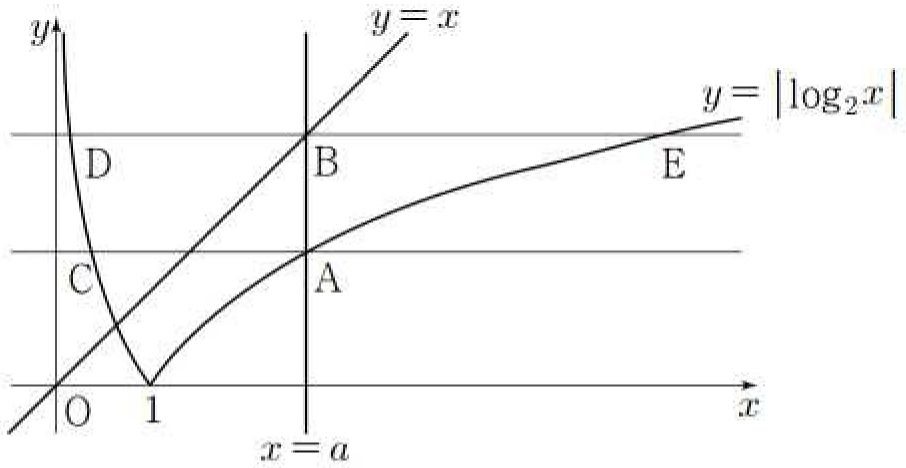
$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\frac{17}{3}$

정답 ④

9. 그림과 같이 곡선 $y=|\log_2 x|$와 직선 $y=x$가 있다. 직선 $x=a(a>1)$이 곡선 $y=|\log_2 x|$와 만나는 점을 A, 직선 $y=x$와 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=|\log_2 x|$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=|\log_2 x|$와 만나는 두 점을 각각 D, E라 하자. $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{15}{4}$일 때, 선분 CA의 길이는? [4점]



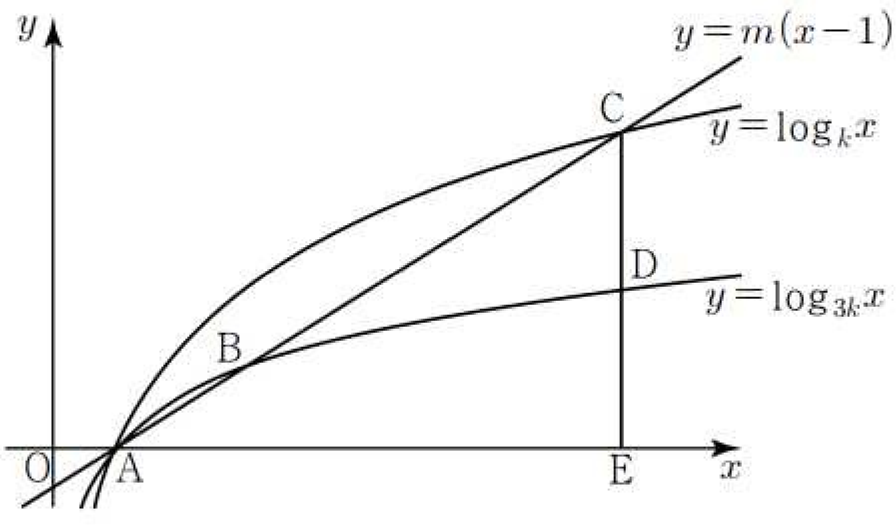
① $\dfrac{9}{8}$ ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{11}{8}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{13}{8}$

(2017년 11월 가형 17번)

11. $k>1$ 인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.
(나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오. [4점]

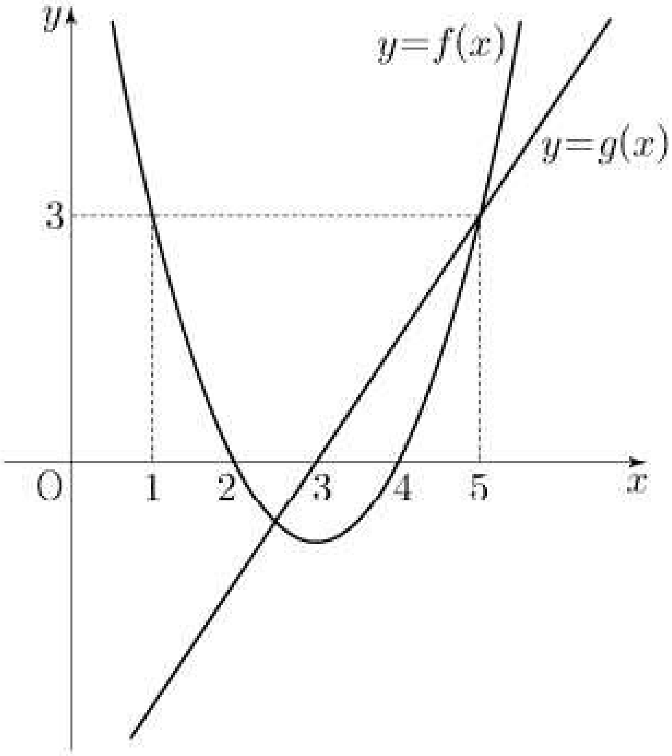


(2020년 7월 가형 27번)

16. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]



① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

(2019학년도 수능 가형 14번)