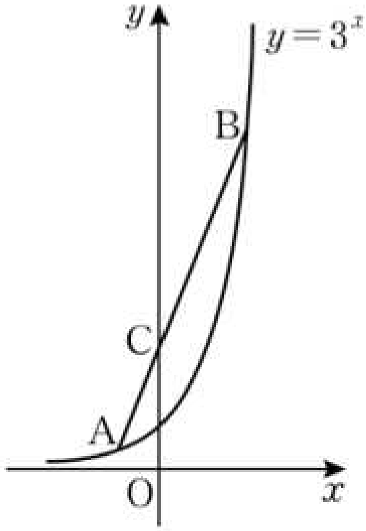
1. 지수함수 $y=3^x$의 그래프 위의 한 점 A의 y좌표가 $\frac{1}{3}$이다. 이 그래프 위의 한 점 B에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C가 y축 위에 있을 때, 점 B의 y좌표는? [3점]

① 3　② $3\sqrt[3]{3}$　③ $3\sqrt{3}$　④ $3\sqrt[3]{9}$　⑤ 9



(2015년 3월 A형 10번)

1. [출제의도] 지수함수의 그래프의 성질을 이해하고 내분점을 이용하여 좌표를 구한다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하자.

점 $\mathrm{A}\left(-1, \frac{1}{3}\right)$이므로 점 $\mathrm{D}(-1, 0)$이다.

y축 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CB}} = 1:2$이므로 $\overline{\mathrm{DO}} : \overline{\mathrm{OE}} = 1:2$가 되어 점 $\mathrm{E}(2, 0)$이다.

따라서 점 B의 y좌표는 9이다.

[다른 풀이]

점 $\mathrm{A}\left(-1, \frac{1}{3}\right)$이고 점 B의 x좌표를 b라 놓으면 점 $\mathrm{B}(b, 3^b)$이다.

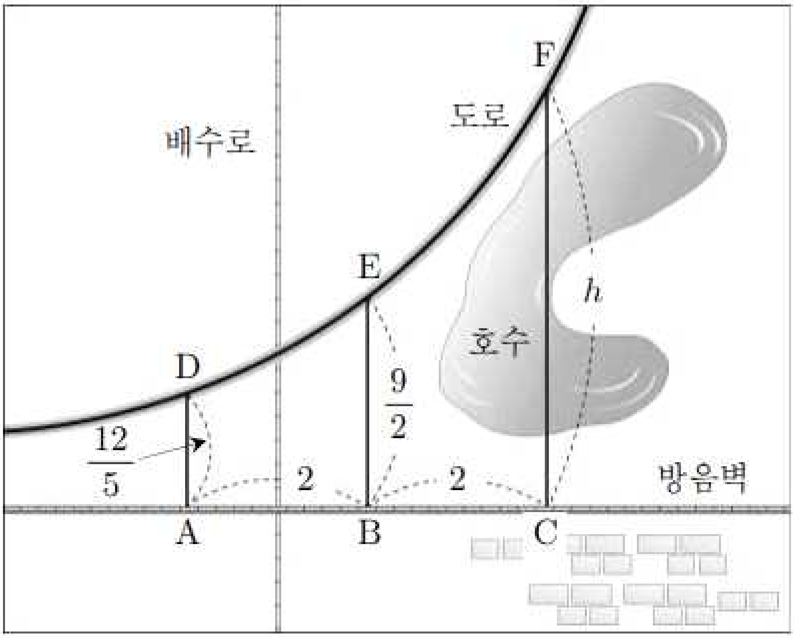
선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 $\mathrm{C}\left(\frac{b-2}{3}, \frac{3^b+\frac{2}{3}}{3}\right)$에 대하여 점 C는 y축 위에 있으므로

$\frac{b-2}{3}=0$에서 $b=2$

따라서 점 B의 y좌표는 $3^2=9$이다.

2. 다음은 어느 지역의 방음벽, 배수로, 도로를 나타낸 평면도이다. 평면도에서 방음벽을 x축, 방음벽과 수직으로 건설된 배수로를 y축으로 할 때, 도로의 중앙선은 곡선 $y=a^x+2\,(a>1)$의 일부로 나타내어진다.

$\overline{AB}=\overline{BC}=2$를 만족시키는 x축 위의 세 점 A, B, C를 지나고 x축에 수직인 세 직선을 그어 곡선 $y=a^x+2$와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{AD}=\frac{12}{5}$, $\overline{BE}=\frac{9}{2}$, $\overline{CF}=h$일 때, 상수 h의 값은? (단, 방음벽, 배수로, 도로의 중앙선의 폭은 무시한다.) [4점]



① $\frac{121}{8}$ ② $\frac{125}{8}$ ③ $\frac{137}{8}$

④ $\frac{141}{8}$ ⑤ $\frac{155}{8}$

(2011년 4월 나형 16번)

2. [출제의도] 지수방정식을 활용한 실생활문제 해결하기

점 A의 x좌표를 k라 하면 점 B의 x좌표는 $k+2$, 점 C의 x좌표는 $k+4$이다.

$a^k+2=\dfrac{12}{5}$에서 $a^k=\dfrac{2}{5}$ …… ㉠

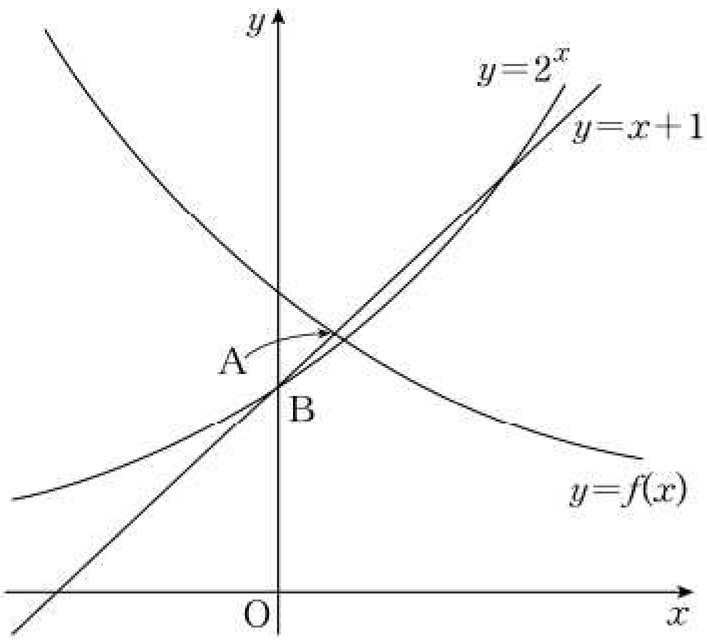
$a^{k+2}+2=\dfrac{9}{2}$에서 $a^{k+2}=\dfrac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$이므로 $a=\dfrac{5}{2}$

$h=a^{k-4}+2=\left(\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right)^4+2=\dfrac{141}{8}$

따라서 $h=\dfrac{141}{8}$

3. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점 A와 점 B(0, 1) 사이의 거리를 k라 할 때, $\frac{1}{k^2}$의 값을 구하시오. [4점]



(2017년 3월 가형 27번)

3. **[출제의도] 지수함수 그래프의 성질을 활용하여 두 점 사이의 거리를 구하는 문제를 해결한다.**

곡선 $y=2^x$ 을 y축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=2^{-x}$ 이고 곡선 $y=2^{-x}$ 은 직선 $y=x+1$ 과 점 $(0, 1)$ 에서 만난다.

곡선 $y=2^{-x}$ 을 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동한 곡선 $y=f(x)$ 는 곡선 $y=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$ 과 일치한다. 직선 $y=x+1$ 은 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동하여도 직선 $y=x+1$ 이 된다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x+1$ 이 만나는 점 A 는 $y=2^{-x}$ 과 직선 $y=x+1$ 이 만나는 점인 $(0, 1)$ 이 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동한 점 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ 이다.

따라서 $k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로 $\frac{1}{k^2}=8$

[다른 풀이]

곡선 $y=2^x$ 을 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동한 곡선은 $y=f(x)$ 이므로 $f(x)=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$ 이다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x+1$ 이 만나는 점의 x좌표는

$x+1=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$

$2^{-x+\frac{1}{4}}=x+\frac{3}{4}$ 에서 $x=\frac{1}{4}$

즉, 점 A 의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ 이다.

따라서 $k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로 $\frac{1}{k^2}=8$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x} & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

(2021년 3월 13번)

4. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

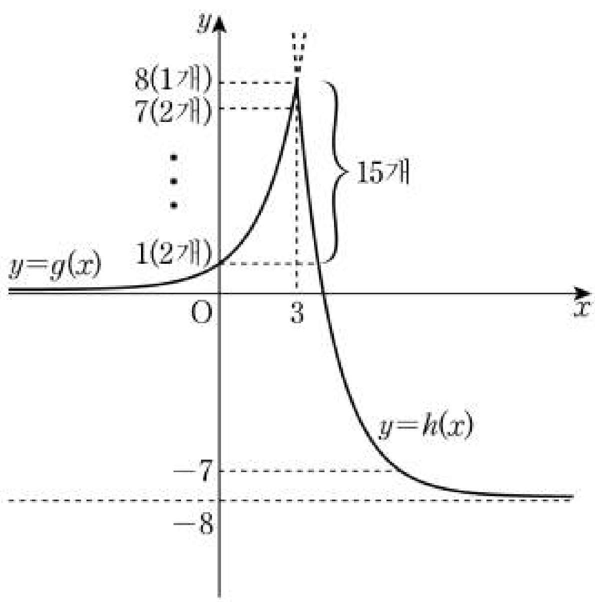
$g(x)=2^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$ 이라 하면

곡선 $y=g(x)$ 의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이고,

곡선 $y=h(x)$ 의 점근선의 방정식은

$y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$ 이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수가 23 이므로 $y \le 0$ 에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 8 이다.

곡선 $y=h(x)$ 의 점근선이 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$ 이므로

$-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$ 은 -8 이상 -7 미만이어야 한다.

즉, $-8leit-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$,

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \le 16$, $4<15<4^{-3-a} \le 4^2$,

$1<-3-a \le 2$, $-5 \le a<-4$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 -5

5. 좌표평면에서 세 점 $(15,\ 4)$, $(15,\ 1)$, $(64,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [4점]

(2010학년도 9월 나형 24번)

5.

$A(15,4)$, $B(15,1)$, $C(64,1)$이라 하자.

곡선 $y=\log_k x$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나기 위한 필요충분조건은
곡선 $y=\log_k x$가 선분 AB 또는 선분 BC와 만나는 것이다.

(i) 곡선 $y=\log_k x$가 선분 AB와 만날 조건

$$1\le\log_k 15\le 4$$

이어야 하므로 $k\le 15\le k^4$

$$\therefore\ 2\le k\le 15$$

(ii) 곡선 $y=\log_k x$가 선분 BC와 만날 조건

$1=\log_k x$에서 $x=k$이므로

$$15\le k\le 64$$

(i) 또는 (ii)를 만족시키는 자연수 k는

$$2\le k\le 64$$

따라서 구하는 자연수 k의 개수는

$$64-2+1=63$$

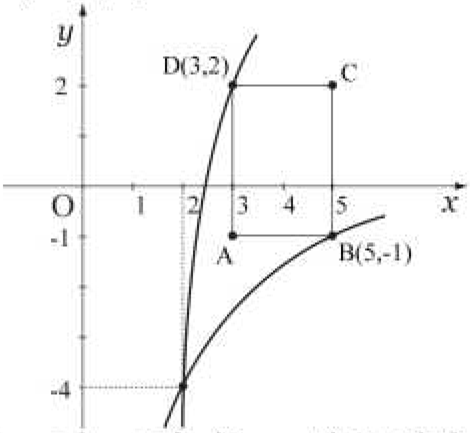
답 63

6. 좌표평면 위의 네 점

A$(3,\ -1)$, B$(5,\ -1)$, C$(5,\ 2)$, D$(3,\ 2)$를 연결하여 만든 직사각형이 있다. 로그함수 $y=\log_a(x-1)-4$가 직사각형 ABCD와 만나기 위한 a의 최댓값을 M, 최솟값을 N이라 할 때, $\left(\dfrac{M}{N}\right)^{12}$의 값을 구하시오. [4점]

(2009년 7월 나형 21번)

6. **[출제의도] 로그함수의 밑의 성질을 이용한 그래프 이해하기**



$y=\log_a(x-1)-4$가 $(2,\ -4)$를 항상 지나므로 직사각형과 만나려면 $a>1$

따라서 $y=\log_a(x-1)-4$는 증가함수이므로

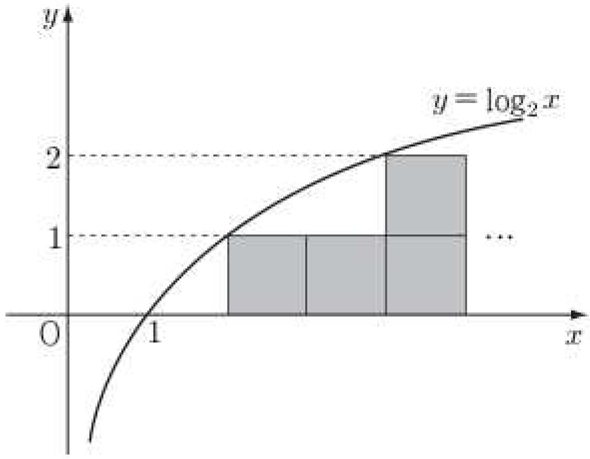
$\mathrm{B}(5,\ -1)$을 지날 때, a의 최댓값 $M=4^{\frac{1}{3}}$

$\mathrm{D}(3,\ 2)$를 지날 때, a의 최솟값 $N=2^{\frac{1}{6}}$

$\left(\dfrac{M}{N}\right)^{12}=64$

7. 그림과 같이 $y=\log_2 x$, $x=30$, $y=0$으로 둘러싸인 영역에 한 변의 길이가 1인 정사각형을 서로 겹치지 않게 그리려고 한다. 이 때, 그릴 수 있는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 최대 개수를 구하시오. (단, 정사각형의 각 변은 x축, y축에 평행하다.)

[4점][2007년 5월]



(2007년 5월 나형 25번)

7.

[출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 정사각형의 개수 세기

$1 \leqq x \leqq 2$일 때 정사각형은 0(개)

$2 \leqq x \leqq 4$일 때 정사각형의 개수는 $2 \times 1 = 2$(개)

$4 \leqq x \leqq 8$일 때 정사각형의 개수는 $4 \times 2 = 8$(개)

$8 \leqq x \leqq 16$일 때 정사각형의 개수는 $8 \times 3 = 24$(개)

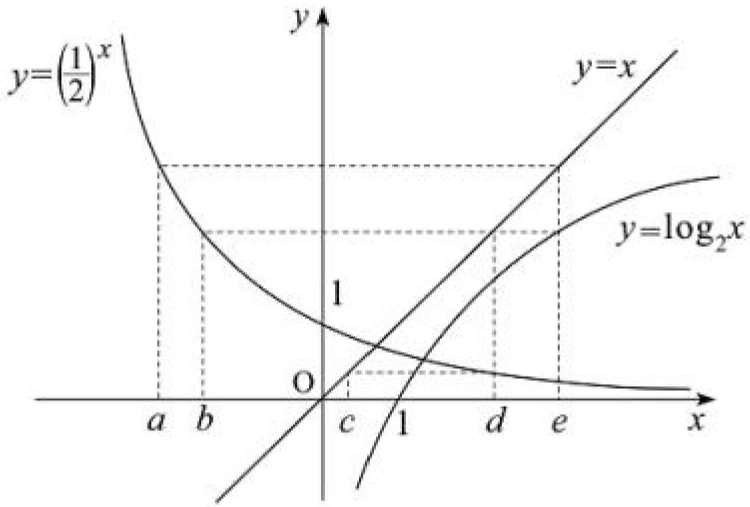
$16 \leqq x \leqq 30$일 때 정사각형의 개수는 $14 \times 4 = 56$(개)

따라서 최대 정사각형의 개수는

$2 + 8 + 24 + 56 = 90$(개)이다.

8. 그림은 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 를 나타낸 것이다.

옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.) [4점]



< 보 기 >

ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^d=c$

ㄴ. $a+d=0$

ㄷ. $ce=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2007년 10월 나형 6번)

8. [출제의도] 함수의 연속성을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

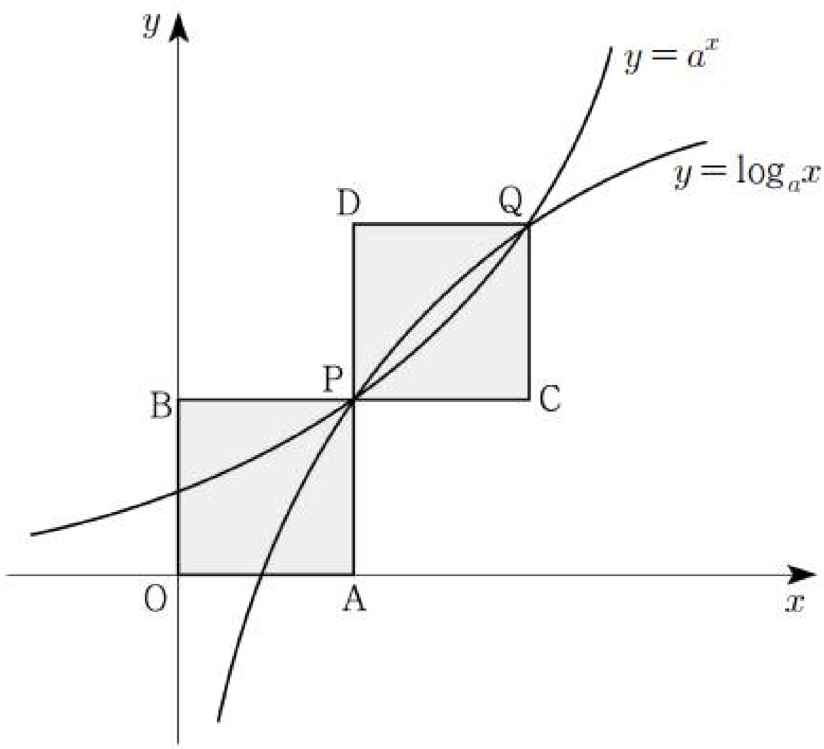
ㄱ. $g(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 이므로 $x=0$ 에서 불연속

ㄴ. $g(x)=\begin{cases}x^2+5 & (x\neq 0)\\ 5 & (x=0)\end{cases}$ 이므로 $x=0$ 에서 연속

ㄷ. $g(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{r=2}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_r\, x^{r-1}+1 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$ 에서

$\lim g(x)=g(0)=1$ 이므로 $x=0$ 에서 연속

9. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.
점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 OAPB와 PCQD는 합동이다. a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

(2012년 10월 나형 16번)

9. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(k,\ k)$, $\mathrm{Q}(2k,\ 2k)$이다.

따라서 $a^k=k$, $a^{2k}=2k$이므로 $2k=a^{2k}=(a^k)^2=k^2$에서 $k=2$이다. $a^2=2$ $\therefore$ $a=\sqrt{2}$

10. 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, 1)$, $\mathrm{B}(27, b)$가 있다.
함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼
평행이동한 그래프가 두 점 A, B의 중점을 지날 때,
상수 m의 값은? [4점]

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

(2018년 11월 가형 15번)

10. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

$\log_3 a = 1$, $\log_3 27 = b$이므로 $a = 3$, $b = 3$

함수 $y = \log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼

평행이동한 함수 $y = \log_3 (x - m)$의 그래프가

두 점 A, B의 중점의 좌표 $(15, 2)$를 지나므로

$\log_3 (15 - m) = 2$

따라서 $m = 6$

11. 곡선 $y=3^{x}+1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$의 점근선이 직선 $x=5$이고 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=3^{x}+1$의 점근선과 만나는 점의 x좌표가 6일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

(2019년 11월 가형 26번)

11. **[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기**

곡선 $y=3^{x}+1$을 직선 $y=x$에 대하여
대칭이동하면 곡선 $y=\log_{3}(x-1)$이고,
곡선 $y=\log_{3}(x-1)$을 x축의 방향으로 a만큼,
y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 곡선이
$y=f(x)$이므로
$f(x)=\log_{3}(x-a-1)+b$
곡선 $y=f(x)$의 점근선이 $x=5$이므로
$a+1=5$, $a=4$
곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=3^{x}+1$의 점근선 $y=1$과
만나는 점의 x좌표가 6이므로 곡선 $y=f(x)$는
점 $(6, 1)$을 지난다.
$1=\log_{3}(6-5)+b$, $b=1$
따라서 $a+b=5$

12. 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

(2016학년도 6월 A형 15번)

12. 출제의도 : 함수의 그래프를 평행이동할 수 있고 역함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\log_3(x-a)+2$ ----㉠

그러므로

$f(x)=\log_3(x-a)+2$

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$는 ㉠에서 x대신 y를, y대신 x를 대입하면 되므로

$x=\log_3(y-a)+2$

$x-2=\log_3(y-a)$

$3^{x-2}=y-a$

$\therefore\ y=3^{x-2}+a$

$\therefore\ f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$

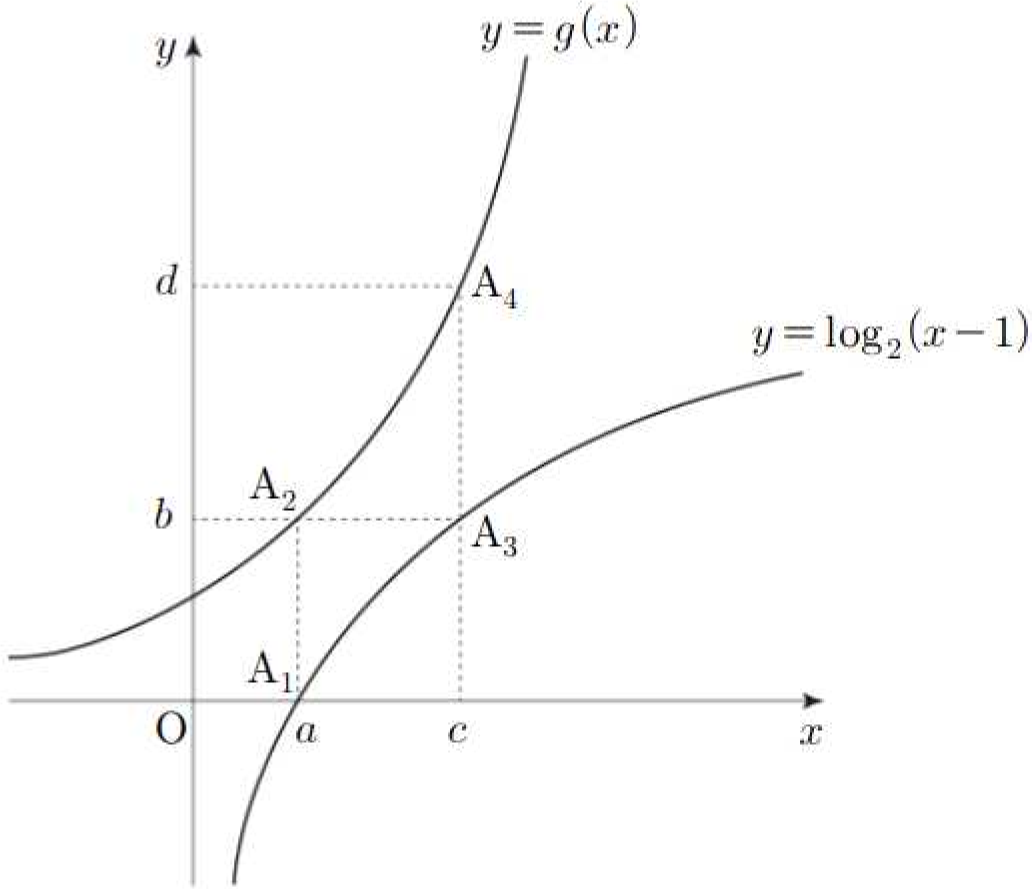
이때, $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$이므로

$a=4$

정답 ④

13. 그림과 같이 함수 $y=\log_2(x-1)$과 그 역함수 $y=g(x)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 $A_1(a, 0)$, 점 A_1을 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 $A_2(a, b)$라 하자. 점 A_2를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프와 만나는 점을 $A_3(c, b)$, 점 A_3을 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 $A_4(c, d)$라 하자.

이때, $\log_{(b-1)}(c-1)(d-1)$의 값을 구하시오. [4점]



(2011년 11월 나형 30번)

13. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

함수 $y=\log_2(x-1)$의 역함수 $g(x)=2^x+1$이다.

역함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2,b)$를 지나므로

$b=g(2)=2^2+1=5$

함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프가 점 $(c,5)$를 지나므로

$5=\log_2(c-1)$, $c-1=2^5$ $c=2^5+1=33$

역함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(33,d)$를 지나므로

$d=g(33)=2^{33}+1$

따라서 $\log_{(b-1)}(c-1)(d-1)=\log_4(2^5 \cdot 2^{33})$

$$=\log_4 4^{19}$$

$$=19$$

14. $y=10^x$의 그래프를 x축 방향으로 k만큼, $y=\log_{10}x$의 그래프를 y축 방향으로 k만큼 평행이동하였더니 두 함수의 그래프가 두 점에서 만났다. 이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{9}+2\log_{10}3$

② $\frac{1}{9}+3\log_{10}3$

③ $9-\log_{10}3$

④ $9-2\log_{10}3$

⑤ $9+\log_{10}3$

(2005년 4월 가형 14번)

14. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이해하기

조건을 만족하는 두 함수는 $y=10^{x-k}$, $y=\log_{10}x+k$이다.

또한 두 함수는 서로 역함수이고 두 함수의 그래프가 만나는 교점은 $y=x$와 $y=\log_{10}x+k$의 그래프와의 교점과 같고 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다.

만나는 두 점을 $P(\alpha, \alpha)$, $Q(\beta, \beta)$(단, $\alpha<\beta$)라 하면 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}$

$\therefore \beta-\alpha=1 \cdots$ ㉠

한편, $\begin{cases} \alpha=\log_{10}\alpha+k & \cdots ㉡ \\ \beta=\log_{10}\beta+k & \cdots ㉢ \end{cases}$ 에서 ㉢−㉡하면

$\beta-\alpha=\log_{10}\beta-\log_{10}\alpha$에서 $\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}=10 \cdots$ ㉣

㉠과 ㉣를 연립하면 $\alpha=\dfrac{1}{9}$, $\beta=\dfrac{10}{9}$ 이므로

㉡에서 $\dfrac{1}{9}=\log_{10}\dfrac{1}{9}+k$ $\therefore k=\dfrac{1}{9}+2\log_{10}3$

답 ①

15. 2010년 11월 교육청 나형 15번 추론능력

두 함수 $f(x)=a^x$과 $g(x)=\log_b x$의 교점의 개수를 k라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $a \neq 1$, $a>0$, $b \neq 1$, $b>0$) [4점]

ㄱ. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$이면 $k=1$이다.
ㄴ. $a=b=\sqrt{2}$ 이면 $k=2$이다.
ㄷ. $ab>2$이면 $k=2$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

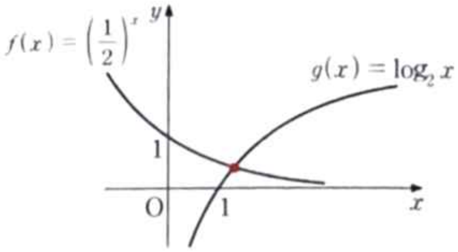
15. **문항분석**

그래프를 그려 주어진 조건을 지수함수와 로그함수에 대입하고 교점의 개수를 구한다.

STEP Ⓐ 주어진 조건을 지수함수와 로그함수에 대입하여 교점의 개수 k 구하기

ㄱ. $a=\frac{1}{2}$, $b=2$일 때, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $g(x)=\log_2 x$이므로

두 그래프는 제1사분면의 한 점에서 만나므로 $k=1$ [참]



ㄴ. $a=b=\sqrt{2}$ 일 때, $f(x)=(\sqrt{2})^x$ 와 $g(x)=\log_{\sqrt{2}} x$ 이므로

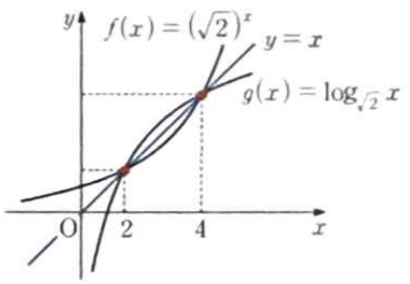
$y=a^x$ 와 $y=\log_a x$ 는 서로 역함수 관계이다.

두 그래프는 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $y=(\sqrt{2})^x$ 은 $y=x$ 와 두 점 $(2, 2)$, $(4, 4)$ 에서 만난다.

방정식 $(\sqrt{2})^x=x$ 을 풀 수 없으므로 x 에 적당한 정수를 대입하여 x 의 값을 구한다.

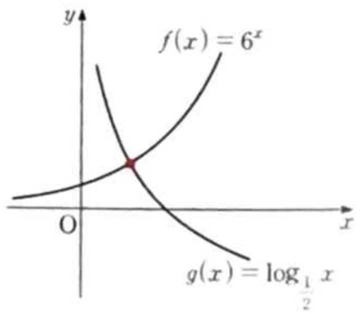
즉 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 $k=2$ [참]



ㄷ. **반례** $a=6$, $b=\frac{1}{2}$이라 하면

$f(x)=6^x$ 와 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$이므로

두 그래프는 제1사분면의 한 점에서 만나므로 $k=1$ [거짓]



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16. 두 곡선 $y=2^{x}$, $y=-4^{x-2}$이 y축과 평행한 한 직선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$일 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

(2016년 7월 15번)

16. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

y 축과 평행한 한 직선을 $x=k$ (k는 실수)라 하고,
직선 $x=k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\overline{BC}$

$2^k=4^{k-2}$

$2^k=2^{2k-4}$

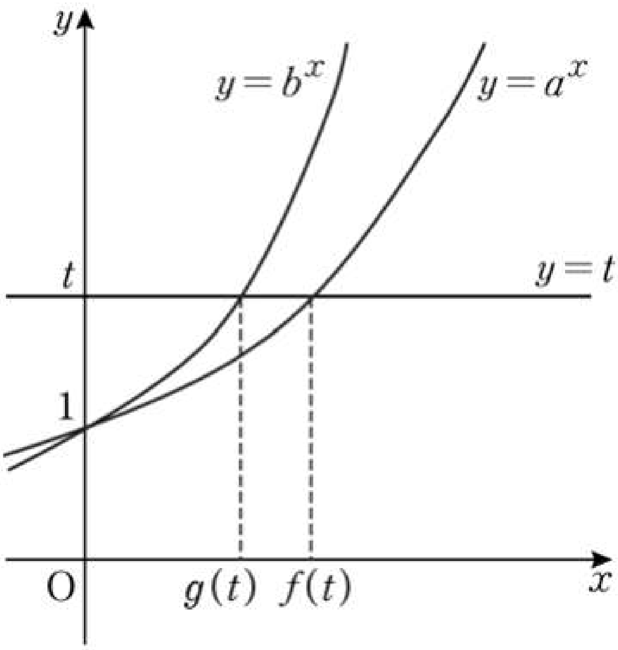
$k=2k-4$, $k=4$

$\overline{OC}=4$, $\overline{AB}=32$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=64$

17. 그림과 같이 두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x\,(1<a<b)$가 직선 $y=t\,(t>1)$과 만나는 점의 x좌표를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $2f(a)=3g(a)$가 성립한다. $f(c)=g(27)$을 만족시키는 실수 c의 값은? [4점]



① 6　　② 9　　③ 12　　④ 15　　⑤ 18

(2015년 3월 A형 19번)

17. **[출제의도] 지수함수의 성질과 비례관계를 활용하여 미지수의 값 구하는 문제를 해결한다.**

$a^{f(t)} = t$ 이므로 $f(t) = \log_a t$

$b^{g(t)} = t$ 이므로 $g(t) = \log_b t$

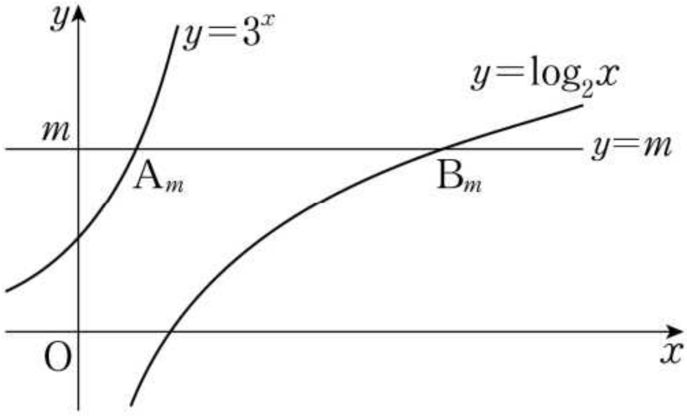
$2f(a) = 3g(a)$ 이므로 $2\log_a a = 3\log_b a$ 에서

$\log_b a = \frac{2}{3}$ 즉, $\log_a b = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} f(c) &= g(27) \\ &= \log_b 27 = \frac{\log_a 27}{\log_a b} = \frac{2}{3}\log_a 27 \\ &= \log_a 27^{\frac{2}{3}} = \log_a 9 \end{aligned}$$

따라서 $c = 9$

18. 그림과 같이 자연수 m에 대하여 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=m$이 만나는 점을 각각 A_m, B_m이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 이라 할 때, a_3의 값은? [4점]



① 502 ② 504 ③ 506 ④ 508 ⑤ 510

(2020년 3월 나형 16번)

18. **[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제를 해결한다.**

$m=3^x$ 에서 $x=\log_3 m$ 이므로 $\mathrm{A}_m(\log_3 m,\ m)$

$m=\log_2 x$ 에서 $x=2^m$ 이므로 $\mathrm{B}_m(2^m, m)$

그러므로 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}=2^m-\log_3 m$

$\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}$ 이 자연수이기 위해서는 m 과 2^m 이 자연수이므로 $\log_3 m$ 이 음이 아닌 정수이다.

그러므로 $m=3^k$ (단, k는 음이 아닌 정수이다.)

$m=3^0$ 일 때, $a_1=2^1-\log_3 1=2$

$m=3^1$ 일 때, $a_2=2^3-\log_3 3=7$

$m=3^2$ 일 때, $a_3=2^9-\log_3 9=510$

따라서 $a_3=510$

[보충 설명]

위의 풀이에서 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}$ 이 자연수이기 위해서는 $m=3^k$ 꼴임을 알 수 있다. 이제 m의 값이 3^{n-1}에서 3^n 으로 증가하면 $2^m-\log_3 m$ 의 값도 증가함을 보이자.

모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}\left(2^{3^n}-n\right)-\left\{2^{3^{n-1}}-(n-1)\right\}&=2^{3^n}-2^{3^{n-1}}-1\\&=2^{3^{n-1}}(2^3-1)-1\\&=7\times2^{3^{n-1}}-1\end{aligned}$$

$3^{n-1}\geq1$ 이므로 $2^{3^{n-1}}\geq2$ 이다.

그러므로 $7\times2^{3^{n-1}}-1>0$

따라서 $2^{3^{n-1}}-(n-1)<2^{3^n}-n$ 이 성립한다.

19. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

(2019학년도 6월 가형 14번)

19. 출제의도 : 로그방정식을 이용하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A(k, \log_2 k)$, $B(k, -\log_2(8-k))$ 이고

$\overline{AB}=2$ 이므로

$|\log_2 k+\log_2(8-k)|=2$

$|\log_2 k(8-k)|=2$

$\log_2 k(8-k)=-2$ 또는 $\log_2 k(8-k)=2$

(i) $\log_2 k(8-k)=-2$일 때

$k(8-k)=\frac{1}{4}$, $4k^2-32k+1=0$

이때 $0<k<8$이므로

$k=\frac{8-3\sqrt{7}}{2}$ 또는 $k=\frac{8+3\sqrt{7}}{2}$

(ii) $\log_2 k(8-k)=2$일 때

$k(8-k)=4$, $k^2-8k+4=0$

이때 $0<k<8$이므로

$k=4-2\sqrt{3}$ 또는 $k=4+2\sqrt{3}$

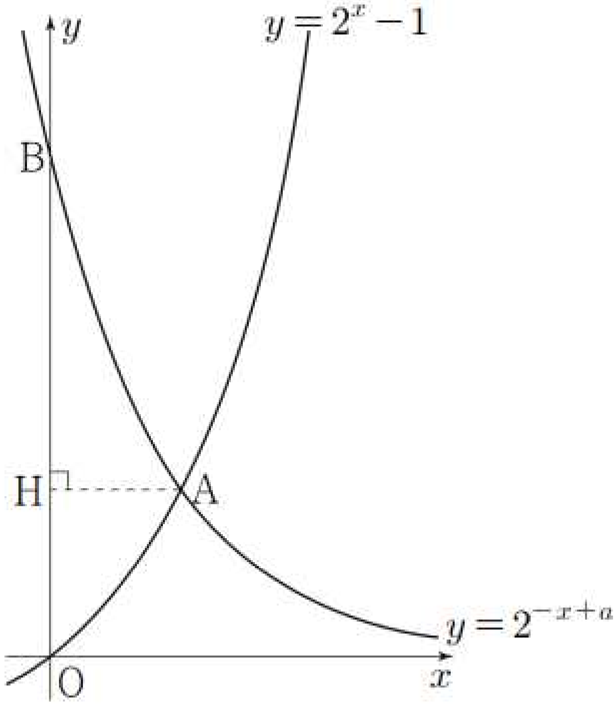
(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은

$(\frac{8-3\sqrt{7}}{2})(\frac{8+3\sqrt{7}}{2})(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$

$=\frac{1}{4}\times 4=1$

정답 ②

20. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^{x}-1$이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$이 y축과 만나는 점을 B라 하자.
점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OB}}=3\times\overline{\mathrm{OH}}$이다.
상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 2　② $\log_2 5$　③ $\log_2 6$　④ $\log_2 7$　⑤ 3

(2022년 4월 9번)

20. **[출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기**

점 B의 좌표가 $\mathrm{B}(0, 2^a)$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=2^a$

$\overline{\mathrm{OB}}=3\times\overline{\mathrm{OH}}$에서 $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{2^a}{3}$

점 A의 x좌표를 k라 하면 $\mathrm{A}\left(k, \dfrac{2^a}{3}\right)$

점 A는 곡선 $y=2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$2^{-k+a}=\dfrac{2^a}{3}$에서 $2^{-k}=\dfrac{1}{3}$, $2^k=3$

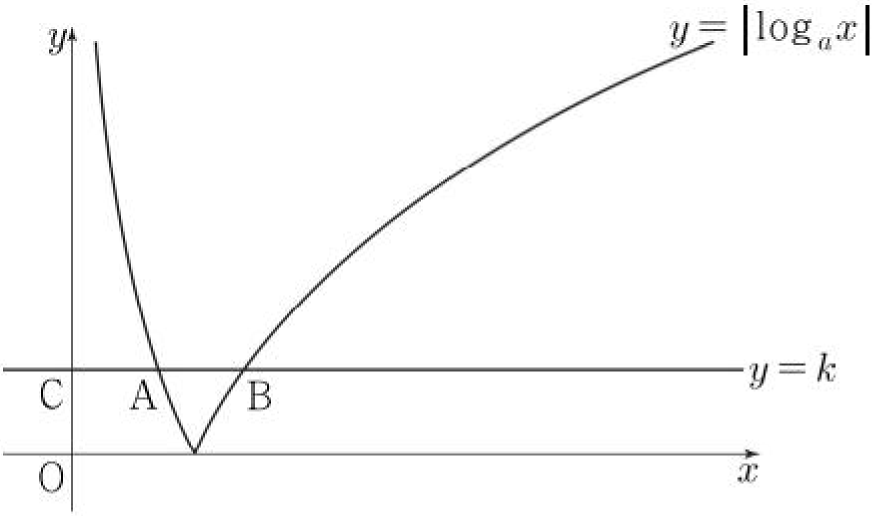
또한 점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$\dfrac{2^a}{3}=2^k-1=3-1=2$에서 $2^a=6$

따라서 $a=\log_2 6$

21. 그림과 같이 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=\left|\log_a x\right|$가 직선 $y=k\ (k>0)$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AB}}$일 때, 곡선 $y=\left|\log_a x\right|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점 사이의 거리는 d이다. $20d$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

[4점]



(2020년 4월 가형 28번)

21. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$이므로 점 A의 좌표는 (k, k)이고,
점 B의 좌표는 $(2k, k)$이다.

점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=-\log_a k$ ⋯ ㉠

점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$k=\log_a 2k$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_a 2k^2=0$에서

$2k^2=1$이므로 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는
두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$-\log_a \alpha=2\sqrt{2}$에서 $\alpha=a^{-2\sqrt{2}}$

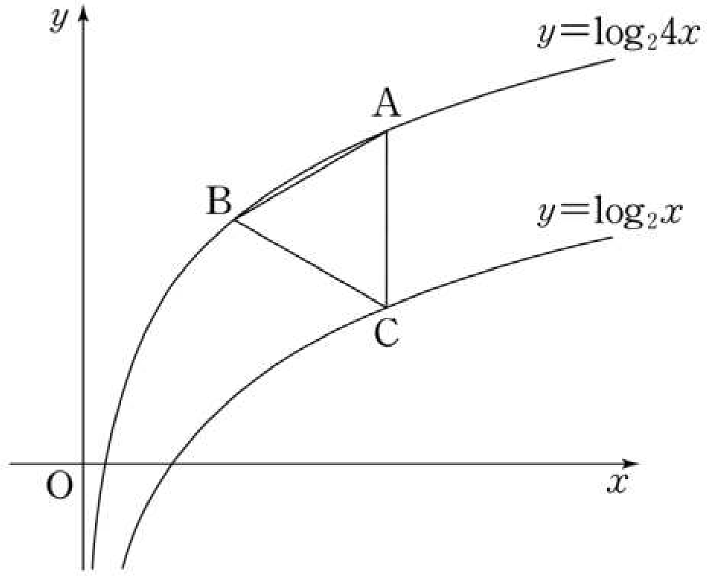
$\log_a \beta=2\sqrt{2}$에서 $\beta=a^{2\sqrt{2}}$

㉡에서 $a^k=2k$이므로 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\begin{aligned}
d&=\beta-\alpha\\
&=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}\\
&=\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{2\sqrt{2}}-\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{-2\sqrt{2}}\\
&=2^2-2^{-2}=\frac{15}{4}
\end{aligned}$$

따라서 $20d=20\times\dfrac{15}{4}=75$

22. 함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p^2\times 2^q$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{3}$　② $9\sqrt{3}$　③ $12\sqrt{3}$　④ $15\sqrt{3}$　⑤ $18\sqrt{3}$

(2011학년도 9월 나형 15번)

22. 선분 AC가 y축에 평행하므로

두 점 A, C의 좌표를 각각

$A(t,\ \log_2 4t)$, $B(t,\ \log_2 t)$ ($t>1$)라고 하면

$$\overline{AB}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$$

선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC

가 정삼각형이므로

$$\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$$

따라서 점 B의 좌표는

$B(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3}))$ 이고

$$\overline{AB}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$$

$$=\sqrt{3+\left\{\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}\right\}^2}=2$$

이므로 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\pm 1$이다.

그런데 $t>1$ 이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=-1$ 이고

$$\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\frac{1}{2},\ 2(t-\sqrt{3})=t$$

$\therefore\ t=2\sqrt{3}$

이 때 점 B의 좌표는 $B(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p=\sqrt{3},\ q=\log_2 4\sqrt{3}$

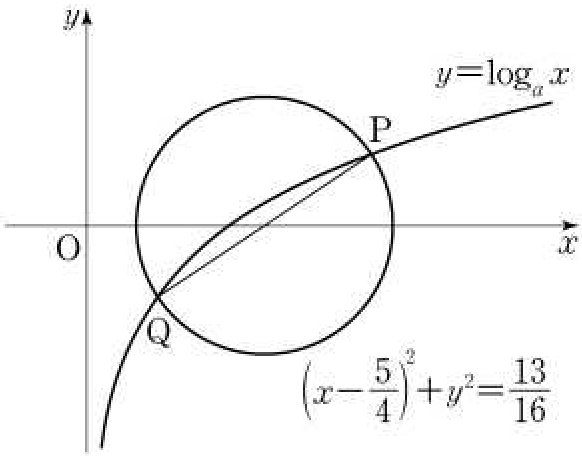
$$\therefore\ p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}$$

$$=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

답 ③

23. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 C: $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5



(2018학년도 9월 가형 16번)

23. 출제의도 : 로그함수의 그래프와 원이 만나는 두 점이 원의 지름임을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(p, \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q, \log_a q)$ $(p > q)$로 놓으면

선분 PQ의 중점이 원의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이므로

$\frac{p+q}{2} = \frac{5}{4}$, $\frac{\log_a p + \log_a q}{2} = 0$에서

$p+q = \frac{5}{2}$, $pq = 1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식은

$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$(2t-1)(t-2) = 0$

$t = \frac{1}{2}$ 또는 $t = 2$

즉 $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$

이때, $\mathrm{P}(2, \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}, -\log_a 2\right)$이고,

선분 PQ의 길이가 원의 지름 $\frac{\sqrt{13}}{2}$이므로

$$\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \{\log_a 2 - (-\log_a 2)\}^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

정리하면 $(\log_a 4)^2 = 1$

$a > 1$이므로 $\log_a 4 = 1$에서 $a = 4$

정답 ③

24. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=-\log_2(-x),\ y=\log_2(x+2a)$$

가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{7}{4}$　③ 2　④ $\frac{9}{4}$　⑤ $\frac{5}{2}$

(2022년 10월 10번)

24. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자.

$-\log_2(-x)=\log_2(x+2a)$ 에서

$\log_2(x+2a)+\log_2(-x)=0$

$\log_2\{-x(x+2a)\}=0$

$-x(x+2a)=1$

$x^2+2ax+1=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 실근이 x_1, x_2이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-2a$, $x_1x_2=1$

이다. 이때

$$\begin{aligned} y_1+y_2 &= -\log_2(-x_1)-\log_2(-x_2) \\ &= -\log_2 x_1x_2 \\ &= -\log_2 1=0 \end{aligned}$$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $(-a, 0)$ 이다.

선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있으므로 $-4a+5=0$ 에서 $a=\frac{5}{4}$

$a=\frac{5}{4}$ 를 ㉠에 대입하면

$x^2+\frac{5}{2}x+1=0$, $2x^2+5x+2=0$

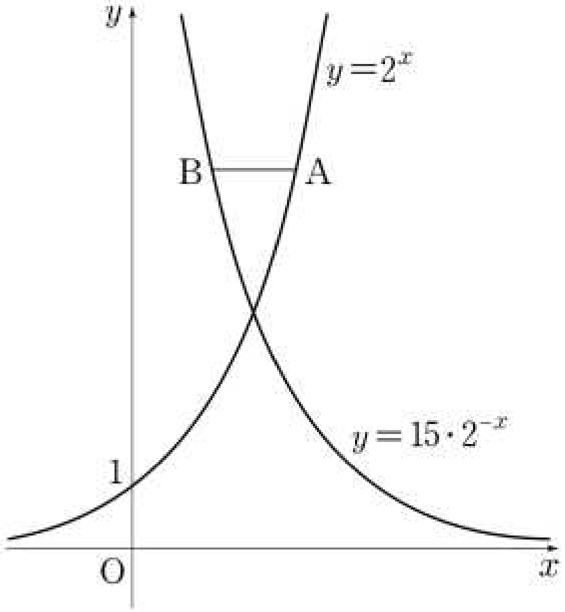
$(x+2)(2x+1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-2, -1)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ 이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$

25. 그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot2^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $1<\overline{\mathrm{AB}}<100$을 만족시키는 2 이상의 자연수 a의 개수는? [4점]



① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

(2014학년도 6월 A형 20번)

25.

출제의도 : 함수의 그래프에 관련된 문제를 지수방정식과 로그 부등식을 이용하여 풀 수 있는가?

점 $A(a,\ 2^a)$와 점 B의 y좌표가 같으므로

$$15 \cdot 2^{-x} = 2^a$$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 15 + (-x) = a$$

$$\therefore\ x = \log_2 15 - a$$

그러므로

$$\overline{AB} = a - (\log_2 15 - a)$$

$$= 2a - \log_2 15$$

$1 < \overline{AB} < 100$에서

$$1 < 2a - \log_2 15 < 100$$

$$1 + \log_2 15 < 2a < 100 + \log_2 15$$

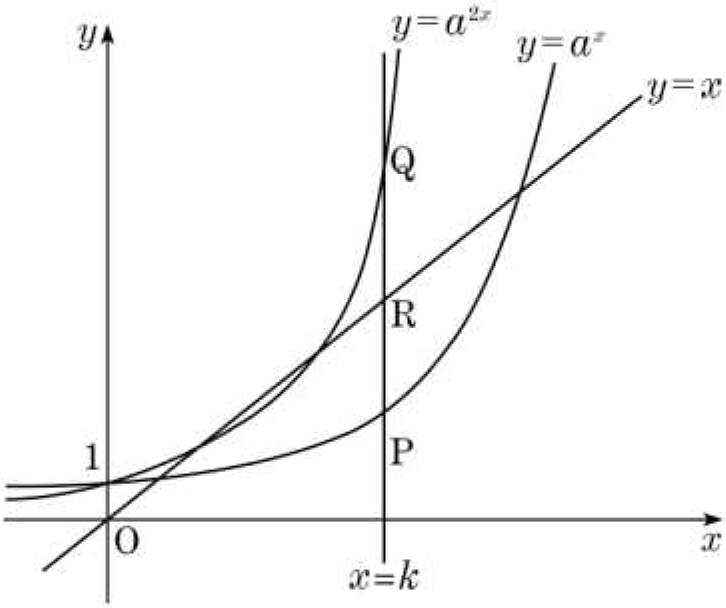
한편 $\log_2 2^3 < \log_2 15 < \log_2 2^4$이므로

$$4.\times\times\times < 2a < 103.\times\times\times$$

따라서, 자연수 a는 3이상 51이하이므로 구하는 개수는 49개다.

<답> ④

26. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$와 $y=a^{2x}$의 그래프는 직선 $y=x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다. $y=a^x$의 그래프, $y=a^{2x}$의 그래프와 직선 $x=k$의 교점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y=x$와 직선 $x=k$의 교점을 R라 하자.



$k=2$이면 두 점 Q와 R가 일치할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=4$이면 두 점 Q와 R가 일치한다.

ㄴ. $\overline{PQ}=12$이면 $\overline{QR}=8$이다.

ㄷ. $\overline{PQ}=\dfrac{1}{8}$을 만족시키는 실수 k의 값의 개수는 2이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2012년 3월 나형 14번)

26. **[출제의도] 지수함수를 이해하고 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$P(k,\ a^k)$, $Q(k,\ a^{2k})$, $R(k,\ k)$ 라 하면

$k=2$ 일 때 $a^{2k}=k$ 이므로 $a^4=2$

$\therefore\ a=\sqrt[4]{2}$ $(\because\ a>1)$

$\therefore\ a^x=2^{\frac{x}{4}},\quad a^{2x}=2^{\frac{x}{2}}$

ㄱ. $k=4$ 이면 $(\sqrt[4]{2})^8=4$ 이므로 $a^{2k}=k$ 이다.

따라서 점 Q와 점 R는 일치한다. (참)

ㄴ. $\overline{PQ}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|=12$ 이다.

이때 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-t=12$ 또는 $t^2-t=-12$ 이다.

i) $t^2-t=12$ 인 경우 $(t-4)(t+3)=0$ 에서

$t>0$이므로 $t=4$

$\therefore\ 2^{\frac{k}{4}}=4$

$\therefore\ \dfrac{k}{4}=2$

$\therefore\ k=8$

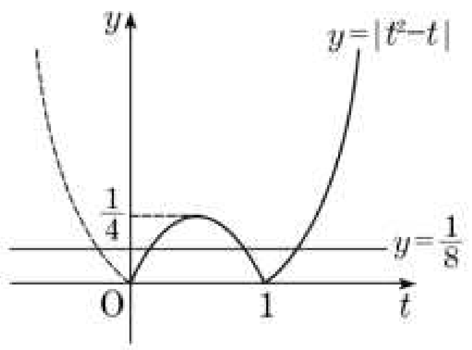
ii) $t^2-t=-12$ 인 경우 $t^2-t+12=0$ 의 판별식이 음수이므로 $t>0$ 조건을 만족시키는 실수 t 가 존재하지 않는다. 따라서, k도 존재하지 않는다.

i), ii)에 의하여 $k=8$ 이므로 $Q(8,\ 16)$, $R(8,\ 8)$

$\therefore\ \overline{QR}=8$ (참)

ㄷ. $\overline{PQ}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|$ 에서 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$라 하면 $\overline{PQ}=|t^2-t|$ 이다.

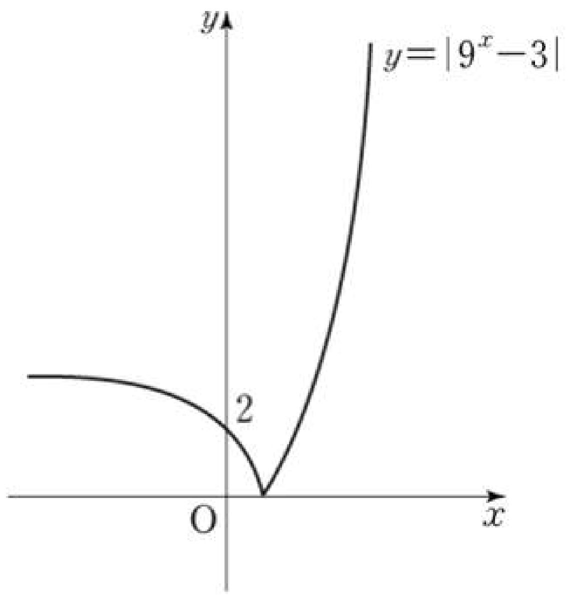
이때 $y=|t^2-t|=\left|\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $\overline{PQ}=\dfrac{1}{8}$을 만족시키는 양의 실수 t의 값은 3개이므로 실수 k 의 값도 3 개이다. (거짓)

27. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2\,(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12



(2016학년도 6월 B형 18번)

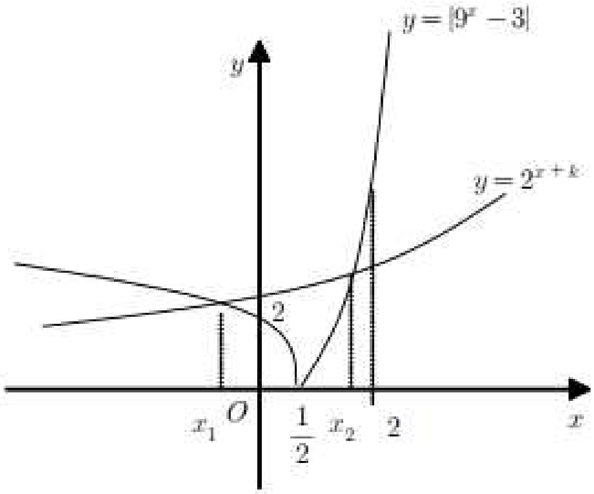
27. **출제의도** : 지수함수의 그래프의 성질을 이용하여 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|9^x-3|=0$ 에서 $9^x=3^{2x}=3$ 이므로

$x=\dfrac{1}{2}$

따라서, 두 곡선 $y=|9^x-3|$, $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표 x_1, x_2가 $x_1<0$, $0<x_2<2$ 를 만족시키는 경우는 그림과 같다.



즉, $x=0$일 때,

$2^{0+k}=2^k>2\cdots$㉠

$x=2$ 일 때,

$2^{2+k}=4\times2^k<|9^2-3|=78$

$2^k<19.5\ \cdots$㉡

㉠,㉡을 만족시키는 자연수 k는

2, 3, 4

이므로 그 합은

$2+3+4=9$

정답 ②

28. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$ 에 대하여 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 자연수 k 의 개수를 구하시오. (단, 좌표축은 어느 사분면에도 속하지 않는다.) [4점]

(2013년 3월 A형 29번)

28. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -64만큼 평행이동시킨 것이다.

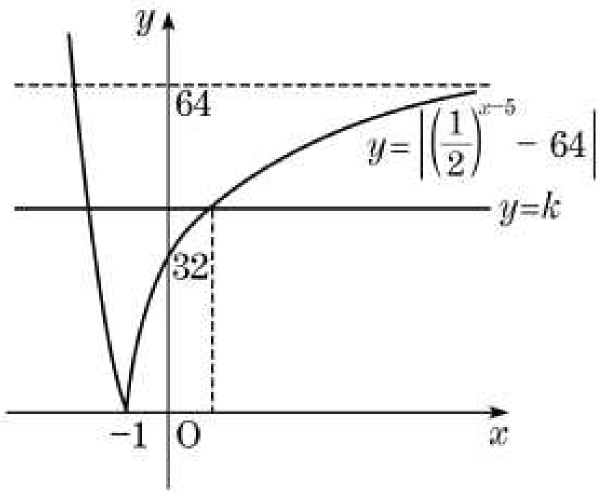
따라서 이 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는

$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}-64=2^5-64=-32$

점근선의 방정식은 $y=-64$이므로

$$y=|f(x)|=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64 & (x<-1)\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}+64 & (x\geq-1)\end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



이때, 곡선 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만나기 위해서는 $32<k<64$이어야 한다.

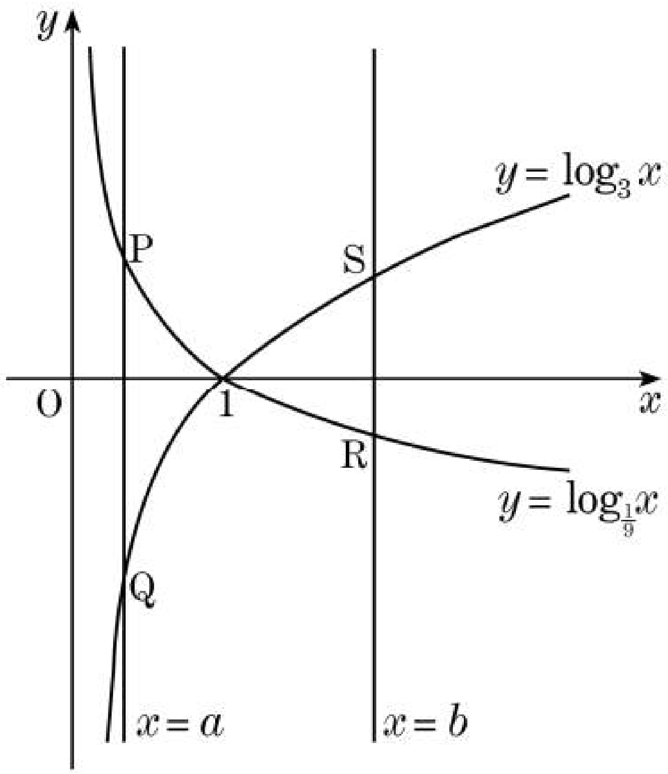
따라서 구하는 자연수 k의 개수는

$64-32-1=31$

29. 좌표평면에서 직선 $x=a\,(0<a<1)$가 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{9}} x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $x=b\,(b>1)$가 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{9}} x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 점 P, Q, R, S는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{SR}} = 2 : 1$
>
> (나) 선분 PR의 중점의 x좌표는 $\frac{9}{8}$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $40(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]



(2014년 3월 A형 28번)

29. [출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{PQ}} = \log_{\frac{1}{9}} a - \log_3 a = -\frac{3}{2}\log_3 a$

$\overline{\mathrm{SR}} = \log_3 b - \log_{\frac{1}{9}} b = \frac{3}{2}\log_3 b$

$\overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{SR}} = 2 : 1$ 에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 2\overline{\mathrm{SR}}$ 이므로

$-\frac{3}{2}\log_3 a = 2 \times \frac{3}{2}\log_3 b$

$\log_3 a + 2\log_3 b = 0$

$\therefore\ ab^2 = 1 \ \cdots$ ㉠

선분 PR의 중점의 x좌표가 $\frac{9}{8}$ 이므로

$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{8} \ \cdots$ ㉡

㉡에서 $a = \frac{9}{4} - b$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{9}{4} - b\right)b^2 = 1$

$4b^3 - 9b^2 + 4 = 0$

$(b-2)(4b^2 - b - 2) = 0$

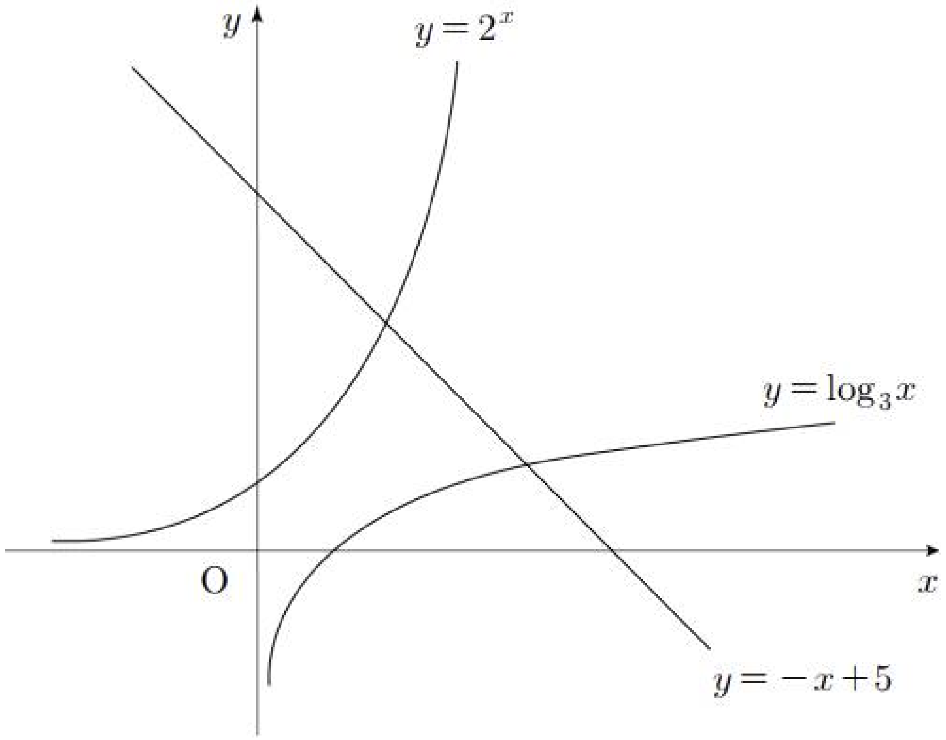
$b = 2$ 또는 $b = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$b > 1$ 이므로 $b = 2$

따라서 $a = \frac{1}{4}$, $b = 2$이므로

$40(b-a) = 70$

30. 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_3 x$와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $a_1 > b_2$

ㄴ. $a_1+a_2=b_1+b_2$

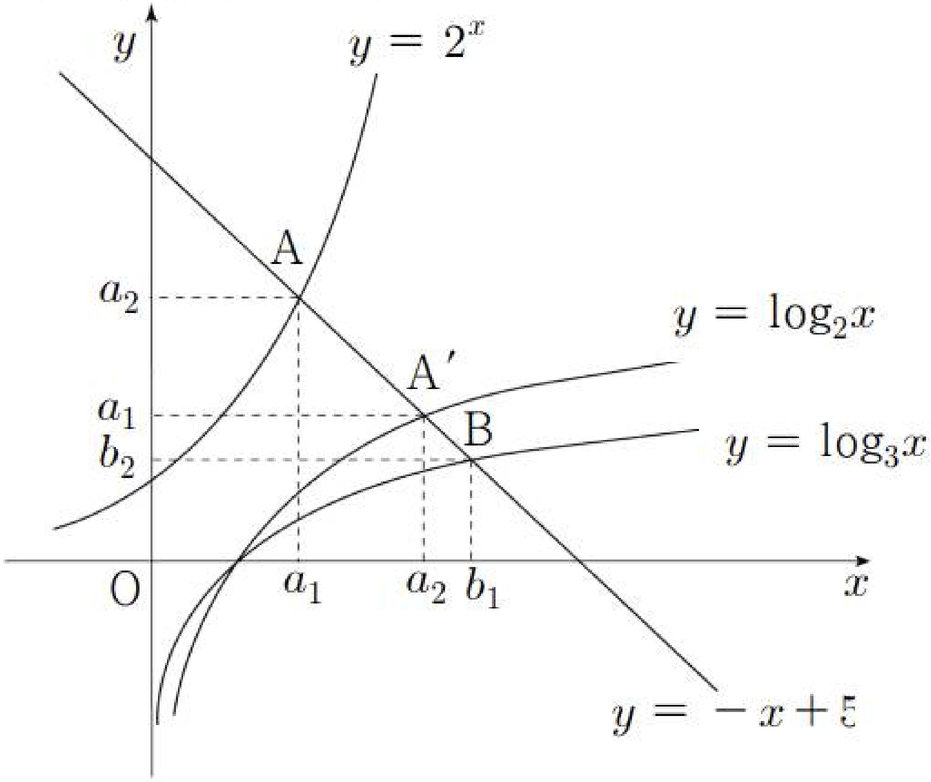
ㄷ. $\dfrac{a_1}{a_2}<\dfrac{b_2}{b_1}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2012년 7월 나형 15번)

30. **[출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 추론하기**



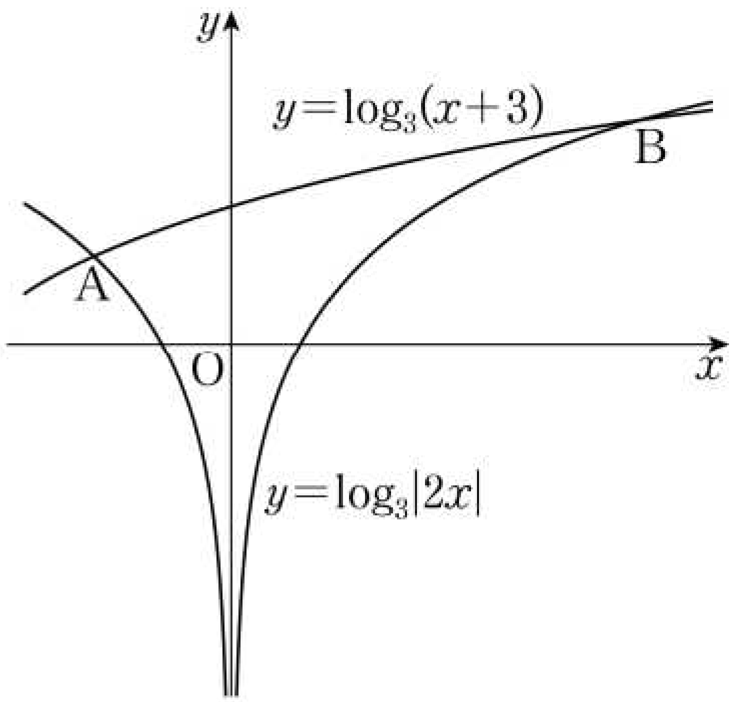
ㄱ. $y=\log_2 x$와 $y=-x+5$가 만나는 점 $\mathrm{A}'(a_2, a_1)$ $\therefore a_1 > b_2$ (참)

ㄴ. 두 점 A, B는 $y=-x+5$ 위의 점이므로 $a_1+a_2=b_1+b_2=5$ (참)

ㄷ. 직선 OA'와 직선 OB의 기울기에 의해 $\dfrac{a_1}{a_2} > \dfrac{b_2}{b_1}$ (거짓)

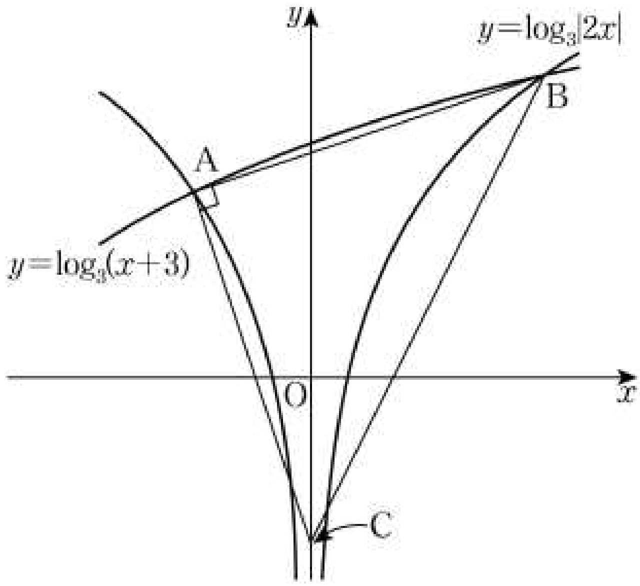
31. 함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$



(2020년 3월 가형 14번)

31. 출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.



$x<0$ 일 때의 교점 A 의 x 좌표는 방정식

$\log_3(-2x)=\log_3(x+3)$ 의 근이므로

$-2x=x+3$, $3x=-3$, $x=-1$

따라서 점 A 의 좌표는 $A(-1, \log_3 2)$

$x>0$ 일 때의 교점 B 의 x 좌표는 방정식

$\log_3 2x=\log_3(x+3)$ 의 근이므로

$2x=x+3$, $x=3$

따라서 점 B 의 좌표는 $B(3, \log_3 6)$ 이다.

두 점 $A(-1, \log_3 2)$, $B(3, \log_3 6)$ 에 대하여

직선 AB 의 기울기는

$\dfrac{\log_3 6-\log_3 2}{3-(-1)}=\dfrac{\log_3 \frac{6}{2}}{4}=\dfrac{1}{4}$ 이므로

점 A 를 지나고 직선 AB 와 수직인 직선의 방정식은

$y-\log_3 2=-4(x+1)$

$y=-4x-4+\log_3 2$ …… ㉠

직선 ㉠이 y 축과 만나는 점 C 의 좌표는

$C(0, -4+\log_3 2)$ 이다. 이때

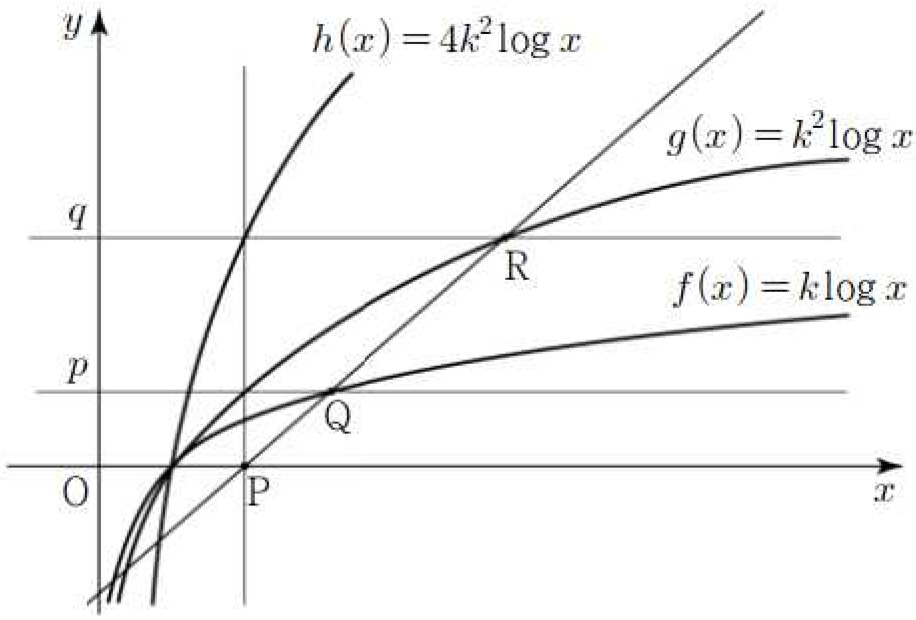
$\overline{AB}=\sqrt{4^2+(\log_3 6-\log_3 2)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{AC}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$

직각삼각형 ABC 의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\dfrac{17}{2}$

32. 그림과 같이 세 로그함수 $f(x)=k\log x$, $g(x)=k^2\log x$, $h(x)=4k^2\log x$의 그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$와 만나는 점의 y좌표를 각각 p, q라 하자. 직선 $y=p$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{Q}(a,\ p)$, 직선 $y=q$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{R}(b,\ q)$라 하자. 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있을 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, $k>1$) [4점]



(2015년 7월 A형 28번)

32. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

직선 $x=2$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 y좌표가 p이므로 $p=k^2\log 2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q의 y좌표가 p이므로

$k^2\log 2 = k\log a$를 정리하면 $a=2^k$

직선 $x=2$와 곡선 $y=h(x)$의 만나는 점의 y좌표가 q이므로 $q=4k^2\log 2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 R의 y좌표가 q이므로

$4k^2\log 2 = k^2\log b$를 정리하면 $b=2^4$

세 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(2^k,\ k^2\log 2)$, $\mathrm{R}(2^4,\ 4k^2\log 2)$가 한 직선 위에 있으므로

$\dfrac{k^2\log 2}{2^k-2}=\dfrac{4k^2\log 2}{14}$를 정리하면 $2^k=\dfrac{11}{2}$

$a=\dfrac{11}{2}$, $b=16$

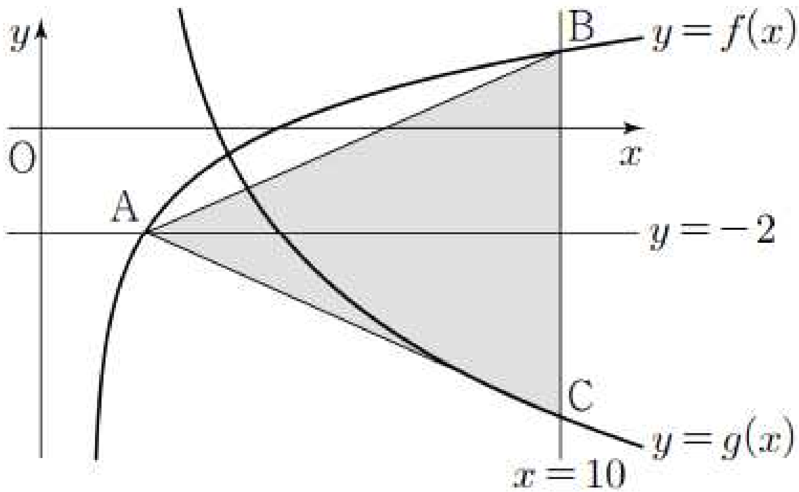
따라서 $ab=88$

33. $a>1$ 인 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2,\ g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$$

이 있다. 직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=10$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 28일 때, a^{10}의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27



(2021년 7월 11번)

33. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제해결하기

직선 $y=-2$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점이 A 이므로

$-2=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2$ 에서 $x=2$

$\mathrm{A}(2,\ -2)$

$\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\log_a 9-2\right)$, $\mathrm{C}(10,\ -\log_a 8+1)$ 이고,

점 A 와 직선 $x=10$ 사이의 거리는 8 이므로

삼각형 ACB 의 넓이는

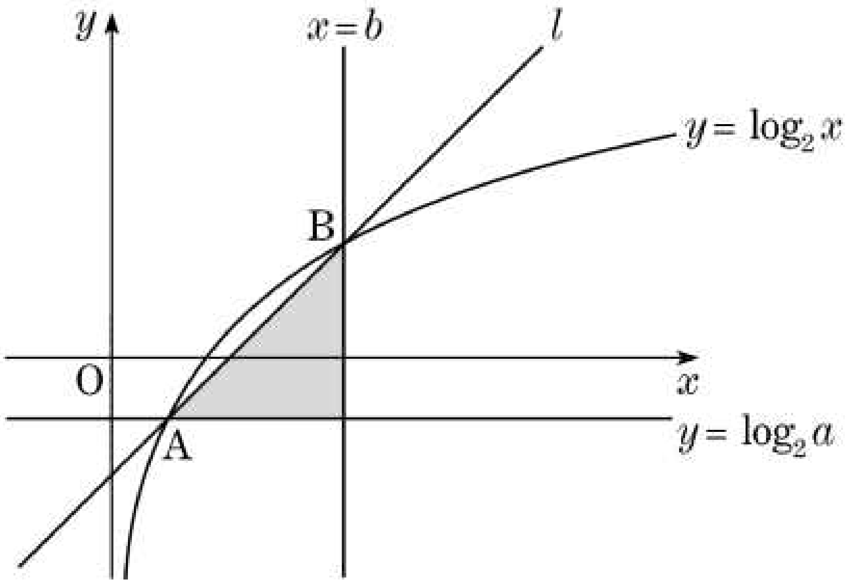
$\frac{1}{2}\times 8\times\left\{\left(\frac{1}{2}\log_a 9-2\right)-(-\log_a 8+1)\right\}$

$=4\times(\log_a 24-3)=28$

$\log_a 24=10$

따라서 $a^{10}=24$

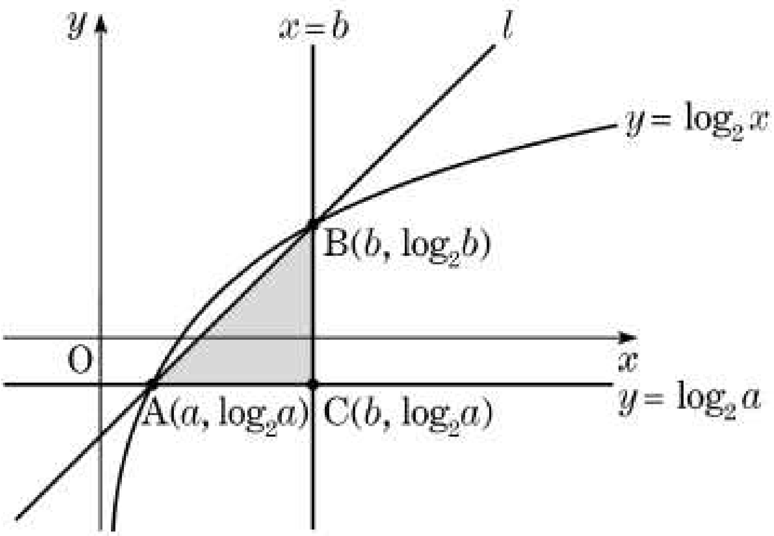
34. 그림과 같이 기울기가 1인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 x$와 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a, \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b, \log_2 b)$에서 만난다. 직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 2일 때, $a+b$의 값은? (단, $0<a<b$이다.) [4점]



① 2　　② $\frac{7}{3}$　　③ $\frac{8}{3}$　　④ 3　　⑤ $\frac{10}{3}$

(2013년 3월 A형 14번)

34. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이에 대한 문제를 해결한다.



두 점 $\mathrm{A}(a, \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b, \log_2 b)$가 기울기가 1인 직선 위에 있으므로 $\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}=1$이다.

즉, $\log_2 b-\log_2 a=b-a$ ⋯ ㉠

직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가 $b-a$이고, 높이는 $\log_2 b-\log_2 a$인 직각삼각형이다.

$\dfrac{1}{2}(b-a)(\log_2 b-\log_2 a)=2$ ⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{2}(b-a)\times(b-a)=2$

$(b-a)^2=4$, 즉, $b-a=2$ ($\because$ $a<b$) ⋯ ㉢

또, $\log_2 b-\log_2 a=2$에서 $\log_2 \dfrac{b}{a}=2$이므로

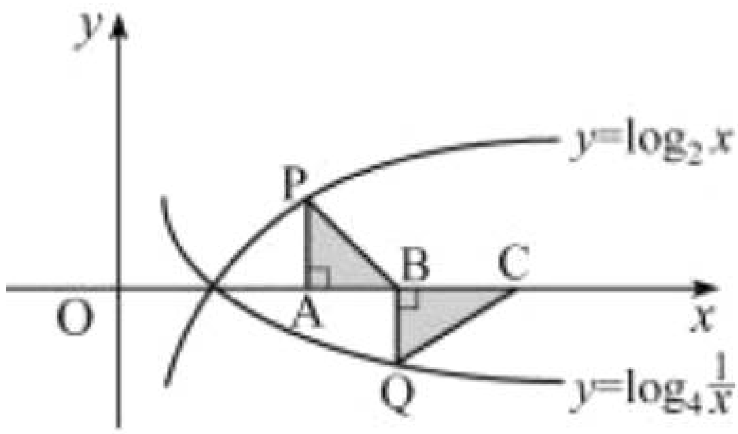
$b=4a$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{8}{3}$

$\therefore$ $a+b=\dfrac{10}{3}$

35. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발이 A$(2, 0)$ 이고, 곡선 $y=\log_4 \frac{1}{x}$ 위의 점 Q 에서 x 축에 내린 수선의 발이 B$(3, 0)$ 이다.

삼각형 PAB 와 삼각형 QCB 의 넓이가 서로 같아지도록 점 C$(\log_3 k, 0)$ 을 잡을 때, 상수 k 의 값을 구하시오.(단, $k > 27$) [4점]



(2005년 10월 나형 24번)

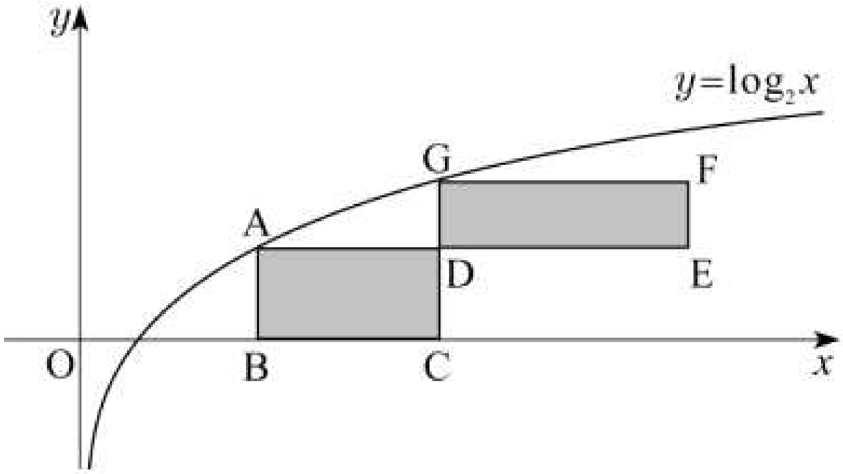
35. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(2,\ 1)$, $\mathrm{Q}\left(3,\ \log_4 \dfrac{1}{3}\right)$, $\triangle \mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}$ 이므로

$\triangle \mathrm{QCB} = \dfrac{1}{2}(\log_3 k - 3) \times \left(-\log_4 \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\log_3 k = 3 + \log_3 4 = \log_3 108 \quad \therefore\ k = 108$

36. 그림은 각 변이 x축 또는 y축에 평행한 두 직사각형 ABCD, DEFG를 나타낸 것이다. 두 점 A, G는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이고, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.



두 직사각형 ABCD, DEFG가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AD} : \overline{DE} = 2 : 3$이고, $\overline{DG} = 1$이다. (나) 두 직사각형 ABCD, DEFG의 넓이는 서로 같다.

점 E의 x좌표는? [4점]

① $\dfrac{15}{2}$　　② 8　　③ $6\sqrt{2}$　　④ $\dfrac{19}{2}$　　⑤ $7\sqrt{2}$

(2009년 3월 가형 9번)

36. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하고 이를 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 B, C의 좌표를 각각 B$(a,\ 0)$, C$(b,\ 0)$이라 하고, 점 E의 x좌표를 k라 하면 $\overline{\mathrm{DG}}=1$에서

$\log_2 b=\log_2 a+1=\log_2 2a$

$\therefore\ b=2a$

$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{DE}}=2 : 3$에서

$(b-a) : (k-b)=2 : 3$

$k=\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}a=\frac{7}{2}a$

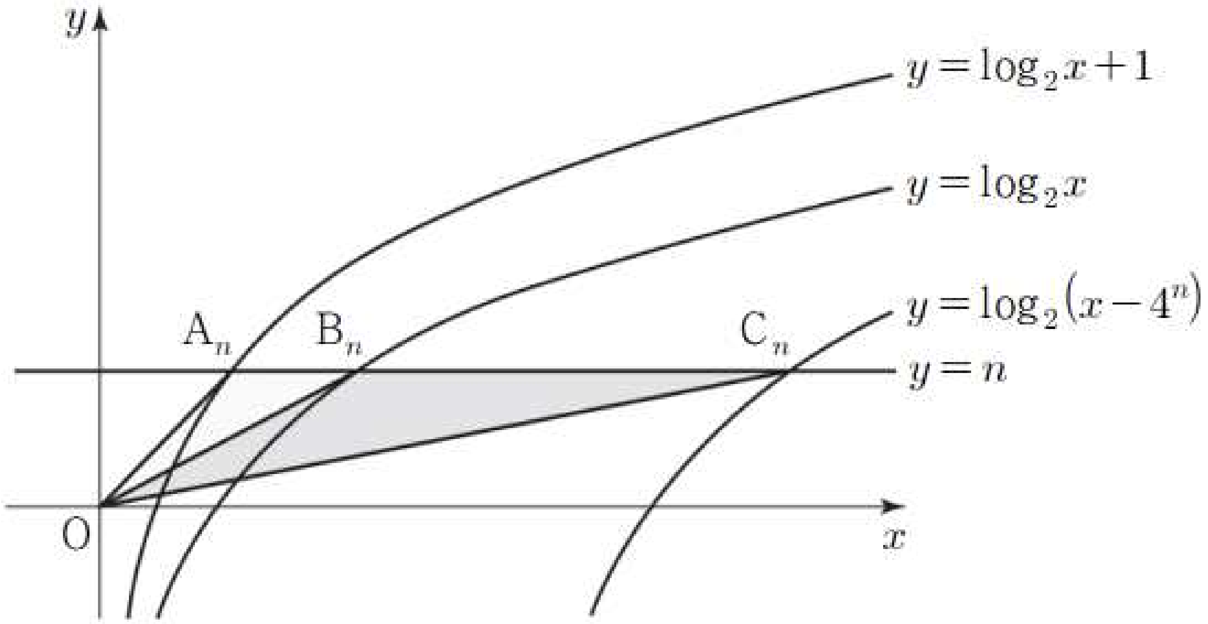
$\square\mathrm{ABCD}=\square\mathrm{DEFG}$에서

$(b-a)\log_2 a=k-b=\frac{3}{2}(b-a)$

$a\neq b$이므로 $a=2\sqrt{2},\ b=4\sqrt{2}$

$\therefore\ k=\frac{7}{2}a=7\sqrt{2}$

37. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 세 곡선 $y=\log_2 x+1$, $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-4^n)$이 직선 $y=n$과 만나는 세 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자. 두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{OC}_n$의 넓이를 각각 S_n, T_n이라 할 때, $\dfrac{T_n}{S_n}=64$를 만족시키는 n의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



(2015년 4월 A형 27번)

37. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

점 A_n은 곡선 $y=\log_2 x+1$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2 x+1=n$

$x=2^{n-1}$ $\therefore$ $\mathrm{A}_n\left(2^{n-1}, n\right)$

점 B_n은 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2 x=n$

$x=2^n$ $\therefore$ $\mathrm{B}_n\left(2^n, n\right)$

점 C_n은 곡선 $y=\log_2\left(x-4^n\right)$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2\left(x-4^n\right)=n$

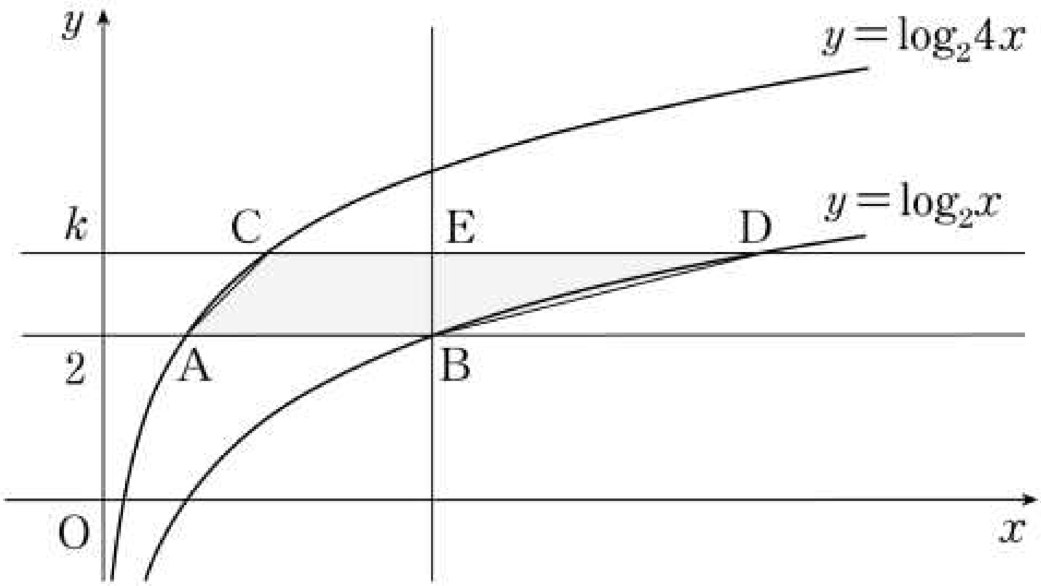
$x=2^n+4^n$ $\therefore$ $\mathrm{C}_n\left(2^n+4^n, n\right)$

$S_n=\frac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$, $T_n=\frac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{T_n}{S_n}=\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}&=\frac{2^n+4^n-2^n}{2^n-2^{n-1}}\\&=\frac{4^n}{(2-1)\times 2^{n-1}}\\&=2^{n+1}=64\end{aligned}$$

따라서 $n=5$

38. 그림과 같이 직선 $y=2$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k\ (k>2)$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 CD와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 CD를 $1:2$로 내분한다. 사각형 ABDC의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오. [4점]



(2019년 3월 가형 27번)

38. . [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 사각형의 넓이를 구한다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 $\mathrm{A}(a, 2)$는

곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로

$2=\log_2 4a$

$a=1$

따라서 점 A의 좌표는 $(1, 2)$

점 B의 x좌표를 b라 하면 점 $\mathrm{B}(b, 2)$는

곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$2=\log_2 b$

$b=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(4, 2)$

점 C의 x좌표를 c라 하면 점 $\mathrm{C}(c, k)$는

곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로

$k=\log_2 4c$

$c=2^{k-2}$

따라서 점 C의 좌표는 $(2^{k-2}, k)$

점 D의 x좌표를 d라 하면 점 $\mathrm{D}(d, k)$는

곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로

$k=\log_2 d$

$d=2^k$

따라서 점 D의 좌표는 $(2^k, k)$

점 E의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로 4이고,

점 E가 선분 CD를 $1:2$로 내분하므로

$$4=\frac{1\times 2^k+2\times 2^{k-2}}{1+2}$$

$$=\frac{2\times 2^{k-1}+2^{k-1}}{3}$$

$$=\frac{3\times 2^{k-1}}{3}$$

$$=2^{k-1}$$

$2^2=2^{k-1}$

$k-1=2$

$k=3$

따라서 $\mathrm{C}(2, 3)$, $\mathrm{D}(8, 3)$, $\mathrm{E}(4, 3)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=6$, $\overline{\mathrm{BE}}=1$

사각형 ABDC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{BE}}$$

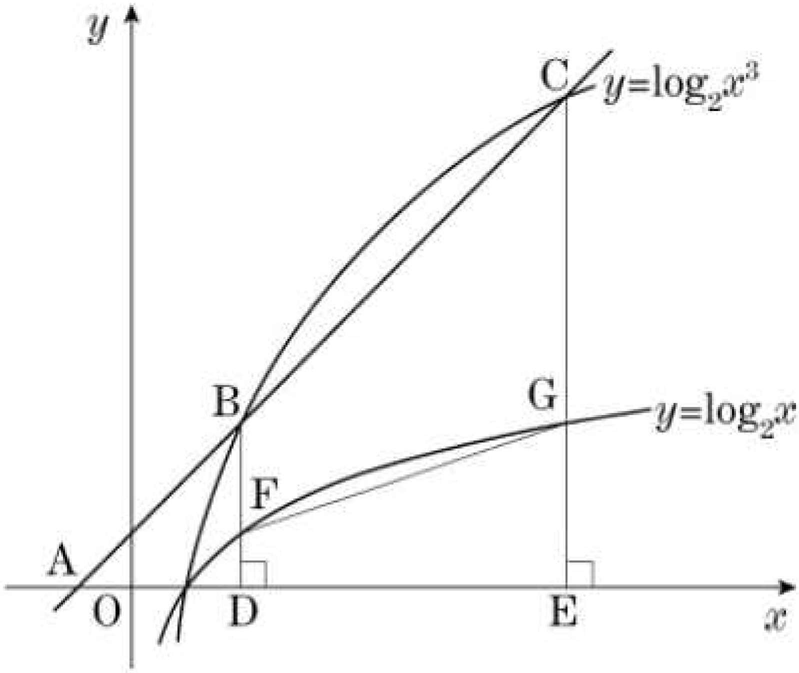
$$=\frac{1}{2}\times(3+6)\times 1$$

$$=\frac{9}{2}$$

따라서 $12S=54$

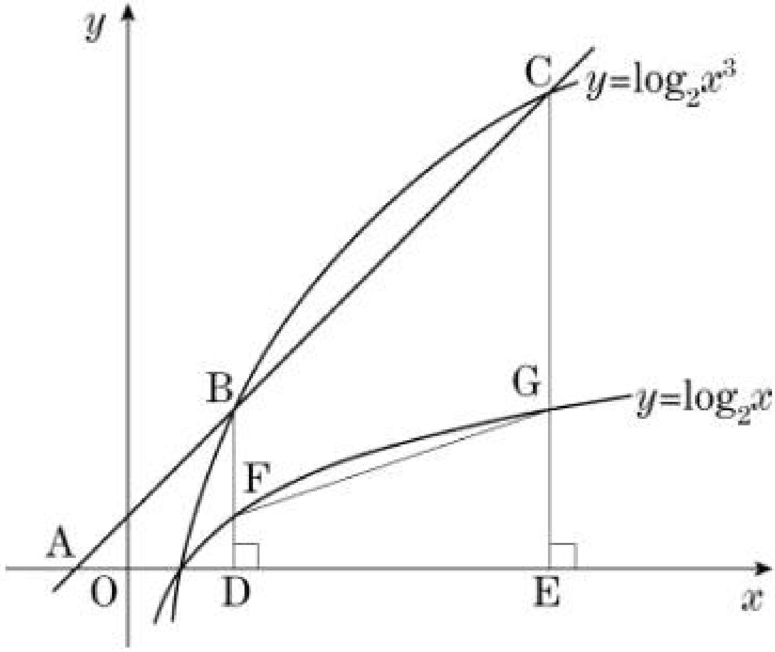
39. 그림과 같이 x축 위의 한 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\log_2 x^3$과 서로 다른 두 점 B, C에서 만나고 있다. 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 두 선분 BD, CE가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 F, G라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 사각형 BFGC의 넓이를 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 0보다 작다.)

[4점]



(2012년 3월 나형 29번)

39. [출제의도] 로그함수와 도형의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.



$\log_2 x^3 - \log_2 x = 3\log_2 x - \log_2 x$

$= 2\log_2 x$

이므로 두 점 F, G는 두 선분 BD, CE를 각각 $2:1$로 내분하는 점이다.

$\therefore\ \square \mathrm{BFGC} = \dfrac{2}{3} \times \square \mathrm{BDEC}$

$= \dfrac{2}{3}(8 \times \triangle \mathrm{ADB})$

$= \dfrac{16}{3} \times \dfrac{9}{2}$

$= 24$

40. 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=(\sqrt{2})^{x}+a$와 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<4$이고, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

(2019년 10월 가형 14번)

40. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

두 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 와 $y=(\sqrt{2})^x+a$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 직선 AB 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로 두 점 A, B 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 점 A 의 좌표를 $\mathrm{A}(2t, t)$ $(t>0)$이라 하면 점 B 의 좌표는 $\mathrm{B}(t, 2t)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}t$ 이다.

선분 AB 의 중점을 M 이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}t, \frac{3}{2}t\right)$

삼각형 OAB 는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 인 이등변삼각형이므로

삼각형 OAB 의 넓이는

$$6=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times\frac{3\sqrt{2}}{2}t=\frac{3}{2}t^2$$

이므로 $t=2$

즉 $\mathrm{A}(4, 2)$ 가 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 위의 점이므로

$2=\log_{\sqrt{2}}(4-a)$, $(\sqrt{2})^2=4-a$

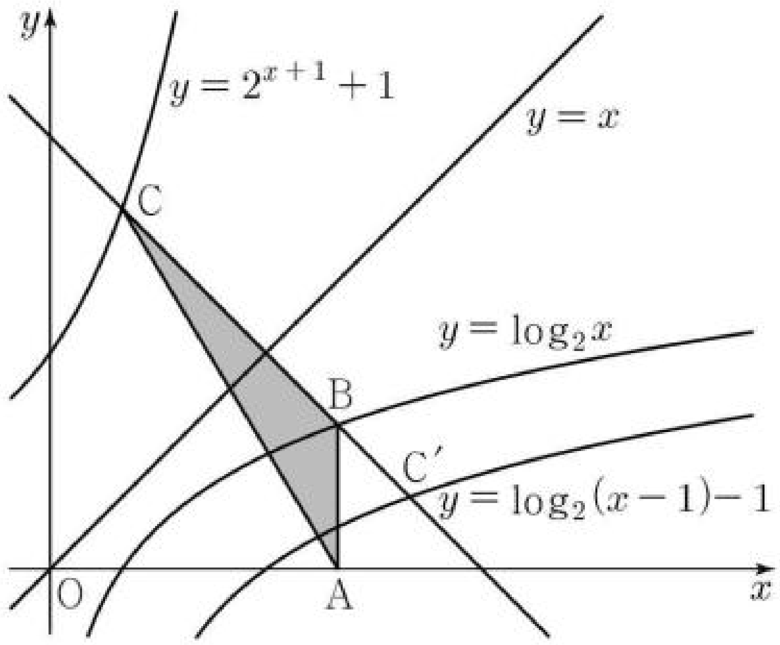
따라서 구하는 상수 a 의 값은 2 이다.

41. 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x+1}+1$과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① 3　　② $\dfrac{7}{2}$　　③ 4　　④ $\dfrac{9}{2}$　　⑤ 5

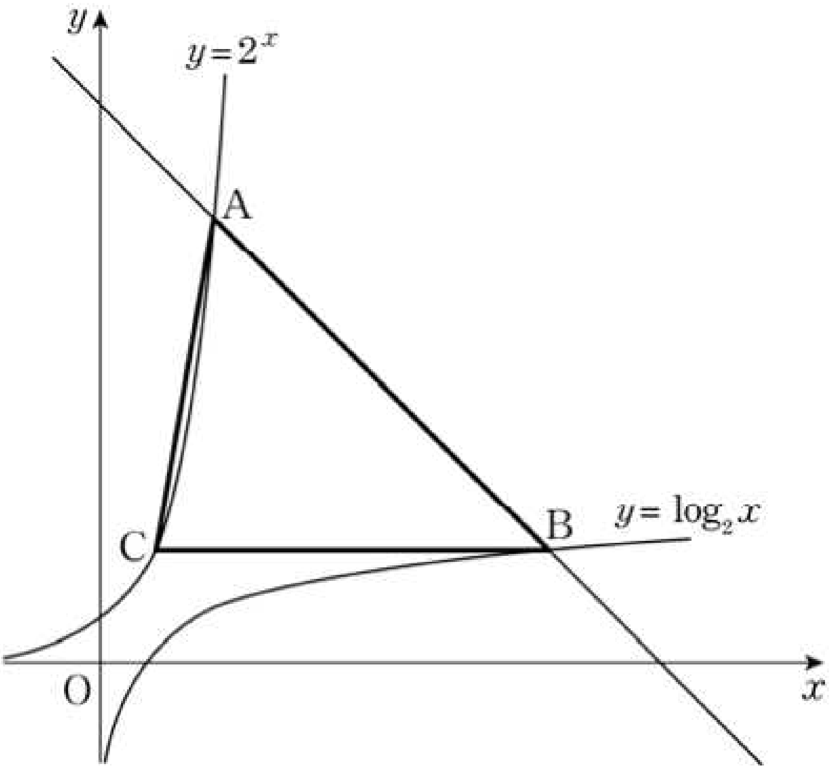
(2018년 7월 가형 15번)

41. **[출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기**



점 A$(4,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점은 B$(4,\ 2)$이다.
점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x+1}+1$과 만나는 점을 C$(a,\ b)$라 하자.
점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 C$'(b,\ a)$는 곡선 $y=\log_2(x-1)-1$ 위에 있다.
점 C$'$을 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점 $(b-1,\ a+1)$은 B이다.
$a+1=2$, $b-1=4$이므로
$a=1$, $b=5$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

42. 그림과 같이 기울기가 -1인 직선이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C라 하자. 선분 AB의 길이가 $12\sqrt{2}$, 삼각형 ABC의 넓이가 84이다. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $a-\log_2 a$의 값은? [4점]



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

(2015년 10월 A형 17번)

42. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 x 좌표를 추론한다.

$\mathrm{A}(a,\ 2^{a})$, $\mathrm{B}(2^{a},\ a)$ 이고 $\mathrm{C}(\log_{2}a,\ a)$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=12\sqrt{2}$, $2(2^{a}-a)^{2}=288$, $2^{a}-a=12$ ⋯ ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=2^{a}-a=12$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=14$이다.

그러므로 $2^{a}-\log_{2}a=14$ ⋯ ㉡

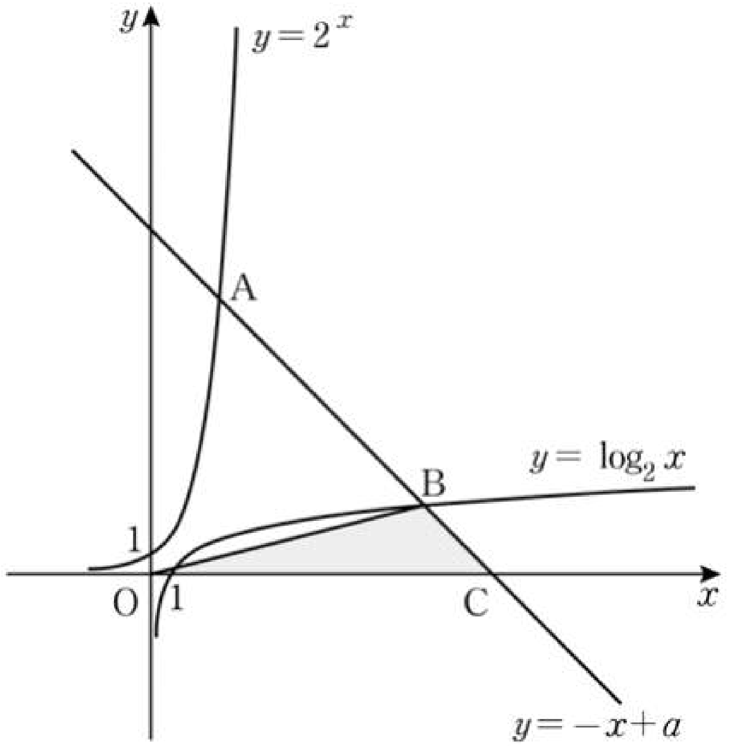
㉡−㉠으로부터 $a-\log_{2}a=2$

43. 그림과 같이 직선 $y=-x+a$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 C라 할 때, 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$
(나) 삼각형 OBC의 넓이는 40이다.

점 A의 좌표를 A$(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은?

(단, O는 원점이고, a는 상수이다.) [4점]



① 10　　② 15　　③ 20　　④ 25　　⑤ 30

(2015년 3월 A형 18번)

43. **[출제의도] 비례식의 성질과 로그함수의 성질을 활용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.**

직선이 y축과 만나는 점을 D라 하면

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $\mathrm{C}(a,\ 0)$이라 하면 점 $\mathrm{D}(0,\ a)$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}$

조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$에서

$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{5}\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{10}a^2=40$이므로 $a=20$

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

[다른 풀이]

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 $\mathrm{A}(p,\ q)$이므로 점 $\mathrm{B}(q,\ p)$이고, 점 $\mathrm{C}(a,\ 0)$이다.

조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$

점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$q=\frac{3a+p}{4}$, $p=\frac{q}{4}$에서 $a=5p$, $q=4p$

또, 삼각형 OBC의 넓이가 40이므로

$\frac{1}{2}ap=\frac{5}{2}p^2=40$

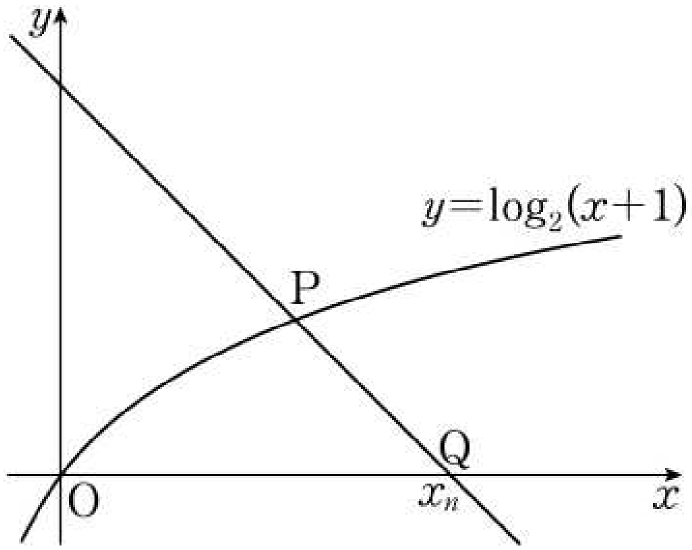
$p^2=16$에서 $p=4$이므로 $a=20$

($p<0$인 경우에는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.)

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

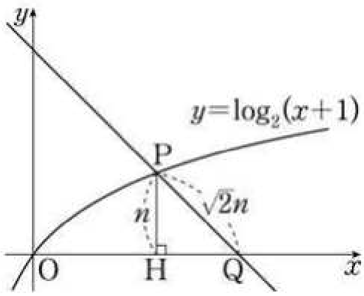
44. 그림과 같이 제1사분면에 있는 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}\,n$이 되도록 하는 점 Q의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} x_k$의 값은? [4점]



① 72 ② 84 ③ 96 ④ 108 ⑤ 120

(2018년 3월 가형 16번)

44. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 합을 구한다.



점 P의 좌표를 (a, b) (단, a, b는 양수)라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로 삼각형 PHQ는 $\overline{PH}=\overline{HQ}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{PQ}=\sqrt{2}n$이므로

$\overline{PH}=n$, 즉 $b=n$이다.

점 $P(a, n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$

$a=2^n-1$

이때 $\overline{OQ}=\overline{OH}+\overline{HQ}$, $\overline{HQ}=n$이므로

$x_n=a+n$

$=2^n-1+n$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} x_k &= \sum_{k=1}^{5}(2^k-1+k)\\ &= \sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k\\ &= \frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}\\ &= 62-5+15\\ &= 72\end{aligned}$$

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 (a, b) (단, a, b는 양수)라 하자.

점 Q의 좌표가 $(x_n, 0)$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{0-b}{x_n-a}=-1$에서 $x_n-a=b$

$x_n=a+b$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{(x_n-a)^2+(0-b)^2}\\ &= \sqrt{b^2+b^2}\\ &= \sqrt{2}b\end{aligned}$$

$\overline{PQ}=\sqrt{2}n$에서 $b=n$이다.

점 $P(a, n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$에서

$a=2^n-1$

$x_n=a+b$

$=2^n-1+n$

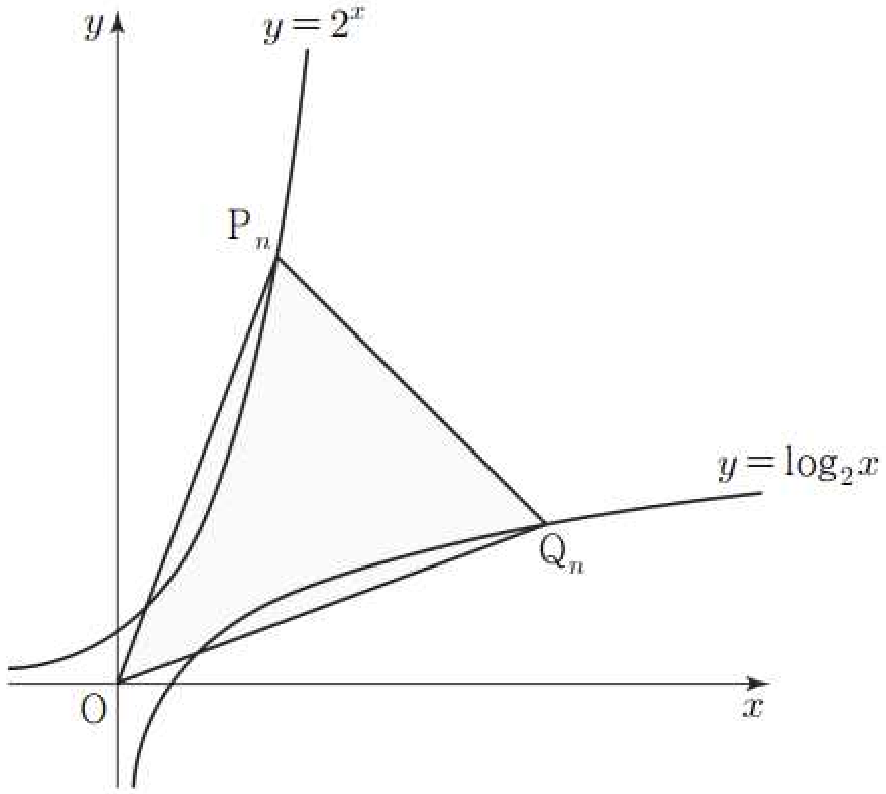
따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} x_k &= \sum_{k=1}^{5}(2^k-1+k)\\ &= \sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k\\ &= \frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}\\ &= 62-5+15\\ &= 72\end{aligned}$$

45. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 곡선 $y=2^x$ 위를 움직이는 점 $P_n(n, 2^n)$이 있다. 점 P_n을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 Q_n이라 하자.

삼각형 P_nOQ_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $2\sum_{n=1}^{5} S_n$의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]



① 1309　　② 1311　　③ 1313
④ 1315　　⑤ 1317

(2014년 4월 A형 19번)

45. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

함수 $y=\log_2 x$는 함수 $y=2^x$의 역함수이므로

점 Q_n의 좌표는 $(2^n, n)$

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 방정식은 $x+y-2^n-n=0$이고,

원점 O와 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 사이의 거리는 $\dfrac{2^n+n}{\sqrt{2}}$,

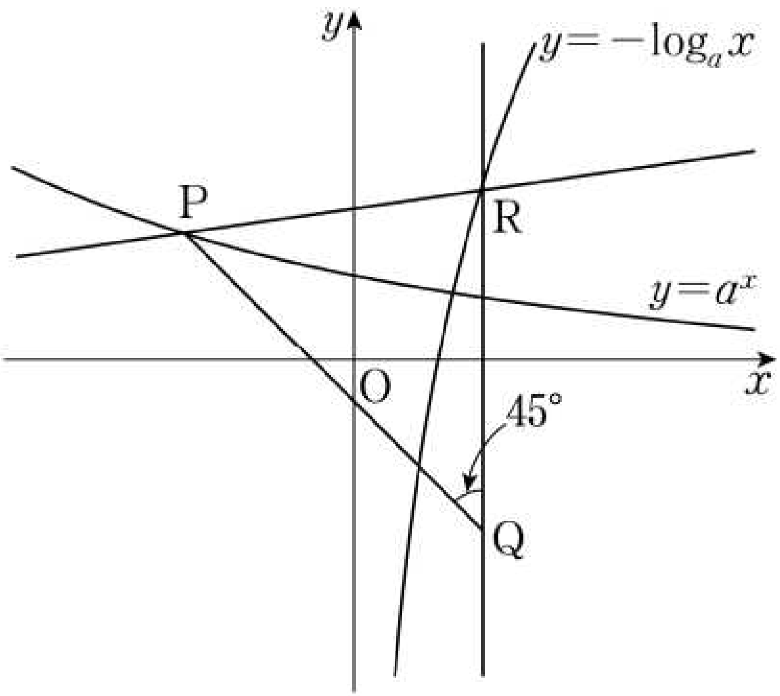
선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 $\sqrt{2}(2^n-n)\ (\because\ 2^n>n)$

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\times\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}(2^n-n)$$
$$=\frac{4^n-n^2}{2}$$

따라서 $2\displaystyle\sum_{n=1}^{5}S_n=\sum_{n=1}^{5}(4^n-n^2)$

$$=\frac{4(4^5-1)}{4-1}-\frac{5\times6\times11}{6}$$
$$=1309$$

46. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x(0<a<1)$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점 R에 대하여 $\angle PQR = 45°$이다. $\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\frac{1}{7}$일 때, 상수 a의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(2020년 10월 가형 15번)

46. **[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.**

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t, a^t)$ $(t<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 (a^t, t)이다. $\angle \mathrm{PQR}=45°$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

즉 점 R의 좌표는 $(a^t, -t)$이다.

직선 PR의 기울기는 $\frac{1}{7}$이므로 $\frac{a^t+t}{t-a^t}=\frac{1}{7}$에서

$a^t=-\frac{3}{4}t$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PR}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sqrt{(t-a^t)^2+(a^t+t)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$a^{2t}+t^2=\frac{25}{4}$ …… ㉡

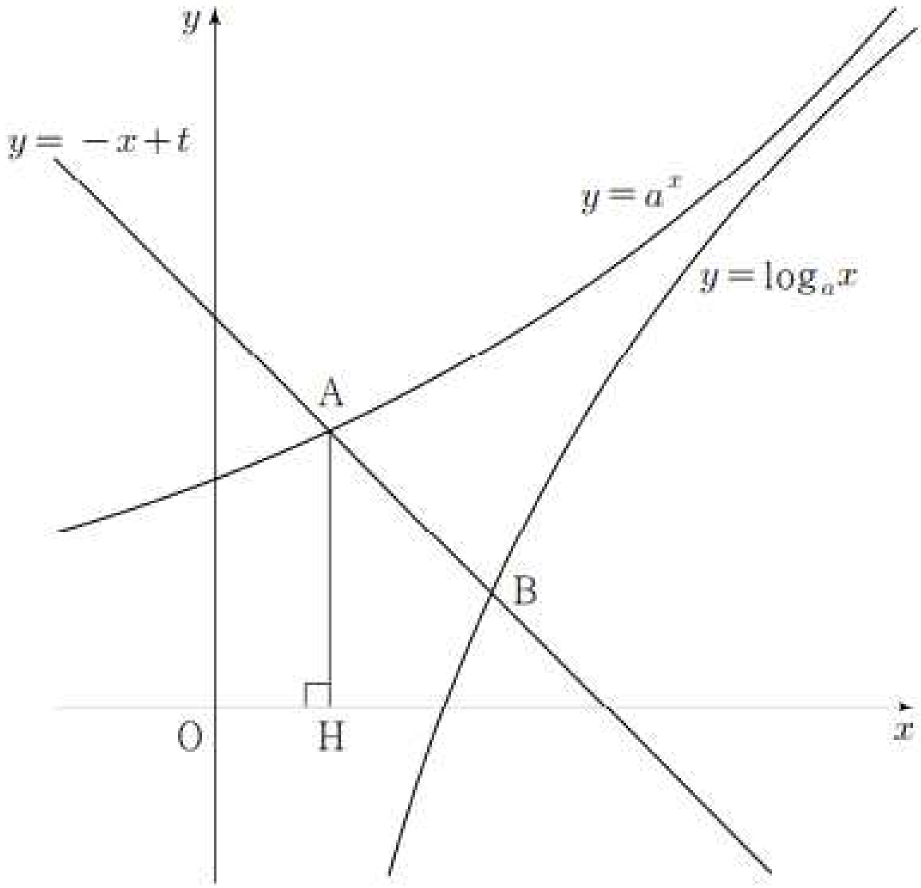
㉠, ㉡에서 $t^2=4$이고 $t<0$이므로 $t=-2$

㉠에 대입하면 $\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2}$이고 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}$

47. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t에 대하여 직선 $y=-x+t$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

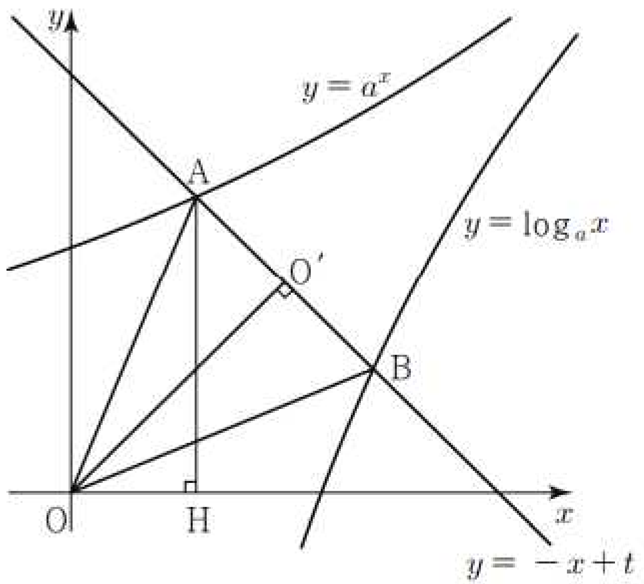
(가) $\overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{AB}} = 1 : 2$
(나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$200(t-a)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



(2020년 9월 고2 29번)

47. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 활용하여 추론하기



점 A 의 좌표를 (p, q) $(q > p)$ 라 하면

$q = a^p$, $p + q = t$ $\cdots$ ㉠

함수 $y = \log_a x$ 는 함수 $y = a^x$ 의 역함수이므로

점 B 의 좌표는 (q, p)

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2(q-p)^2} = \sqrt{2}(q-p)$

조건 (가)에 의하여

$2\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{AB}}$, $2p = \sqrt{2}(q-p)$,

$q = (1+\sqrt{2})p$ $\cdots$ ㉡

원점 O 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 O$'$ 이라 하면 조건 (가)에 의하여 $\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{BO'}}$ 이고

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$, $\angle \mathrm{OHA} = \angle \mathrm{BO'O} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\triangle \mathrm{AOH} \equiv \triangle \mathrm{OBO'}$ $\cdots$ ㉢

$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ 라 하면

$\angle \mathrm{AOH} = \angle \mathrm{O'OH} + \angle \mathrm{AOO'} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}$

$\angle \mathrm{OBO'} = \dfrac{\pi}{2} - \angle \mathrm{BOO'} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$

㉢ 에 의하여 $\angle \mathrm{AOH} = \angle \mathrm{OBO'}$ 이므로

$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}} = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sin\dfrac{\pi}{4} = 1 = 2p$, $p = \dfrac{1}{2}$

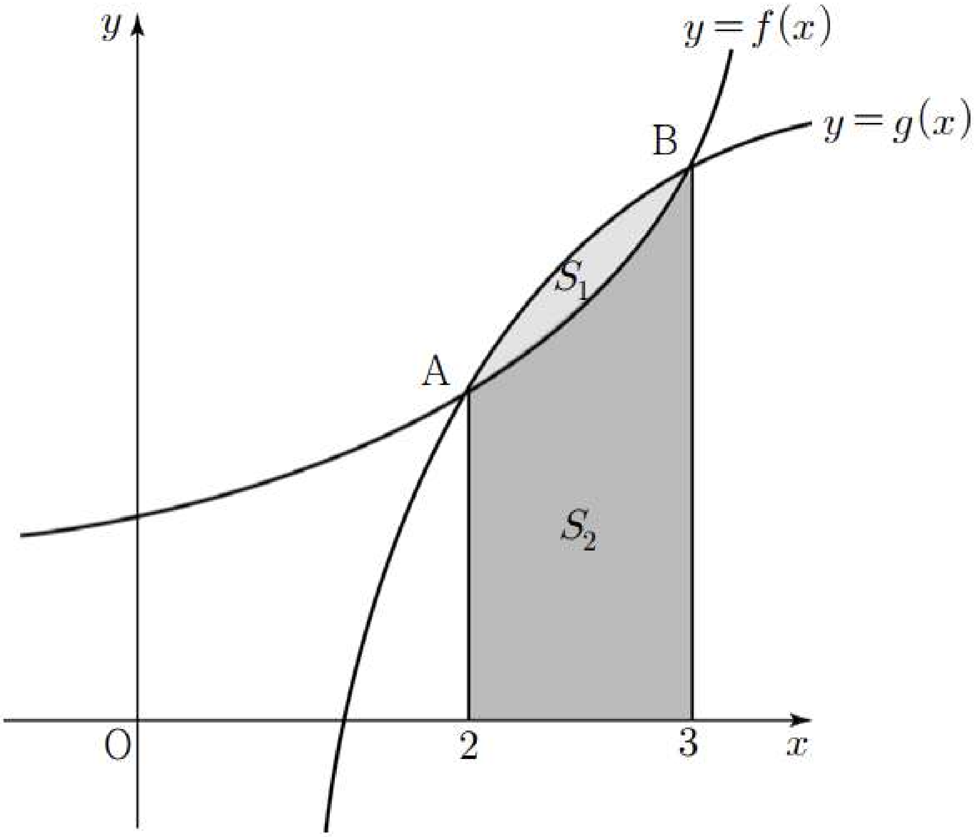
㉡ 에 의하여 $q = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

㉠ 에 의하여

$t = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $200(t-a) = 50$

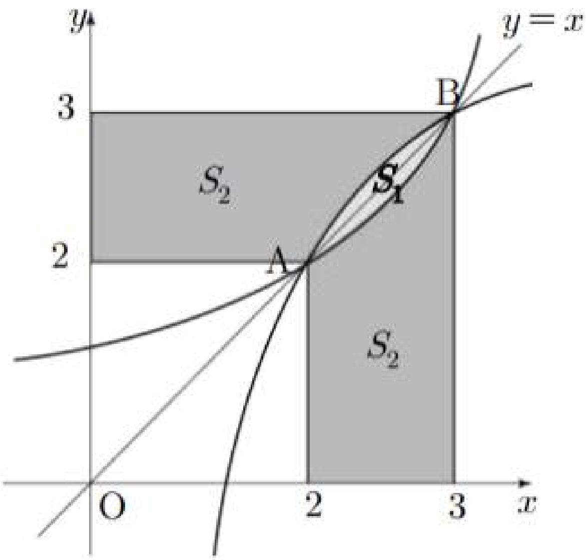
48. 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$과 $g(x)=\log_2(x-1)+2$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(2,\ f(2))$, $\mathrm{B}(3,\ f(3))$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하고, 함수 $f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=2$, $x=3$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+2S_2의 값을 구하시오. [4점]



(2012년 9월 고2 A형 30번)

48. **[출제의도] 로그함수와 역함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기**

$f(x)=2^{x-2}+1$는 $g(x)=\log_2(x-1)+2$의 역함수이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
함수 $f(x)$의 그래프와 x축과 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_2는 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=2$, $y=3$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
그러므로 S_1+2S_2는 네 개의 직선 x축, y축, $x=3$, $y=3$으로 둘러싸인 정사각형의 넓이와 네 개의 직선 x축, y축, $x=2$, $y=2$로 둘러싸인 정사각형의 넓이의 차와 같다.
$\therefore S_1+2S_2=9-4=5$



49. 두 함수

$$f(x) = 2^x,\ g(x) = 2^{x-2}$$

에 대하여 두 양수 a, b $(a < b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

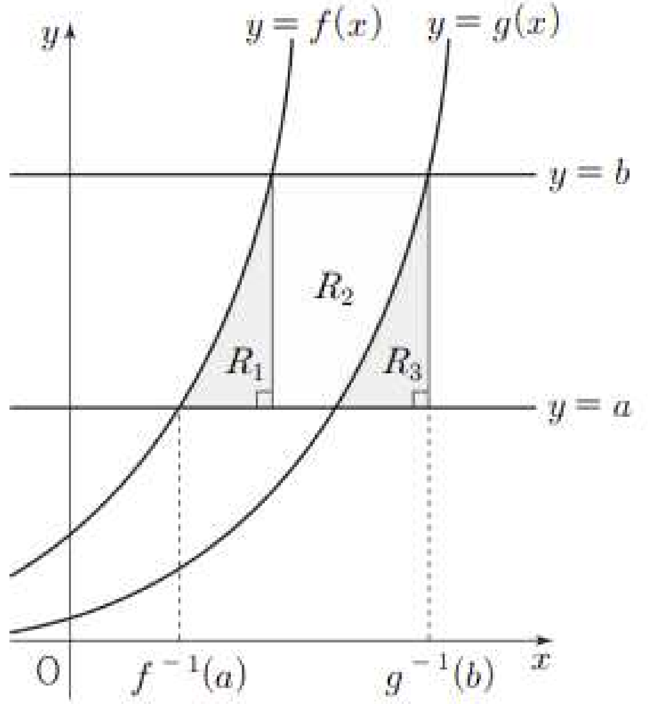
(가) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이다. (나) $g^{-1}(b) - f^{-1}(a) = \log_2 6$

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

(2020년 4월 나형 20번)

49. **[출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기**

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$의 그래프는 다음과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$S_1 = S_3$

조건 (가)에서

$S_1 + S_2 = S_3 + S_2 = 2\times(b-a)=6$

$b-a=3$ …… ㉠

조건 (나)에서

$f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$ (p, q는 실수)라 하면

$2^p = a$, $2^{q-2}=b$

$p=\log_2 a$, $q=\log_2 b+2=\log_2 4b$

$q-p=\log_2 4b-\log_2 a=\log_2\dfrac{4b}{a}=\log_2 6$

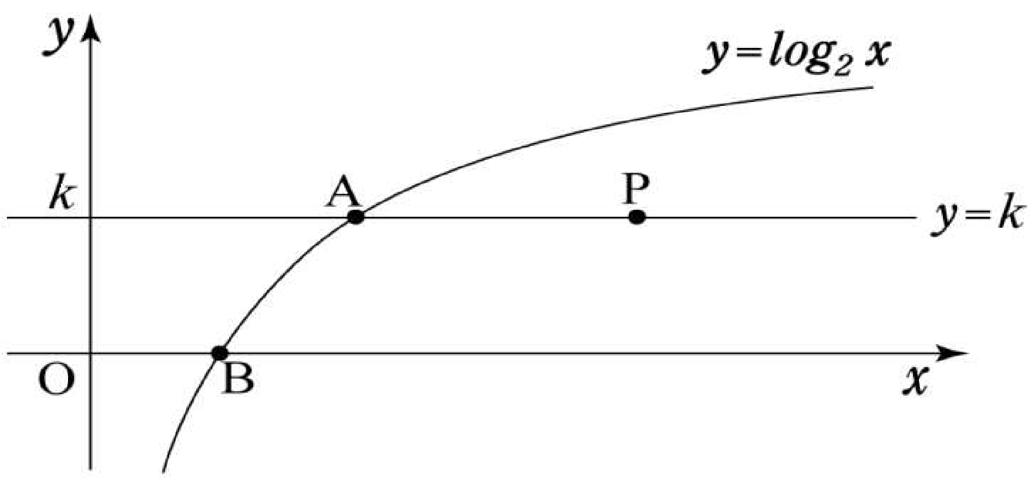
$3a=2b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$

$a+b=15$

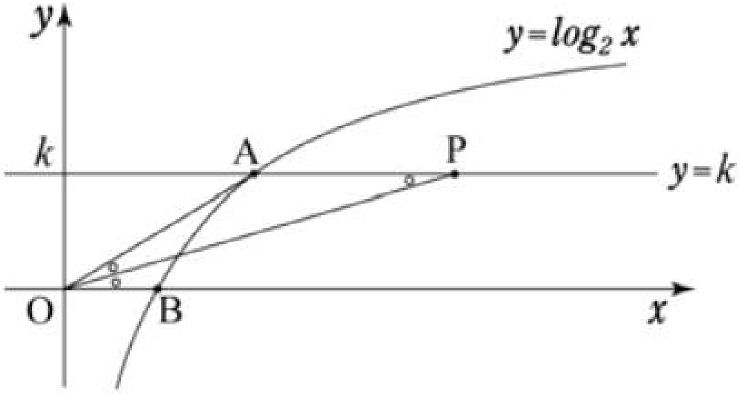
50. 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=k$ (k는 자연수), x축과의 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$ 위의 한 점 P에 대하여 직선 OP가 $\angle$AOB를 이등분할 때, 선분 AP의 길이를 $f(k)$라 하자. $\sum_{k=1}^{4}\{f(k)\}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점)

[4점]



(2010년 7월 나형 25번)

50. **[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기**

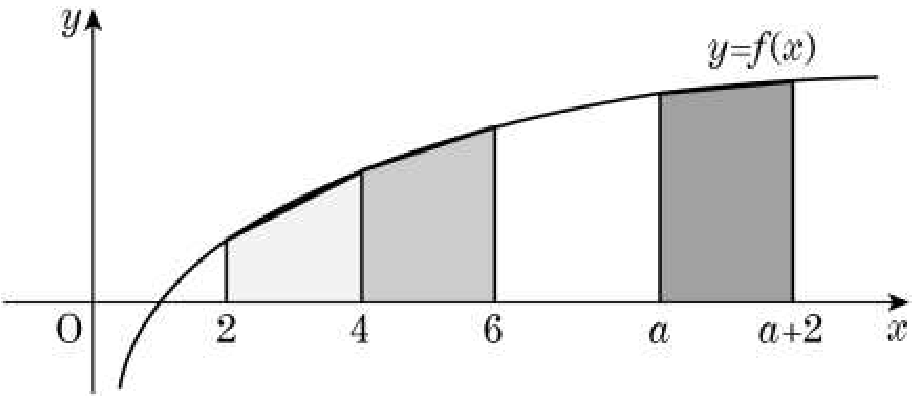


직선 OP 가 $\angle\mathrm{AOB}$ 의 이등분선이므로
$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{POB}$ 이고
$\angle\mathrm{POB} = \angle\mathrm{APO}$ (엇각)이므로
$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{APO}$, $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AP}}$ 이다.
$\overline{\mathrm{AP}} = f(k)$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}} = f(k)$.
A 의 좌표가 $(2^k,\ k)$ 이므로
$f(k) = \sqrt{4^k + k^2}$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{4} \{f(k)\}^2 = \sum_{k=1}^{4} (4^k + k^2) = 370$

51. 함수 $f(x)=\log_2 x$에 대하여 좌표평면에서 네 점

$$(t,\ f(t)),\ (t,\ 0),\ (t+2,\ 0),\ (t+2,\ f(t+2))\ (\text{단, } t>1)$$

을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 $S(t)$라 하자. $S(2)$, $S(4)$, $S(a)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a=\sqrt{n}-1$이다. 자연수 n의 값을 구하시오. [4점]



(2013년 10월 B형 26번)

51. [출제의도] 로그의 성질과 등차수열의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

주어진 사각형은 사다리꼴이므로

$S(2)=\frac{1}{2}\times 2(\log_2 2+\log_2 4)=\log_2 8$

$S(4)=\frac{1}{2}\times 2(\log_2 4+\log_2 6)=\log_2 24$

$S(a)=\frac{1}{2}\times 2\{\log_2 a+\log_2(a+2)\}=\log_2 a(a+2)$

$S(2)$, $S(4)$, $S(a)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S(4)=S(2)+S(a)$

$2\log_2 24=\log_2 8+\log_2 a(a+2)$

$24^2=8a(a+2)$

$a^2+2a-72=0$

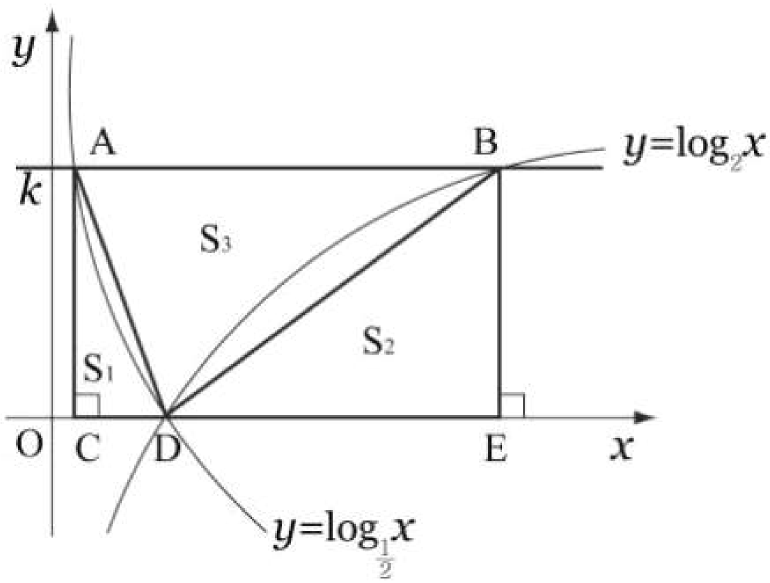
$\therefore\ a=-1+\sqrt{73}$ 또는 $a=-1-\sqrt{73}$

그런데 $a>1$이므로

$a=\sqrt{73}-1$

$\therefore\ n=73$

52. 그림과 같이 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, E라 하자. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x$의 교점 D에 대하여 $\triangle$ACD, $\triangle$BDE, $\triangle$ADB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때, S_1, S_2, S_3은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 양수 k의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

(2009년 7월 나형 27번)

52. **[출제의도] 로그함수의 그래프를 해석하여 수학내적 문제해결하기**

$\mathrm{D}(1,\ 0)$, $\mathrm{A}(2^{-k},\ k)$, $\mathrm{B}(2^{k},\ k)$ 이므로

$\mathrm{S}_1 = \dfrac{1}{2}(1-2^{-k})k$, $\mathrm{S}_2 = \dfrac{1}{2}(2^{k}-1)k$,

$\mathrm{S}_3 = \dfrac{1}{2}(2^{k}-2^{-k})k$

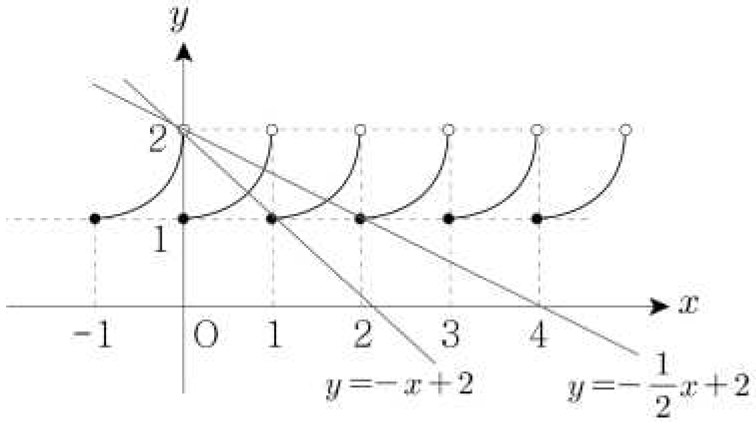
$S_1,\ S_2,\ S_3$는 등차수열이므로 $2S_2 = S_1 + S_3$.

대입하여 풀면 $k=1$

53. 두 함수 $f(x)=2^x$ 과 $g(x)=x-[x]$ 에 대하여 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{n}x+2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 의 교점의 개수를 a_n 이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

(2009년 10월 나형 24번)

53. **[출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 등차수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**



그림에서 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, 3, 4, 5, \cdots$ 이므로 첫째항이 2, 공차가 1 인 등차수열을 이룬다.

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \frac{10(2+11)}{2} = 65$

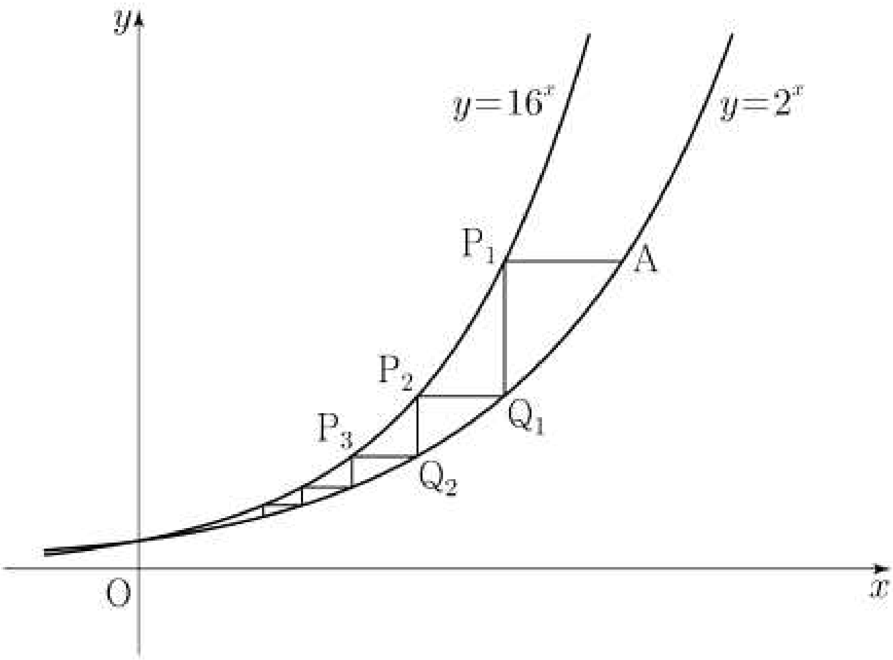
54. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64, 2^{64})$이 있다.

점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.

점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



(2023학년도 6월 13번)

54. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 구하고 이를 이용하여 간단한 지수방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.

이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로

$2^{64}=16^{x_1}$에서

$2^{64}=2^{4x_1}$

$4x_1=64$에서

$x_1=16$

같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, Q_n의 x좌표는 x_n으로 서로 같고, 두 점 Q_n, P_{n+1}의 y좌표는 같으므로

$2^{x_n}=16^{x_{n+1}}$

즉,

$2^{x_n}=2^{4x_{n+1}}$

이므로

$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$x_n=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=2^4\times 2^{-2n+2}=2^{6-2n}$

한편,

$x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5\ge\frac{1}{k}$이고 $x_6<\frac{1}{k}$

어어야 한다.

$x_5\ge\frac{1}{k}$에서 $2^{-4}\ge\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16}\ge\frac{1}{k}$에서 $k\ge 16$ ⋯ ㉠

$x_6<\frac{1}{k}$에서 $2^{-6}<\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64}<\frac{1}{k}$에서 $k<64$ ⋯ ㉡

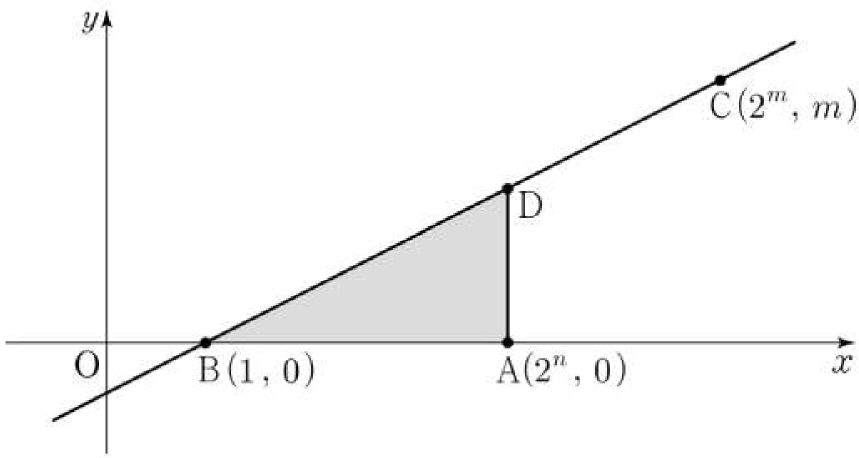
㉠, ㉡에서 $16\le k<64$이므로 자연수 k의 개수는 $64-16=48$이다.

정답 ①

55. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

> (가) 점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$이다.
> (나) 두 점 $\mathrm{B}(1, 0)$과 $\mathrm{C}(2^m, m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.

① 109 ② 111 ③ 113 ④ 115 ⑤ 117



(2015학년도 수능기출 B형 21번)

55. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $B(1,0)$, $C(2^m, m)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$$

이므로 점 D의 좌표는

$$D(2^n, \frac{m}{2^m-1}(2^n-1))$$

따라서, 삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같으므로

$$\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\le\frac{m}{2}$$

$$(2^n-1)^2\le 2^m-1$$

이때, $n=1$ 이면

$1\le 2^m-1$, $2\le 2^m$ 이므로 $a_1=1$

또한, 2이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$(2^n-1)^2\le 2^{2n}-1$$

이므로 $2n\le m$ 이면 된다.

$\therefore\ a_1=1,\ a_n=2n(n\ge 2)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n=a_1+\sum_{n=2}^{10}2n$$

$$=1+\frac{9(4+20)}{2}=109$$

<답> ①

56. $\angle \mathrm{A}=90^{\circ}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\log_2 x$, $\overline{\mathrm{AC}}=\log_4 \dfrac{16}{x}$ 인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

(2021학년도 9월 나형 17번)

56. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서

$\angle A = 90°$ 이므로

$$S(x) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\log_2 x \times \log_4 \frac{16}{x}$$

$$= \log_2 x \times \left(2 - \frac{1}{2}\log_2 x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x$$

$$= -\frac{1}{2}(\log_2 x - 2)^2 + 2$$

$S(x)$는 $\log_2 x = 2$, 즉 $x = 4$일 때

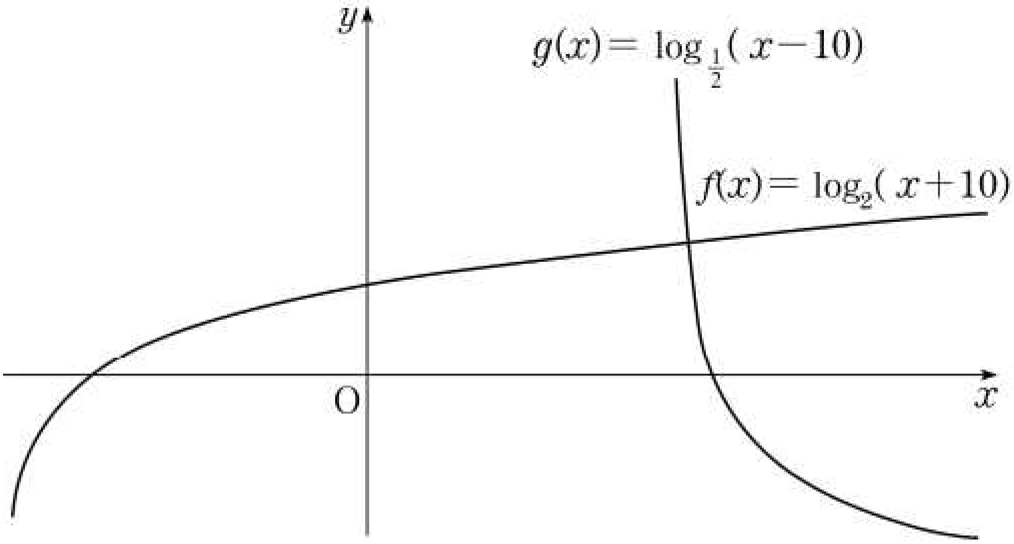
최댓값 2를 가진다.

따라서 $a = 4$, $M = 2$이므로

$a + M = 4 + 2 = 6$

정답 ①

57. 두 함수 $f(x) = \log_2(x+10)$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-10)$의 그래프가 그림과 같다.



구간 $(10, \infty)$에서 정의된 함수 $y = |f(x) - g(x)|$는 $x = p$일 때 최솟값을 갖는다. p^2의 값을 구하시오. [4점]

(2014년 10월 A형 26번)

57. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 최솟값 구하는 문제를 해결한다.

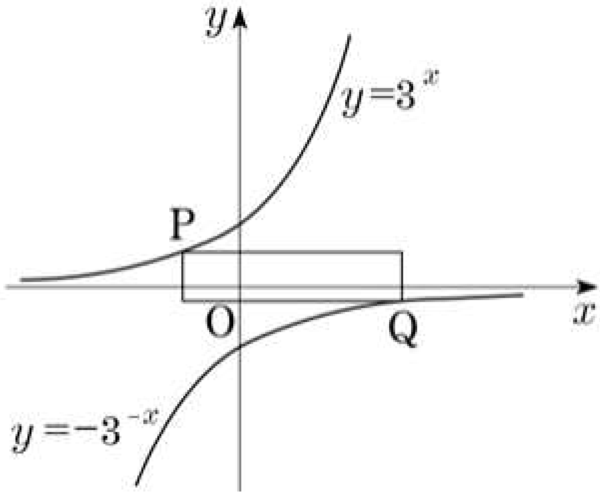
$|f(x)-g(x)| \geq 0$ 이므로

$f(x)-g(x)=0$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$\begin{aligned}\log_2(x+10)-\log_{\frac{1}{2}}(x-10) &= \log_2(x+10)+\log_2(x-10) \\ &= \log_2(x^2-100)=0\end{aligned}$$

따라서 $p^2-100=1$ 에서 $p^2=101$ 이다.

58. 함수 $y=3^{x}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ 3^{\alpha})$과 함수 $y=-3^{-x}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{Q}(\beta,\ -3^{-\beta})$에 대하여 $\beta-\alpha=4$가 성립한다. 그림과 같이 두 점 P, Q를 지나고 x축, y축과 평행한 직선을 그려 만들어지는 직사각형의 넓이의 최솟값은? [4점]



① $\dfrac{2}{9}$ ② $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$ ③ $\dfrac{4}{9}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\dfrac{8}{9}$

(2011년 10월 나형 15번)

58.. [출제의도] 지수함수에서 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$이고, 세로의 길이는 $3^{\alpha}-(-3^{-\beta})$이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=(\beta-\alpha)(3^{\alpha}+3^{-\beta})=4(3^{\alpha}+3^{-\alpha-4})$

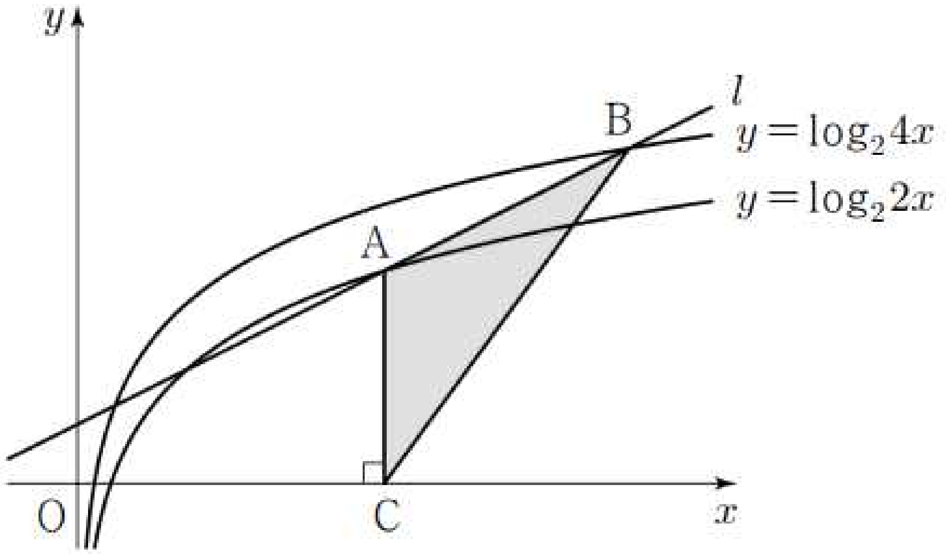
$\geq 4\times 2\sqrt{3^{\alpha}\cdot 3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$

(단, 등호는 $\alpha=-2$, $\beta=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

59. 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 A 라 하고, 직선 l 이 곡선 $y=\log_2 4x$ 와 만나는 두 점 중 x 좌표가 큰 점을 B 라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{5}$ 일 때, 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발 C 에 대하여 삼각형 ACB 의 넓이는? [4점]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6



(2022년 7월 11번)

59. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\mathrm{A}(a,\ \log_2 2a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log_2 4b)$ $(a<b)$라 하자.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\log_2 4b-\log_2 2a}{b-a}=\frac{1}{2}$에서

$\log_2 4b-\log_2 2a=\frac{1}{2}(b-a)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\sqrt{(b-a)^2+(\log_2 4b-\log_2 2a)^2}\\&=\sqrt{(b-a)^2+\frac{1}{4}(b-a)^2}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\times(b-a)=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$b-a=4$ ⋯ ㉠

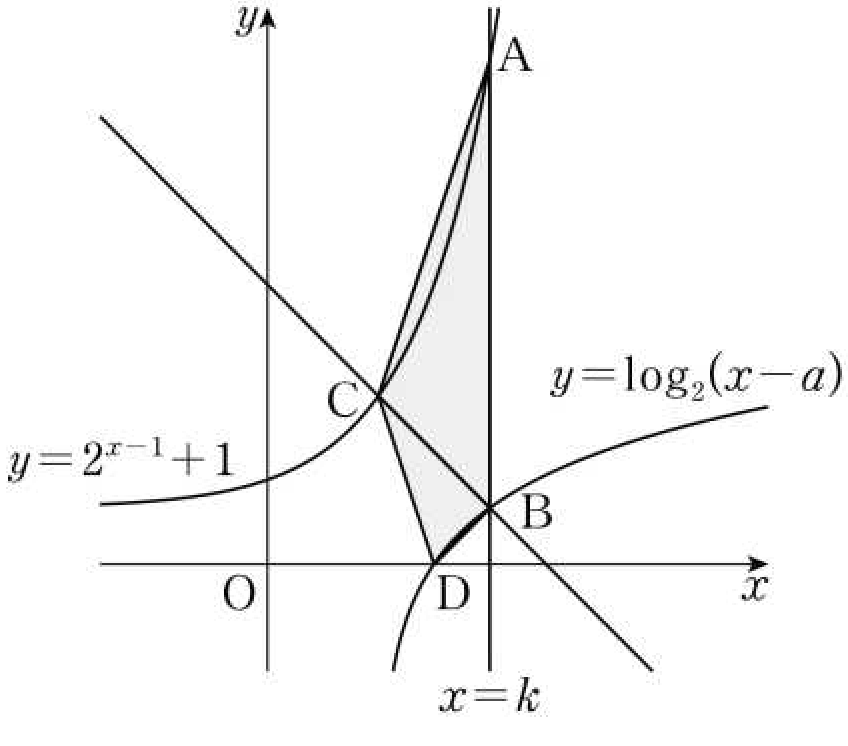
$\log_2 4b-\log_2 2a=\log_2\frac{2b}{a}=2$, $b=2a$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=4$, $b=8$

$\mathrm{A}(4,\ 3)$, $\mathrm{B}(8,\ 5)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\times4=6$

60. 그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$) [4점]



① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

(2022년 3월 11번)

60. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하여 사각형의 넓이를 구한다.

점 A의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}+1)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로 점 B의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}-7)$이다.

직선 BC의 기울기가 -1이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$이므로 두 점 B, C의 x좌표의 차와 y좌표의 차는 모두 2이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(k-2,\ 2^{k-1}-5)$이다.

한편 점 C는 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점이므로

$2^{k-3}+1=2^{k-1}-5$

$\frac{1}{2}\times 2^k-\frac{1}{8}\times 2^k=6,\ 2^k=16$

$k=4$

즉, A(4, 9), B(4, 1), C(2, 3)이다.

점 B가 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위의 점이므로

$1=\log_2(4-a),\ 4-a=2,\ a=2$

점 D의 x좌표는 $x-2=1$에서 3

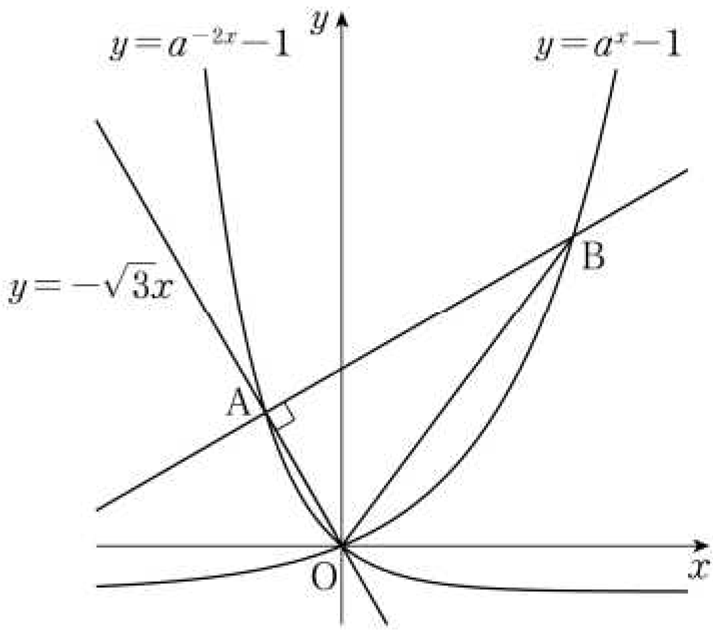
사각형 ACDB의 넓이는 두 삼각형 ACB, CDB의 넓이의 합이고 $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이므로

$\frac{1}{2}\times 8\times 2+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$

61. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-2x}-1,\ y=a^{x}-1$$

이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^{x}-1$과 제1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



(2022년 10월 21번)

61. **[출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결한다.**

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}k\ (k>0)$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{19}k$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4k$ 이다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 라 하자. 직선 OA와 x축이 이루는 예각의 크기가 $60°$ 이므로

$x_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}k,\ y_1=\dfrac{3}{2}k$

따라서 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}k,\ \dfrac{3}{2}k\right)$

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 직선 AB와 x축이 이루는 예각의 크기가 $30°$ 이다.

$x_2-x_1=4k\cos 30°=2\sqrt{3}k$ 에서

$x_2=x_1+2\sqrt{3}k=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}k$

$y_2-y_1=4k\sin 30°=2k$ 에서

$y_2=y_1+2k=\dfrac{7}{2}k$

따라서 $\mathrm{B}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}k,\ \dfrac{7}{2}k\right)$

점 A는 곡선 $y=a^{-2x}-1$ 위의 점이므로

$\dfrac{3}{2}k=a^{\sqrt{3}k}-1$ 에서 $a^{\sqrt{3}k}=\dfrac{3k+2}{2}$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=a^{x}-1$ 위의 점이므로

$\dfrac{7}{2}k=a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}-1$ 에서 $a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}=\dfrac{7k+2}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\dfrac{3k+2}{2}\right)^3=\left(\dfrac{7k+2}{2}\right)^2$

$27k^3-44k^2-20k=0,\ k(k-2)(27k+10)=0$

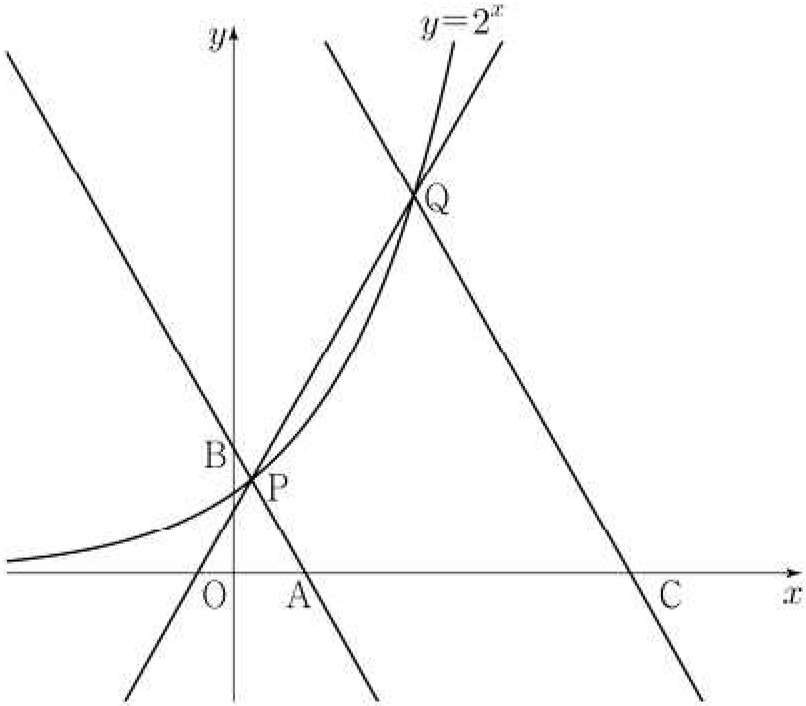
$k>0$ 이므로 $k=2$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=4k=8$

62. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, 2^a)$, $\mathrm{Q}(b, 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}}, \quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

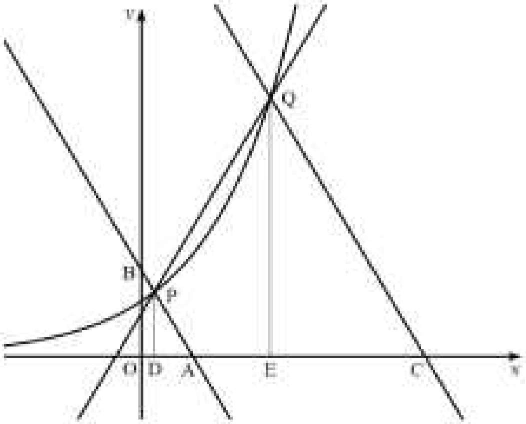
일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



(2023학년도 9월 21번)

62. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{PB}=k$라 하면

$\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{PB}$

$=4\overline{PB}-\overline{PB}$

$=3\overline{PB}=3k$

이고,

$\overline{CQ}=3\overline{AB}$

$=3\times4\overline{PB}$

$=12\overline{PB}=12k$

이므로 $\overline{AP}:\overline{CQ}=3k:12k=1:4$

이때 $\triangle PDA \backsim \triangle QEC$이므로

$\overline{PD}:\overline{QE}=\overline{AP}:\overline{CQ}=1:4$

즉, $2^a:2^b=1:4$이므로

$2^b=4\times2^a=2^{a+2}$

에서

$b=a+2$

즉,

$$m=\frac{2^b-2^a}{b-a}$$

$$=\frac{2^{a+2}-2^a}{(a+2)-a}$$

$$=\frac{3\times2^a}{2}$$

$$=3\times2^{a-1}$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$

㉠에 $y=0$을 대입하면

$-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$

$x-a=\frac{2}{3}$

$x=a+\frac{2}{3}$

즉, 점 A의 x좌표가 $a+\frac{2}{3}$이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle APD \backsim \triangle ABO$이므로

$\overline{AO}:\overline{DO}=\overline{AB}:\overline{PB}=4:1$

즉, $a+\frac{2}{3}:a=4:1$

$a+\frac{2}{3}=4a$

$a=\frac{2}{9}$

$b=a+2=\frac{2}{9}+2=\frac{20}{9}$

따라서

$$90\times(a+b)=90\times\left(\frac{2}{9}+\frac{20}{9}\right)$$

$$=90\times\frac{22}{9}$$

$$=220$$

정답 220

63. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2 \leq x \leq 0$일 때, $f(x) = \lvert x+1 \rvert - 1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) + f(-x) = 0$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x) = f(2+x)$

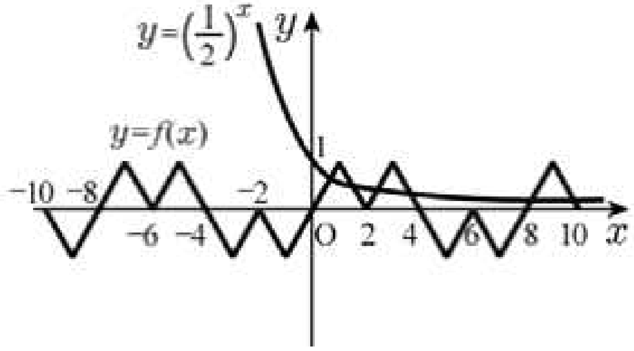
$-10 \leq x \leq 10$에서 $y = f(x)$의 그래프와 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는? [4점]

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

(2010년 10월 나형 10번)

63. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$y=f(x)$ 와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 개수는 6이다.

64. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$에서 $f(x) = \lvert 2x \rvert$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

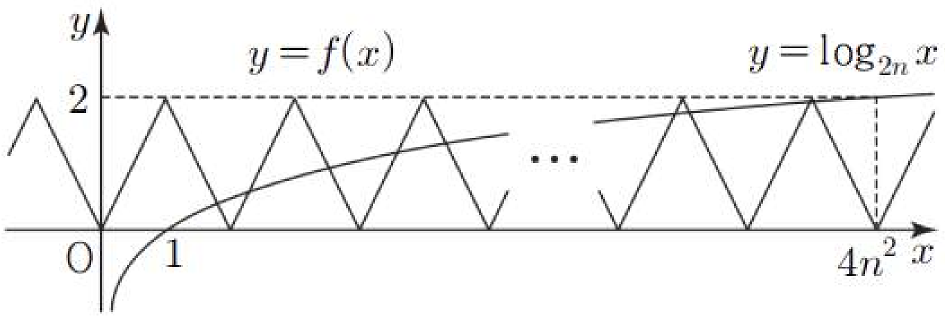
자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_{2n}x$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

(2014년 4월 A형 29번)

64. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 곡선 $y=\log_{2n}x$는 점 $\left(4n^2, 2\right)$를 지난다.



그러므로 자연수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k, k+1]$에서 곡선 $y=\log_{2n}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다. (단, $1 \leq k \leq 4n^2-1$)

$\therefore\ a_n=4n^2-1$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} a_n=\sum_{n=1}^{7}\left(4n^2-1\right)$

$$=4\times\frac{7\times8\times15}{6}-7=553$$

65. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

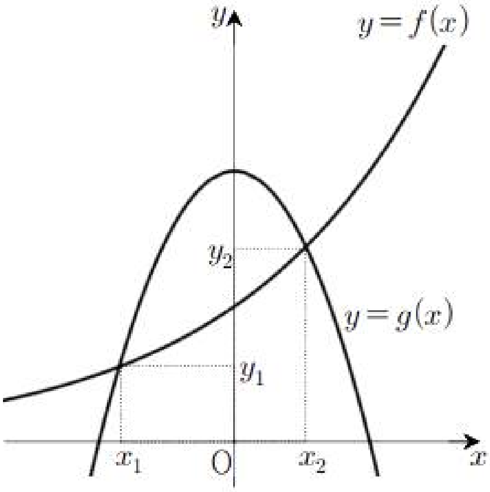
(2021학년도 6월 가형 18번)

65. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 이차함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

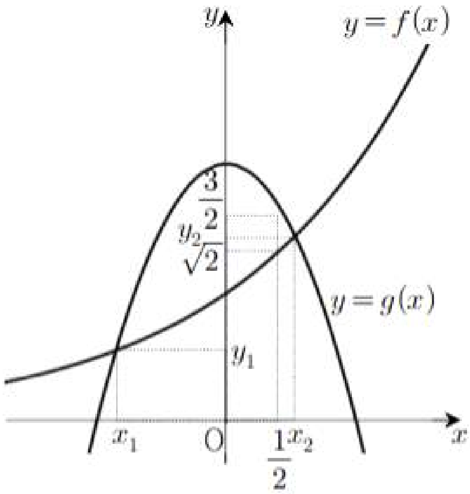
$f(x)=2^x$, $g(x)=-2x^2+2$로 놓으면

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$

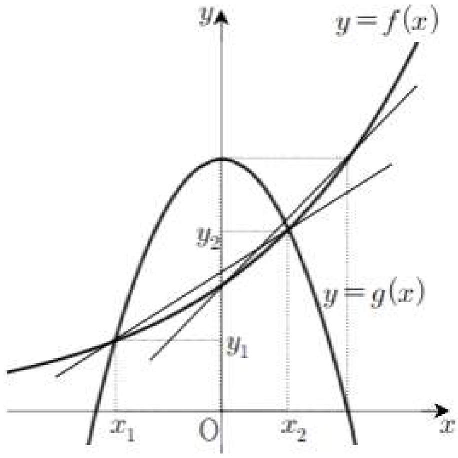


즉, $x_2>\frac{1}{2}$이다. (참)

ㄴ. 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

이고, 두 점 $(0, 1)$, $(1, 2)$를 지나는 직선의 기울기는 1



두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기가 1 보다 작으므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$에서

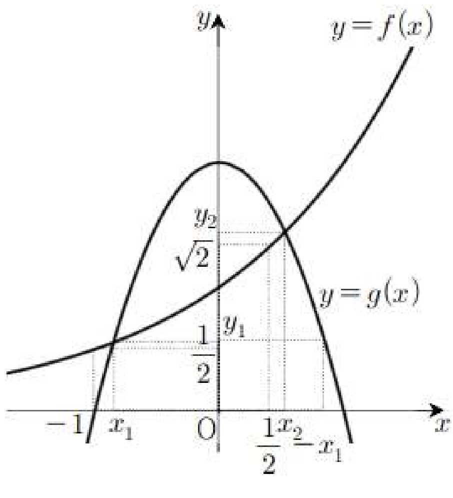
$y_2-y_1<x_2-x_1$ (참)

ㄷ. $f(-1)=\frac{1}{2}$이므로 $y_1>\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$이므로 $y_2>\sqrt{2}$

즉, $y_1y_2>\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……㉠

또, 그림과 같이 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $-x_1>x_2$이다.



즉 $x_1+x_2<0$

이때, $y_1=2^{x_1}$, $y_2=2^{x_2}$이므로

$y_1y_2=2^{x_1}\times2^{x_2}$

$=2^{x_1+x_2}<2^0=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

66. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$

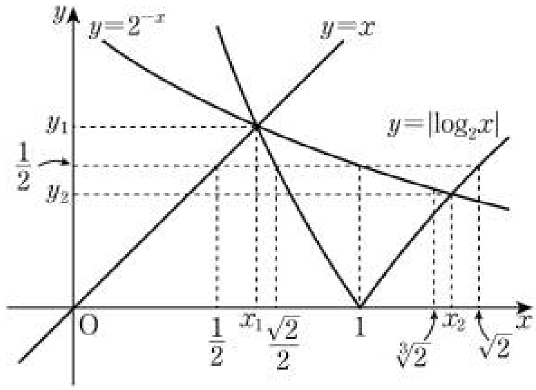
ㄷ. $y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2020년 10월 나형 21번)

66. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 두 교점의 관계를 추론한다.

$y=2^{-x}$, $y=\left|\log_2 x\right|$, $y=x$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<1$일 때,

두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=-\log_2 x$의 교점은

직선 $y=x$ 위에 있으므로

$x_1=y_1$이고 $x_1<1$, $y_1<1$

그림에서 $y=2^{-x}$은 감소함수이므로

$2^{-1}<2^{-x_1}=y_1$ 즉, $\frac{1}{2}<y_1=x_1$

한편, $-\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}<y_1=-\log_2 x_1$이고

$y=-\log_2 x$는 감소함수이므로 $x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$이고 $\log_2\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}$

그런데 $8<9$이므로 $2^{\frac{3}{2}}<3$ …… ㉠

$\sqrt[3]{2}$와 $\frac{3}{2}$을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3<\left(\frac{3}{2}\right)^3$이

므로 $\sqrt[3]{2}<\frac{3}{2}$ 즉, $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3$이므로

$\log_2\sqrt[3]{2}<2^{-\sqrt[3]{2}}$

그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2$

또, $\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$

$\frac{1}{2}>\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$이므로 $\log_2\sqrt{2}>2^{-\sqrt{2}}$

그림에서 $x_2<\sqrt{2}$

그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $y_1=x_1$이므로 ㄱ에서 $\frac{1}{2}<y_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\log_2 x_2$이고 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$,

$\log_2\sqrt[3]{2}<\log_2 x_2<\log_2\sqrt{2}$이므로

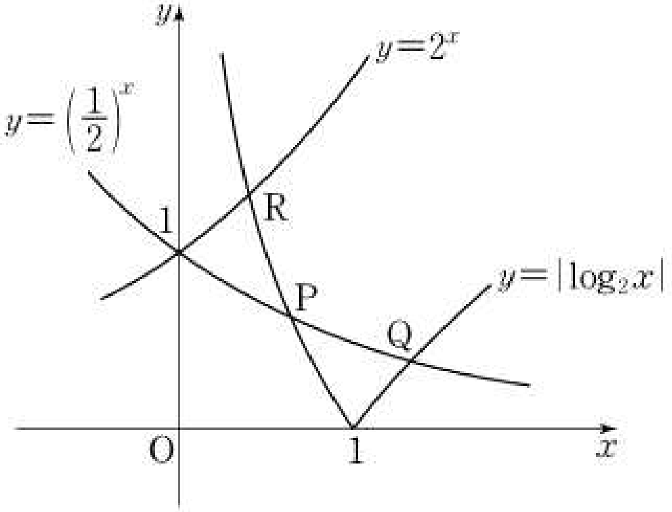
$\frac{1}{3}<y_2<\frac{1}{2}$

그러므로 $y_1-y_2<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

67. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

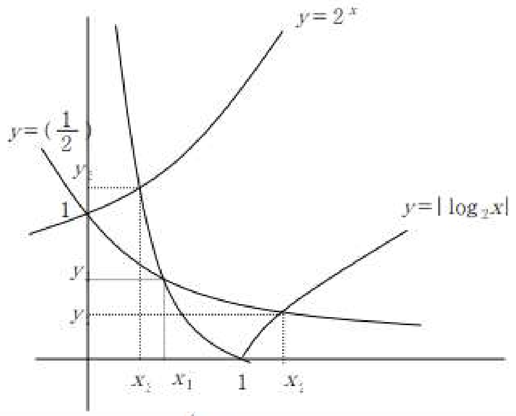
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2011학년도 수능기출 나형 16번)

67.

세 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



또한, $|\log_2 x| = \begin{cases} \log_2 x & (x \geq 1) \\ \log_{\frac{1}{2}} x & (x < 1) \end{cases}$ 이다.

ㄱ. 위의 그림에서 $x_1 < 1$ 이고

$\log_{\frac{1}{2}} x = 1$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{1}{2} < x_1 < 1$ (참)

ㄴ. 두 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$와 $y = (\frac{1}{2})^x$은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이고 두 곡선 $y = \log_2 x$와 $y = 2^x$도 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로

$x_2 = y_3$, $y_2 = x_3$

$\therefore$ $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$ (참)

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{y_1 - 1}{x_1} > \frac{y_2 - 1}{x_2}$

따라서 좌변은 두 점 $(0, 1)$, (x_1, y_1)을 지나는 직선의 기울기이고 우변은 두 점 $(0, 1)$, (x_2, y_2)을 지나는 직선의 기울기이므로

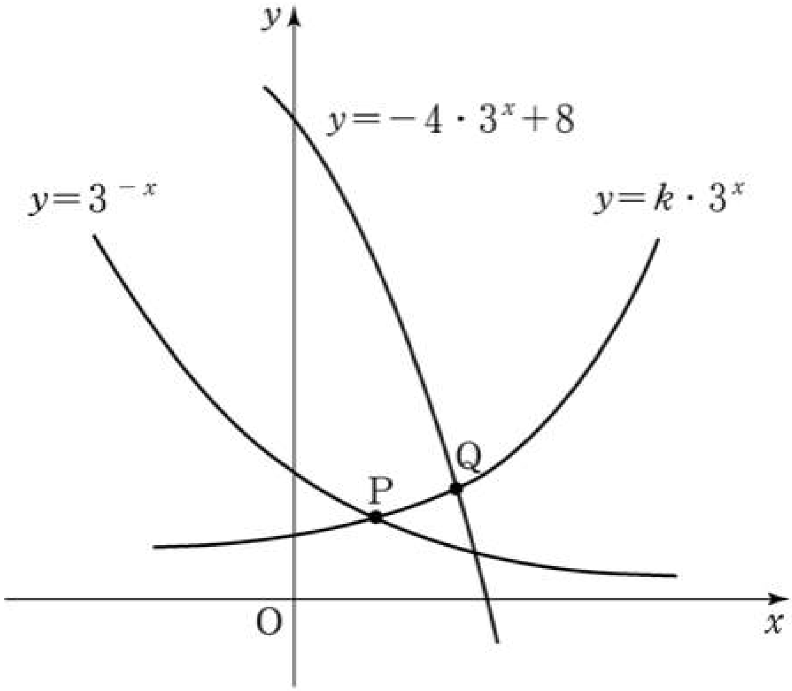
$\frac{y_1 - 1}{x_1} < \frac{y_2 - 1}{x_2}$

$\therefore$ $x_2(x_1 - 1) < y_1(y_2 - 1)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 뿐이다.

답 ③

68. 함수 $y=k\cdot 3^x(0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4\cdot 3^x+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 $1:2$일 때, $35k$의 값을 구하시오. [4점]



(2007학년도 수능기출 나형 25번)

68.

점 P의 x좌표를 a라 하면

$$k \cdot 3^{a} = 3^{-a}$$

따라서 $k \cdot 3^{a} = \frac{1}{3^{a}}$ 이므로 양변에 3^{a}을 곱하여 정리하면

$$(3^{a})^{2} = 3^{2a} = \frac{1}{k}$$

이 때, 점 Q의 x좌표는 $2a$이므로

$$k \cdot 3^{2a} = -4 \cdot 3^{2a} + 8$$

이 때, $3^{2a} = \frac{1}{k}$ 이므로

$$k \cdot \frac{1}{k} = -4 \cdot \frac{1}{k} + 8$$

$k > 0$ 이므로 $1 = -\frac{4}{k} + 8$

$$\therefore\ k = \frac{4}{7}$$

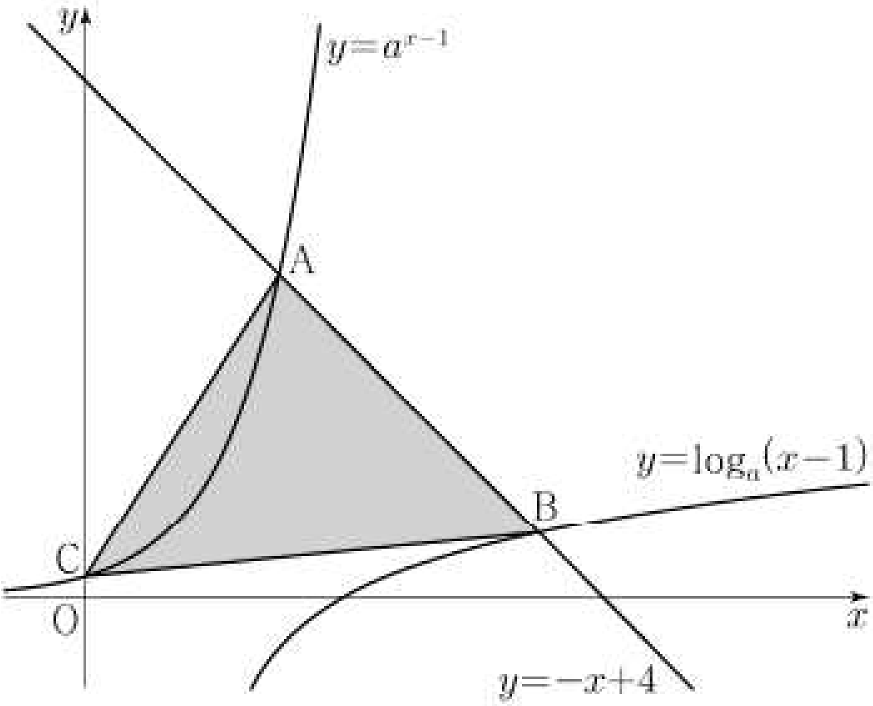
$$\therefore\ 35k = 20$$

답 20

69. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



(2022학년도 9월 21번)

69. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^{x}$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{2}$이다.

점 A의 좌표를 $(k,\ -k+4)$라 하면

$$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2=2$$

에서

$$k=\frac{3}{2}$$

즉, $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$$

$$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$$

$$a=\frac{25}{4}$$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

$$=\frac{96}{25}$$

이므로

$$50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$$

정답 192