1. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 최댓값은? [4점]

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

(2012학년도 9월 나형 18번)

1.

출제의도 : 삼차함수의 역함수가 존재할 조건을 구할 수 있는가 ?

삼차함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 필요충분조건은 이차방정식

$$f'(x)=x^2-2ax+3a=0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 것이다.

따라서 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$$

이므로 $0\le a\le 3$이다.

따라서 상수 a의 최댓값은 3이다.

<답> ①

2. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린 구간 $(-a, a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오. [4점]

(2016학년도 6월 A형 27번)

2. **출제의도** : 미분을 이용하여 감소하는 구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$에서

$f'(x)=x^2-9$

이때, $f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=3$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-15	↗

따라서 열린구간 $(-a, a)$에서 함수 $f(x)$가 감소하기 위한 양수 a의 최댓값은 3이다.

정답 3

3. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

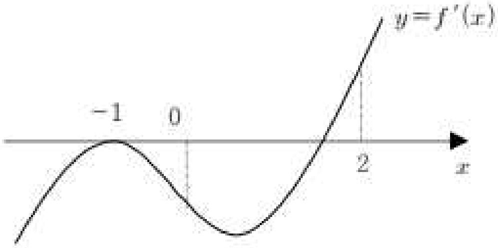
이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여, a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

(2014학년도 9월 A형 21번)

3. 출제의도 : 도함수 $f'(x)$를 이해하고 $f'(x)$를 통하여 $f(x)$의 증가와 감소를 판단할 수 있는가?

$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$이고 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty,0)$에서 감소하고 구간 $(2,\infty)$에서 증가하므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



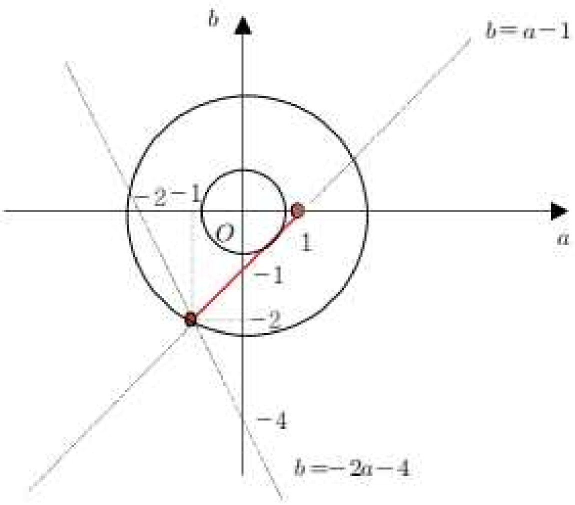
즉,

$(-1)^2-a+b=0$, $b=a-1\cdots$ ㉠

$f'(0)=b\le 0\cdots$ ㉡

$f'(2)=3(4+2a+b)\ge 0$, $b\ge -2a-4\cdots$ ㉢

따라서, ㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 실수 a,b의 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, $a^2+b^2=r^2\cdots$ ㉣라 하면 ㉣이 직선 $b=a-1$에 접할 때 r^2은 최소가 되고, ㉣이 점 $(-1,-2)$를 지날 때, r^2은 최대가 된다.

$M=(-1)^2+(-2)^2=5$

$m=(\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$

$\therefore\ M+m=\frac{11}{2}$

<답> ③

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a^2 \leq 3b$

ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2021년 10월 13번)

4. [출제의도] 미분의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을

D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-3b\leq 0$, $a^2\leq 3b$ (참)

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서

$$f(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2}$$
$$=\frac{(x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)}{2}$$
$$=x^3+bx$$

$f'(x)=3x^2+b$이므로 $f'(x)=0$에서 $3x^2+b=0$

이차방정식 $3x^2+b=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=0^2-4\times 3\times b=-12b$

ㄱ에 의해 $b\geq\frac{a^2}{3}\geq 0$이므로 $D'=-12b\leq 0$

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지므로 $3x^2+b=0$의 실근이 존재한다. 즉, $b\leq 0$

또한, ㄱ에 의해 $b\geq 0$이므로 $b=0$이고 ㄱ에 의해 $a=0$이다. $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$ (거짓)

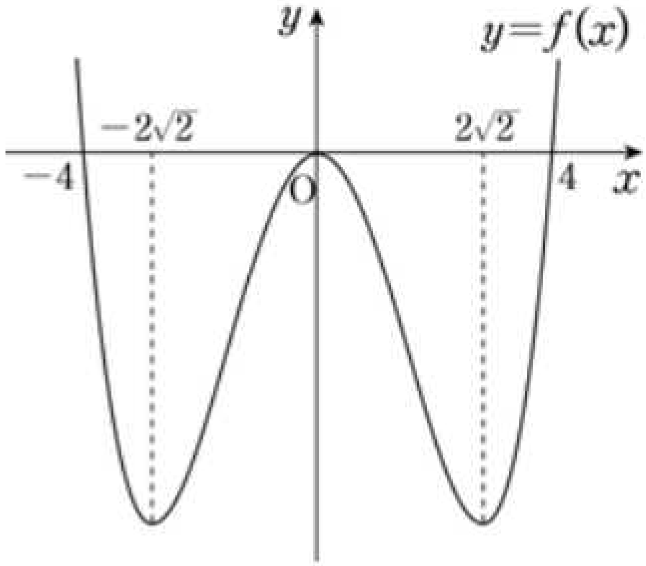
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

5. 함수 $f(x)=x^4-16x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k값의 제곱의 합을 구하시오. [4점]

(가) 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f'(x)<0$이다.
(나) $f'(k)f'(k+2)<0$

(2016학년도 10월 A형 27번)

5. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.



$f'(x)=4x(x^2-8)$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2\sqrt{2}$, 0, $2\sqrt{2}$

(가)의 조건에 의해 $f(x)$는 구간 $(k,\ k+1)$에서 감소한다.

그래프에서 감소하는 구간은 $(-\infty,\ -2\sqrt{2})$, $(0,\ 2\sqrt{2})$이고, k는 정수이므로 $k=0$, 1 또는 -4, -5, $\cdots$

(나)의 조건에 의해 $f'(k+2)>0$ 이므로

$k=1$ 또는 -4

따라서 $1^2+(-4)^2=17$

6. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) = (x^3 + 2) f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x = 1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1) - f'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

(2015학년도 수능 A형 29번)

6. **출제의도** : 곱의 미분법과 함수의 극대, 극소를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=(x^3+2)f(x)$ 에서

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$

$g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$g(1)=24$, $g'(1)=0$

$g(1)=3f(1)=24$ 에서

$f(1)=8$

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$ 에서

$3\times8+3f'(1)=0$, $f'(1)=-8$

$\therefore\ f(1)-f'(1)=8-(-8)$

$=16$

<답> 16

7. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 모든 극값의 곱이 -4일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

(2015학년도 9월 A형 17번)

7. 출제의도 : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2+a$ 에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서, 모든 극값의 곱이 -4이므로

$f(0)\times f(2)=a(a-4)=-4$

$a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$

$\therefore\ a=2$

정답 ①

8. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

(2020학년도 9월 나형 17번)

8. 출제의도 : 함수의 극대, 극소에 대한 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$

$f'(x)=0$에서

$3x^2-6ax+3(a^2-1)=0$

$3(x-a+1)(x-a-1)=0$

$x=a-1$ 또는 $x=a+1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=a-1$에서 극댓값을 가진다.

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이므로 $f(a-1)=4$이다. 즉,

$(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)=4$

$a^3-3a-2=0$

$(a-2)(a+1)^2=0$

$a=-1$ 또는 $a=2$

(ⅰ) $a=-1$일 때

$f(x)=x^3+3x^2$

이때 $f(-2)=4>0$이므로 주어진 조건을 만족한다.

(ⅱ) $a=2$일 때

$f(x)=x^3-6x^2+9x$

이때, $f(-2)=-50<0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$f(x)=x^3+3x^2$

따라서

$f(-1)=(-1)^3+3\times(-1)^2=2$

정답 ②

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

(2014학년도 6월 형 21번)

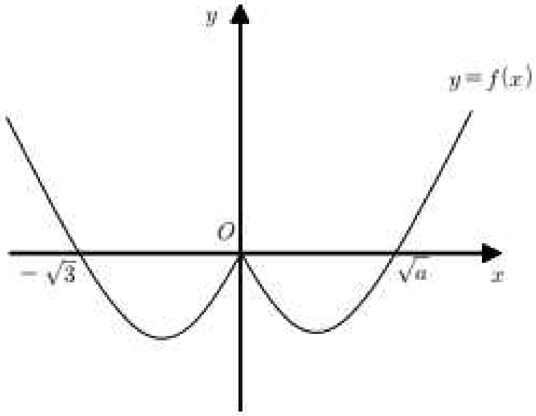
9. 출제의도 : 극댓값을 가질 조건을 이용하여 함수를 정하고 함숫값을 구할 수 있는가?

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$ 에서

(i) $a>0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} ax(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) & (x<0) \\ x(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

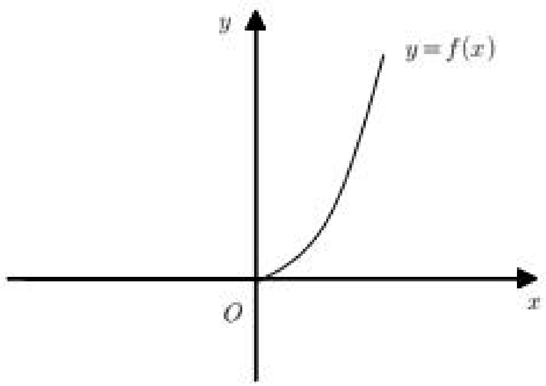


따라서, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $x=0$에서 존재하지만 극댓값은 5가 아니다.

(ii) $a=0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x^3 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

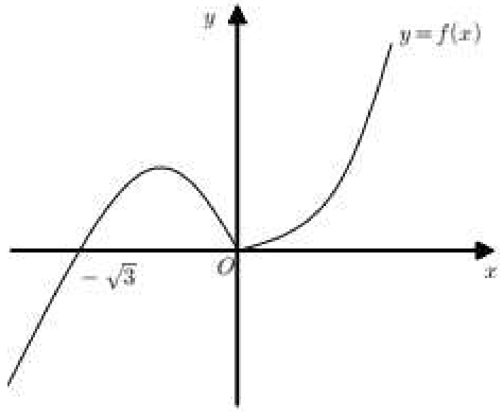


따라서, 함수 $f(x)$의 극댓값은 존재하지 않는다.

(iii) $a<0$ 인 경우

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -ax(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) & (x<0) \\ x(x^2-a) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서, $x<0$에서 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재하므로 $x<0$일 때,

$f'(x)=a(3-3x^2)=3a(1-x)(1+x)$

이고 $f'(x)=0$ 에서

$x=-1$ ($\because$ $x<0$)

즉, $x=-1$에서 극대이므로

$f(-1)=a\{3(-1)-(-1)^3\}$
$=-2a=5$

$\therefore$ $a=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ $f(2)=2^3-(-\dfrac{5}{2})\times 2=13$

<답> ⑤

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 α, β $(\alpha<\beta)$뿐이다. (나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f'(\alpha)=0$

ㄴ. $\beta=\alpha+3$

ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2019년 10월 나형 21번)

10. [출제의도] 주어진 조건을 이용하여 삼차함수의 성질을 추론한다.

조건에서 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$

ㄱ. $f'(x)=(x-\alpha)(3x-\alpha-2\beta)$

그러므로 $f'(\alpha)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

$f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)=\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}-\alpha\right)^2\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}-\beta\right)=-4$

$(\beta-\alpha)^3=3^3$에서 $\beta-\alpha=3$

그러므로 $\beta=\alpha+3$ (참)

ㄷ. $f(0)=-\alpha^2\beta=16$이고 ㄴ에서 $\beta=\alpha+3$이므로

$\alpha^3+3\alpha^2+16=(\alpha+4)(\alpha^2-\alpha+4)=0$

$\alpha=-4$이고 $\beta=-1$

그러므로 $\alpha^2+\beta^2=17$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다. (나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2017학년도 9월 나형 20번)

11. 출제의도 : 삼차함수의 그래프의 특징을 이용하여 명제의 참, 거짓을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$라고 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로

$f'(-3)=f(3)$ 에서 $b=0$이고

$x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-2)=12a+c=0$ 에서 $c=-12a$이다.

따라서,

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$\quad =3ax^2-12a \ (a>0)$

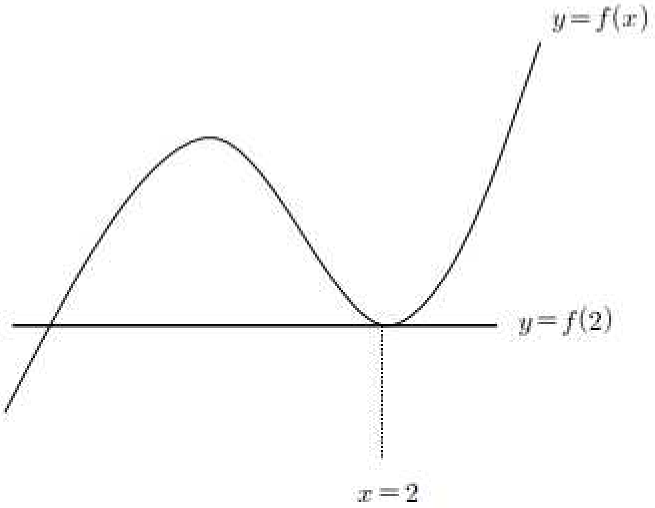
이므로 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f'(x)=3ax^2-12a$

$\quad =3a(x+2)(x-2)$

이고 조건 (가)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서, 그림과 같이 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



(참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서

$f(x)=ax^3-12ax+d(a>0)$

$f'(x)=3ax^2-12a$

이므로 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(11a+d)=-9a(x+1)$

$y=-9ax+2a+d \cdots ㉠$

㉠에 점 $(2, f(2))$ 즉, $(2, -16a+d)$를 대입하면 등식이 성립하므로 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식은 점 $(2, f(2))$를 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$
(나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 35를 갖는다.
(다) 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(0)$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

(2017년 10월 나형 20번)

12. **[출제의도] 다항함수의 미분법과 적분법을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.**

삼차항의 계수가 1이고 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 가지 경우가 있다.

(i) 함수 $y=f(x)-f(4)$의 그래프가 $x=2$에서 x축에 접하고 $x=4$에서 만나는 경우

$f(x)=(x-2)^2(x-4)+f(4)$

$f'(x)=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2=(x-2)(3x-10)$이므로

$f'\left(\dfrac{11}{3}\right)>0$이고 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $y=f(x)-f(4)$의 그래프가 $x=4$에서 x축에 접하는 경우

$f'(2)=0,\ f'(4)=0$이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-4),\ f'\left(\dfrac{11}{3}\right)<0$

$f(x)=\displaystyle\int 3(x-2)(x-4)\,dx$

$\quad =x^3-9x^2+24x+C$ (단, C는 상수이다.)

$f(2)=C+20=35$이므로 $C=15$

$f(x)=x^3-9x^2+24x+15$

따라서 $f(0)=15$

13. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=f(5)$ (나) 방정식 $f(x)-p=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되게 하는 실수 p의 최댓값은 $f(2)$이다.

$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은? [4점]

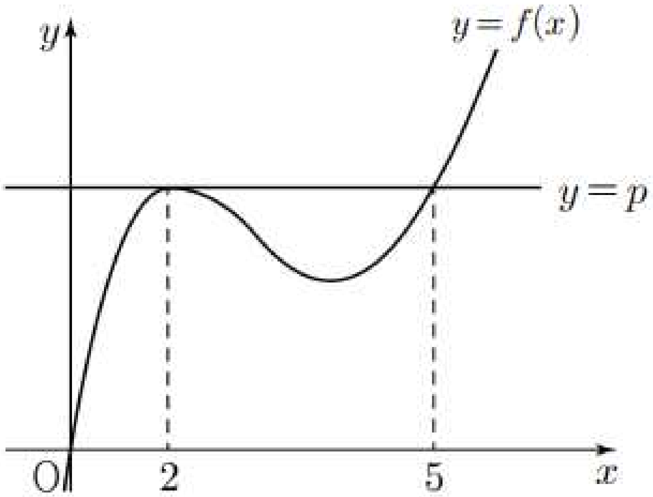
① 25 ② 28 ③ 31 ④ 34 ⑤ 37

(2018년 7월 나형 17번)

13. **[출제의도] 함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기**

조건(가)와 조건(나)를 만족시키는

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)-p=(x-2)^2(x-5)$

$f(0)=0$ 이므로 $p=20$

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+20=x^3-9x^2+24x$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^3-9x^2+24x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2\right]_0^2=28$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-3}{x} = 0$
>
> (나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 교점의 개수는 2이다.

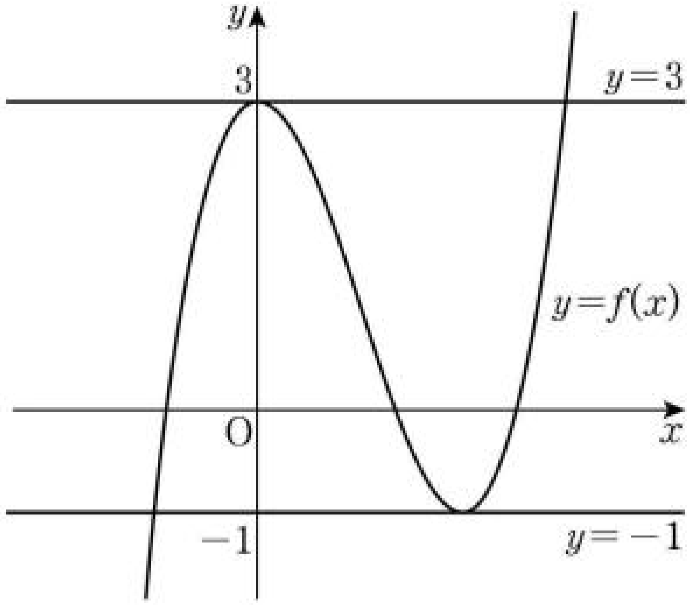
(2019년 10월 나형 27번)

14. [출제의도] 미분을 활용하여 조건을 만족시키는 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에 의해 삼차함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.

조건 (가)에 의해 $f(0)=3$, $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 3을 갖는다.

그러므로 두 직선 $y=3$, $y=-1$과 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3+a\times\left(-\frac{2a}{3}\right)^2+3=-1$에서

$a=-3$

그러므로 $f(x)=x^3-3x^2+3$

따라서 $f(4)=19$

15. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

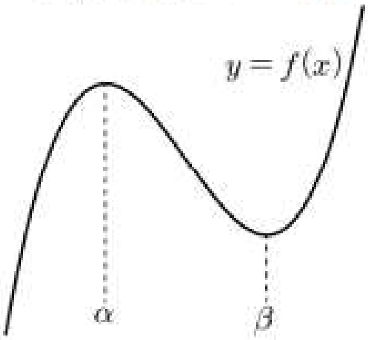
라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

(2022년 7월 13번)

15. **[출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기**

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고
$x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

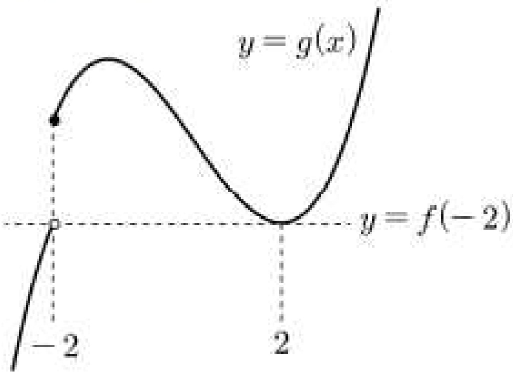


(ⅰ) $\alpha<\beta\le -2$인 경우
$x\ge -2$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.
$f(-2)<g(-2)<g(2)$
$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순

(ⅱ) $\alpha<-2<\beta$인 경우
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 열린구간 $(-\infty,\ \alpha)$에서 존재하므로 모순

(ⅲ) $\alpha=-2$인 경우
방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐이므로
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
$f'(x)=3(x+2)(x-2)$
$f(x)=x^3-12x+\frac{1}{2}$
$g(2)\ne f(-2)$이므로 모순

(ⅳ) $-2<\alpha<\beta$인 경우
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=f(-2)$이므로 $f(2)+8=f(-2)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$ (a, b는 상수)라 하자.

$8+4a+2b+\frac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$

$b=-6$, $f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=12+4a-6=0$, $a=-\frac{3}{2}$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$이므로

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극댓값은 $f(-1)=4$

16. 사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다. (나) 함수 $f(x)$는 극소값 -10을 갖는다.

(2008학년도 6월 가형 21번)

16. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$ 에서

$f(-x)=f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

$\therefore\ a=c=0$

따라서 $f(x)=x^4+bx^2+6$ 이고

$f'(x)=4x^3+2bx=2x(2x^2+b)$

이 때 $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구하면

$b>0$ 일 때 $x=0$

$b<0$ 일 때 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{\dfrac{-b}{2}}$

그런데 $b>0$ 일 때 $x=0$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 x=0에서 극소값을 갖고

$f(0)=6$ 이므로 (나)의 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $b<0$ 이고 이 때 함수 $f(x)$ 는

$x=\pm\sqrt{\dfrac{-b}{2}}$ 에서 극소값을 가지므로

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{-b}{2}}\right)=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+6=-10$$

$$\frac{b^2}{4}=16,\ \ b^2=64$$

그런데 $b<0$ 이므로 $b=-8$

따라서 $f(x)=x^4-8x^2+6$ 이므로

$f(3)=3^4-8\times3^2+6=15$

답 15

17. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다.
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

(2012년 10월 나형 29번)

17. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 극값을 구하는 문제를 해결한다.

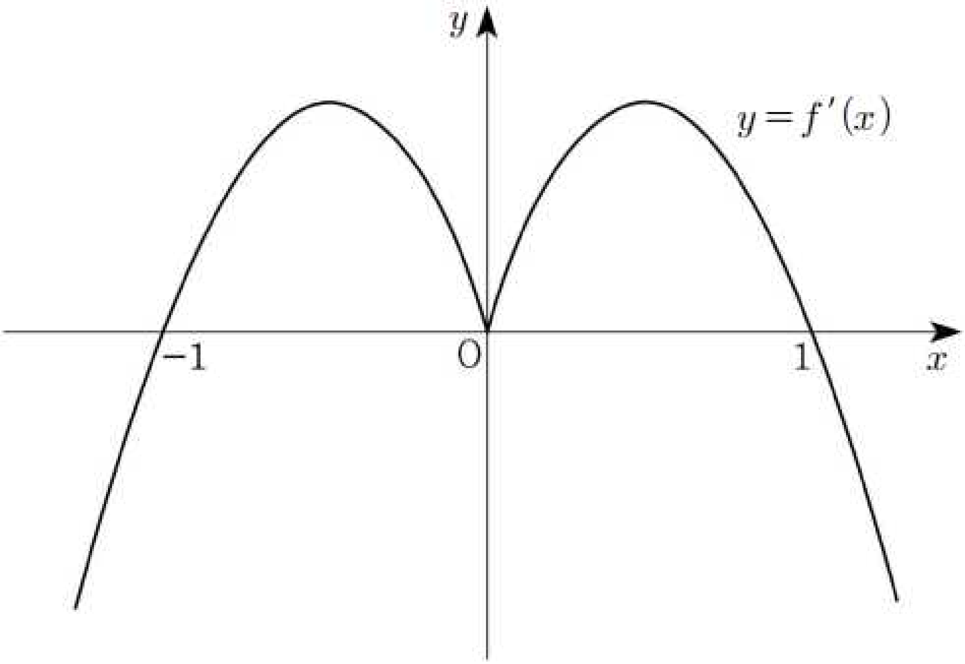
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $a=0$

따라서 $f'(x)=3x^2+b$이고, 조건 (나)에서 $f'(1)=0$이고 $f(1)=0$이므로 $b=-3$, $c=2$

따라서 $f(x)$의 극댓값 $f(-1)=4$

18. 그림과 같이 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고 $x>0$일 때 위로 볼록하다.



함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

ㄴ. $f(0)=0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 0이다.

ㄷ. $f(1)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

(2012년 10월 가형 19번)

18. [출제의도] 주어진 조건에 맞는 함수의 성질을 추론한다.

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

ㄱ. $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. $f(0)=0$이면 도함수 $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$는 원점 대칭이다. 따라서 극댓값 $f(1)$, 극솟값 $f(-1)$에 대하여 $f(1)=-f(-1)$이므로 $f(1)+f(-1)=0$이다. (참)

ㄷ. 극댓값 $f(1)$이 0보다 작으므로 방정식 $f(x)=0$은 $x<-1$인 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

19. 원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(2+x)=f(2-x)$
(나) $x=1$에서 극소값을 갖는다.

이 때, $f(x)$의 극대값을 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

(2007년 7월 가형 22번)

19. [출제의도] 미분을 이용하여 함수의 성질 이해하기

원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$에 대해

$f(2+x)=f(2-x)$이므로 $x=2$에 대하여 대칭이고, $x=1$에서 극소이므로 $x=3$에서 극소이고, $x=2$에서 극대이다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3+3ax^2+2bx+c \\ &= 4(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= 4x^3-24x^2+44x-24 \end{aligned}$$

따라서 $a=-8,\ b=22,\ c=-24$

$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x$

$x=2$에서 극대이고

극대값 $a=f(2)=-8$

$\therefore\ a^2=64$

20. -1과 1을 제외한 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $\lim_{x\to1-0} f(x)=f(1)=-1$이고 $\lim_{x\to1+0} f(x)=1$이다.
(다) $x\neq1$인 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 한 점에서 만난다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만난다.
ㄷ. $f'(\alpha)=-1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

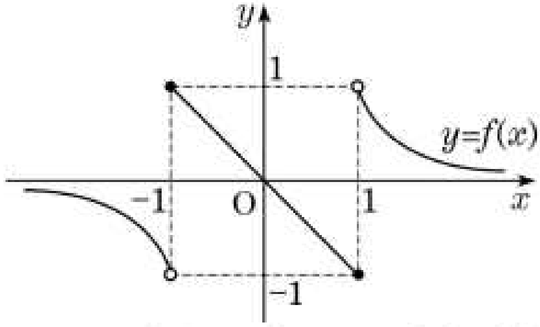
(2014년 3월 B형 21번)

20. **[출제의도] 미분법을 이해하여 조건에 맞는 함수의 그래프를 추측한다.**

주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 원점을 지난다.
또, 함수 $f(x)$는 $x \neq -1$, $x \neq 1$인 모든 x에서 연속이고, 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$에서 각각 감소한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 원점에서만 만난다.

ㄴ. (반례) 함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (|x| \leq 1) \\ \dfrac{1}{x} & (|x| > 1) \end{cases}$은 주어진 조건을 만족시키지만 x축과 원점에서만 만난다.



ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$f'(c_1)=\frac{-1-0}{1-0}=-1$$

을 만족시키는 실수 c_1이 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
마찬가지로 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 0]$에서 연속이고, 열린 구간 $(-1, 0)$에서 미분가능하므로

$$f'(c_2)=\frac{1-0}{-1-0}=-1$$

을 만족시키는 실수 c_2가 열린 구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.
그러므로 $f'(\alpha)=-1$을 만족시키는 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)< f(2)$인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)=f(2-x)$를 만족시킨다. 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

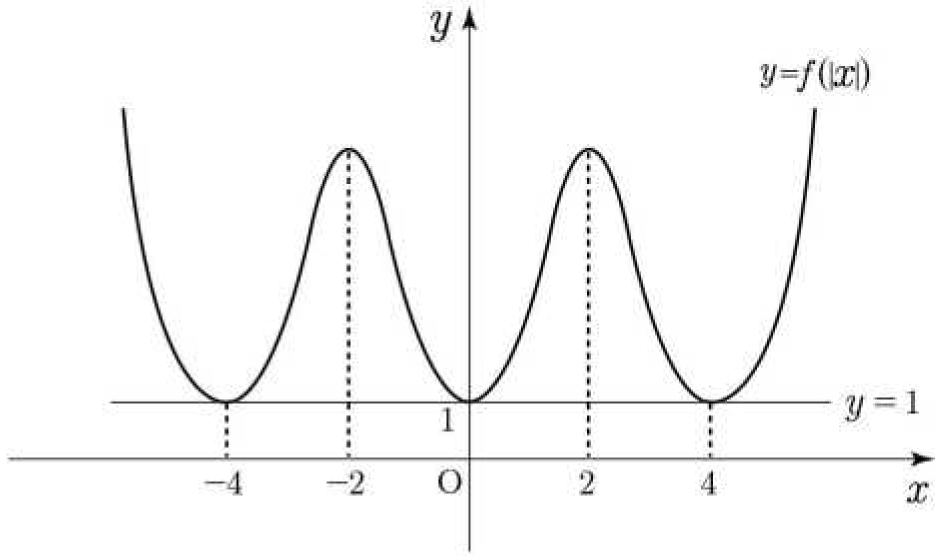
① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

(2014년 7월 A형 21번)

21. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 수학내적 문제해결하기

사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대해 대칭이므로 $f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^2+b$

$f(0)<f(2)$이고 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $f(x)$가 $x=0$, 4에서 극솟값 1을 갖고 $x=2$에서 극댓값을 가져야 한다.



$f(0)=f(4)=1$에서 $16+4a+b=1$

$f'(x)=4(x-2)^3+2a(x-2)$에서

$f'(0)=f'(4)=0$이므로 $-32-4a=0$

$a=-8$, $b=17$이므로

$f(x)=(x-2)^4-8(x-2)^2+17$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값 $f(2)=17$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $\|f(x)\|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

(2021년 3월 14번)

22. [출제의도] 미분의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $f(0)=0$ 이고 $g(0)=0$ 이므로

$g(x)=f(x)+|f'(x)|$ 에서 $f'(0)=0$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=(x^2+ax+b)+x(2x+a)$ 에서 $f'(0)=b=0$

그러므로 $f(x)=x^2(x+a)$, $f'(x)=x(3x+2a)$

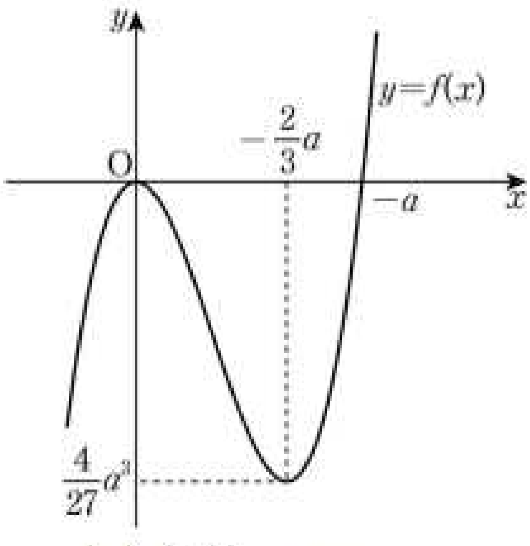
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

조건 (나)에서 $-a>0$ 이므로 $-\frac{2}{3}a>0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$\frac{4}{27}a^3$	↗

이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\frac{2}{3}a\right)\right|=4$ 이므로

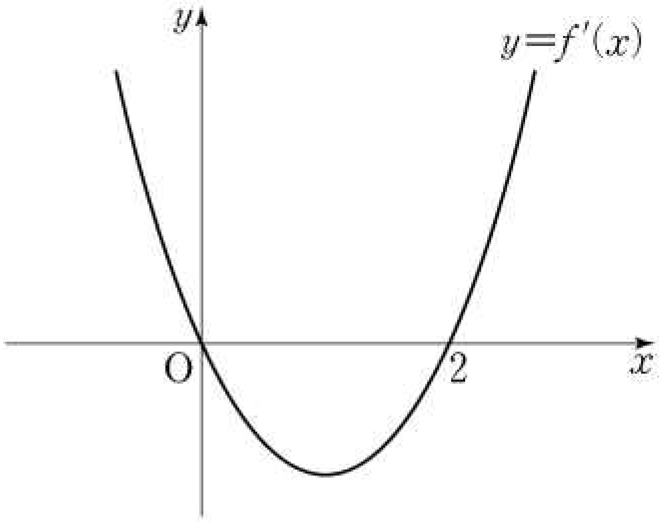
$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{27}a^3=-4$ 이고 $a^3=-27$ 에서 $a=-3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$ 이고

$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$

따라서 $g(3)=9$

23. 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

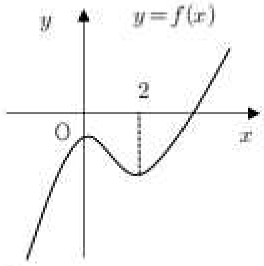
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2017학년도 6월 나형 21번)

23.

ㄱ. $f(0)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때,

$f(2)<f(0)<0$

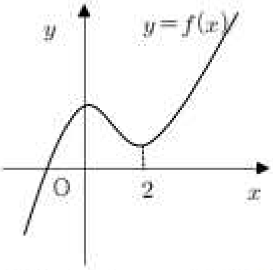
이므로

$|f(2)|>|f(0)|$ <참>

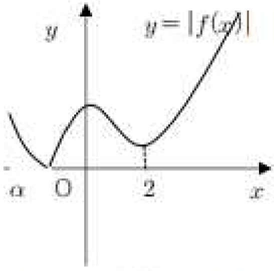
ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$일 때, $f(0)>f(2)$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형을 각 경우에 따라 그리면 다음과 같다.

(ⅰ) $f(0)>f(2)>0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



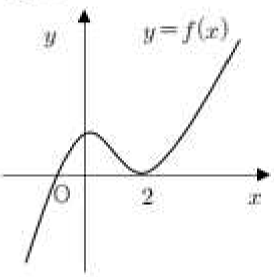
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



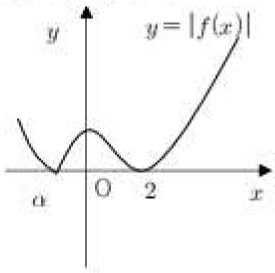
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 개수는 2이다.

(ⅱ) $f(0)>f(2)$이고 $f(2)=0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



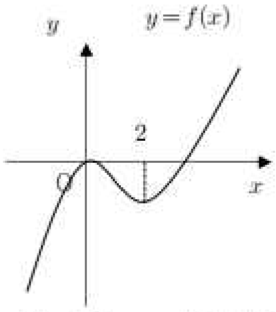
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



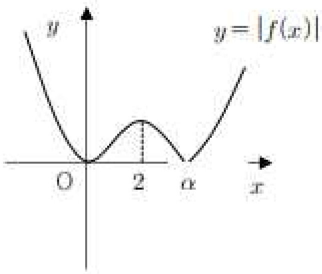
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha\neq 2)$라 하면 a의 값은 α와 2로 개수는 2이다.

(ⅲ) $f(0)=0$이고 $f(2)<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



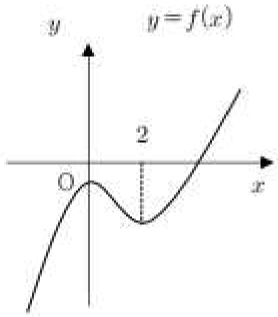
이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



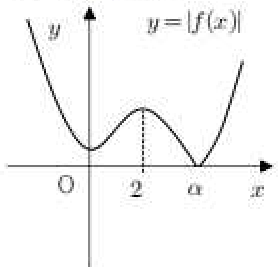
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ $(\alpha\neq 0)$라 하면 a의 값은 0과 α로 개수는 2이다.

(ⅳ) $f(2)<f(0)<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



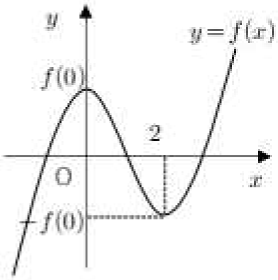
그러므로 $|f(\alpha)|=0$ 라 하면 a의 값은 0과 α로 개수는 2이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다. <참>

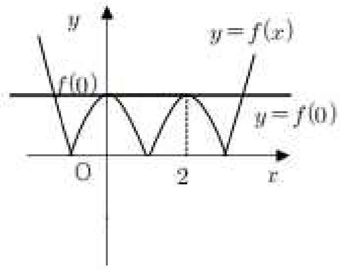
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이므로

$f(2)=-f(0)$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



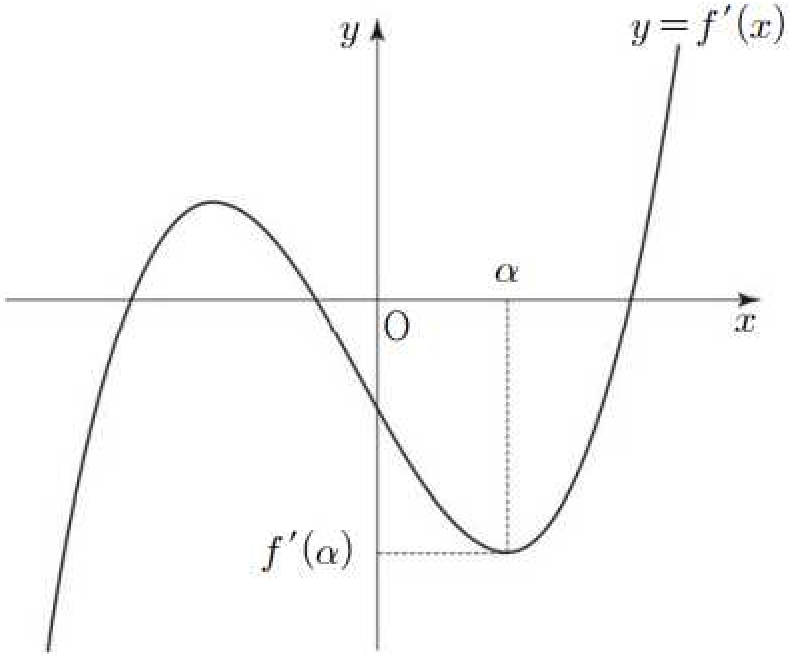
이때, 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$과의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(0)$의 서로 다른 교점의 개수는 4이므로 서로 다른 실근의 개수도 4이다. <참>

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

24. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



양수 α에 대하여 $f'(\alpha)> -2$이고 $f(0)=0$이다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)+2x$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 함수 $f'(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $h'(\alpha)>0$
ㄴ. 함수 $y=h(x)$는 열린 구간 $(0, \alpha)$에서 감소한다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄴ, ㄷ

(2015년 11월 가형 20번)

24. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

ㄱ. $h'(x)=f'(x)+2$

$h'(\alpha)=f'(\alpha)+2>0 \quad \therefore$ (참)

ㄴ. 구간 $(0, \alpha)$에서 $-2<f'(x)<0$

$0<h'(x)<2$이므로 함수 $h(x)$는 증가한다.

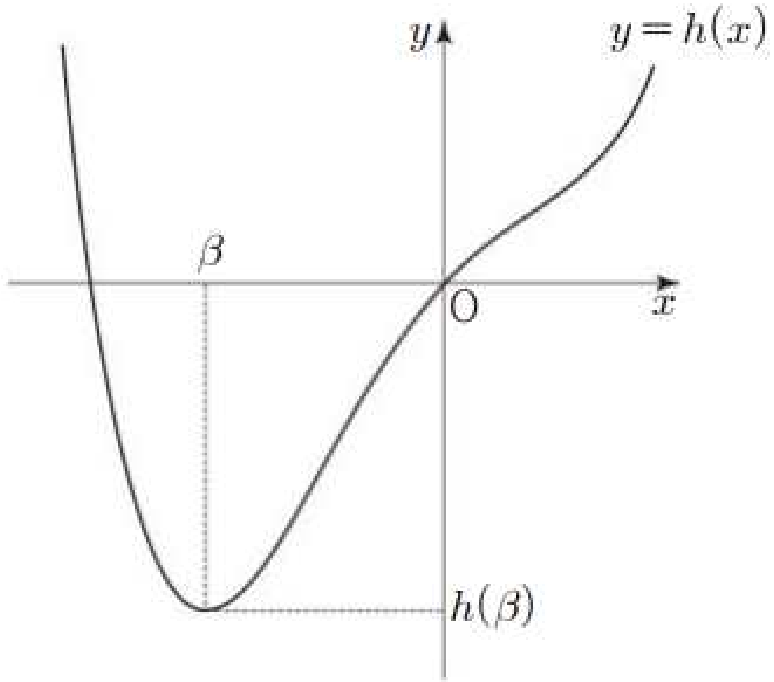
$\therefore$ (거짓)

ㄷ. $h(0)=f(0)+2\times 0=0$

$h'(x)=f'(x)+2=0$을 만족시키는 x의 값을 β라 하자. 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	0	↗

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

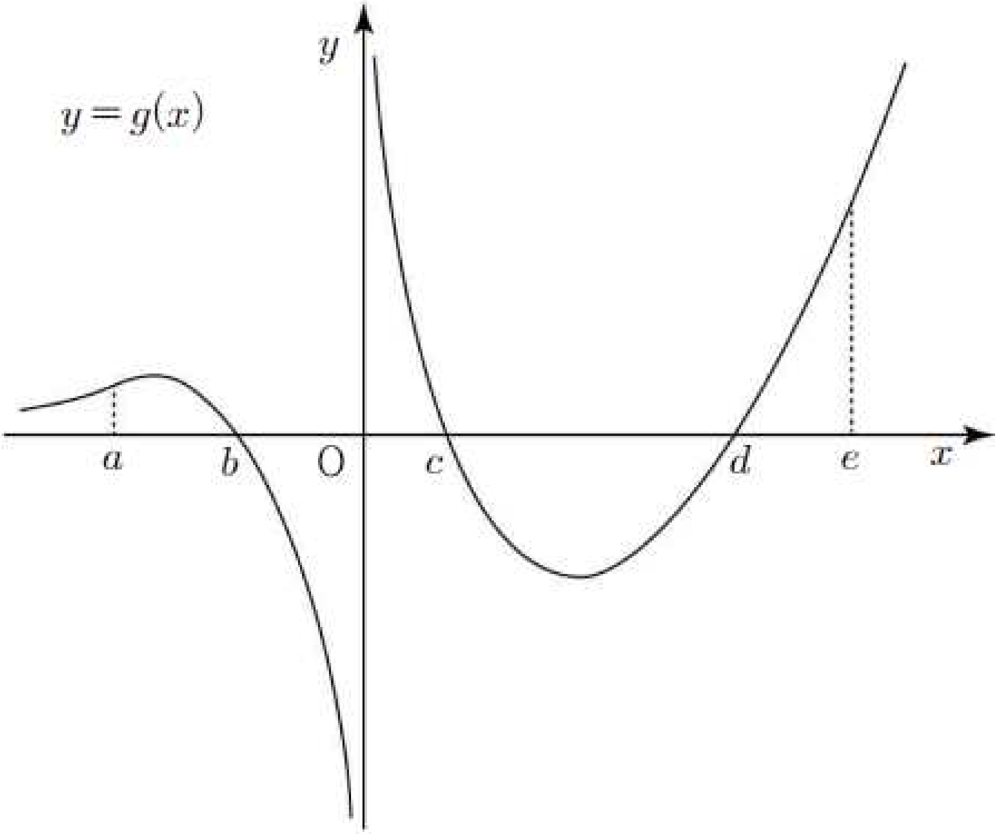


방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\therefore$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

25. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 도함수 $f'(x)$가 연속이다. x축과의 교점의 x좌표가 b, c, d뿐인 함수 $g(x)=\dfrac{f'(x)}{x}$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(b,\ 0)$에서 증가한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ e]$에서 4개의 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2013년 7월 B형 18번)

25. [출제의도] 도함수를 이용하여 그래프의 개형 추론하기

$f(x)$에 대한 증감표를 작성하면

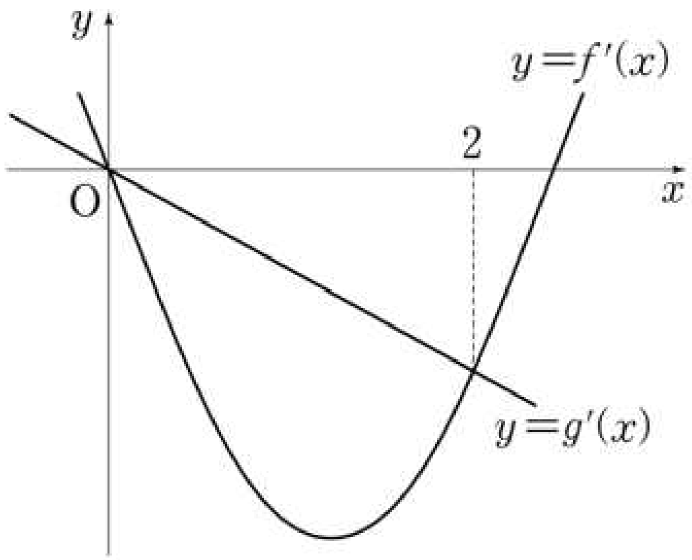
x	$-$	b	$-$	0	$+$	c	$+$	d	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f(x)$는 열린 구간 $(b, 0)$에서 증가한다.(참)

ㄴ. $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.(참)

ㄷ. $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, e]$에서 $x=b,\ c,\ d$에서 극값을 가지므로 3개의 극값을 갖는다. (거짓)

26. 삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $0<x<2$ 에서 $h(x)$는 감소한다.

ㄴ. $h(x)$는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2012학년도 6월 나형 19번)

26. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프를 추론할 수 있는가?

ㄱ. $0 < x < 2$일 때 $f'(x) < g'(x)$이므로

$h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$이다.

따라서 $0 < x < 2$에서 $h(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. $x > 2$일 때 $f'(x) > g'(x)$이므로

$h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$이다.

따라서 $x > 2$에서 $h(x)$는 증가한다.

따라서 $x=2$에서 감소상태에서 증가상태로 바뀌므로 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $x < 0$일 때 $f'(x) > g'(x)$이므로

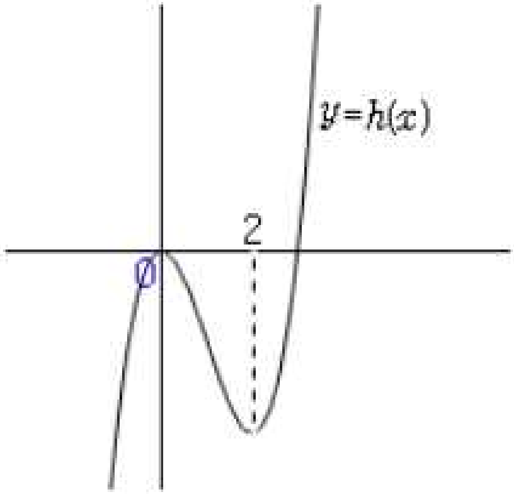
$h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$이다.

따라서 $x < 0$에서 $h(x)$는 증가한다.

따라서 $x=0$에서 증가상태에서 감소상태로 바뀌므로 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

이때, $h(0) = f(0) - g(0) = 0$이므로

함수 $y = h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



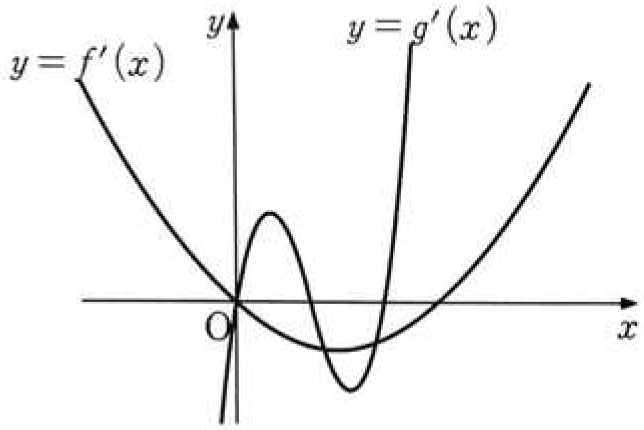
따라서 방정식 $h(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<답> ③

27.

그림은 삼차함수 $y=f(x)$와 사차함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프이다. 옳은 것을 [보기]에서 모두 고르면? (단, $f'(0)=0$, $g'(0)=0$) [4점]



ㄱ. $x<0$에서 $y=f(x)-g(x)$는 증가한다.
ㄴ. $y=f(x)-g(x)$는 한 개의 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $h(x)=f'(x)-g'(x)$라 할 때, $h'(x)=0$은 서로 다른 2개의 양의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2008년 5월 가형 12번)

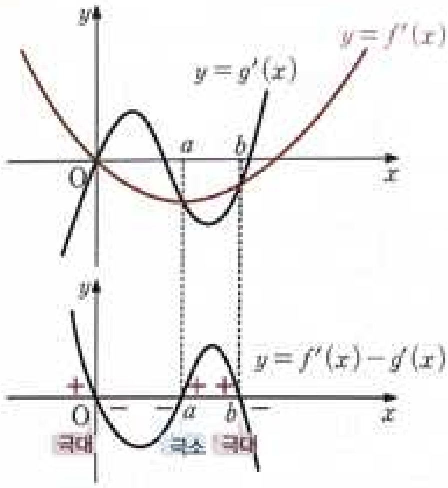
27. 두 다항함수의 도함수 활용 정답 ⑤

STEP Ⓐ $y=f(x)-g(x)$의 증감표를 작성하여 [보기]의 참, 거짓 판단하기

ㄱ. $x<0$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로 $y'=f'(x)-g'(x)>0$
즉 $y=f(x)-g(x)$는 증가한다. [참]

ㄴ. $f'(x)=g'(x)$의 세 근을 0, a, $b\,(0<a<b)$라 하고
$f'(x)-g'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=b$
함수 $y=f(x)-g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

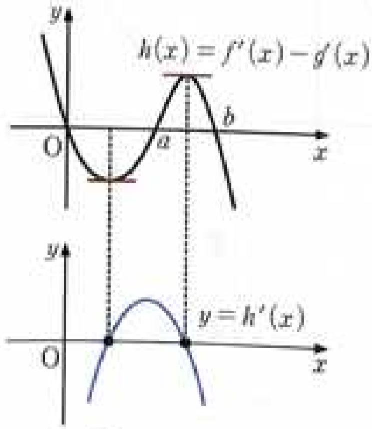
x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)-g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)-g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘



즉 $y=f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 극솟값이 존재한다. [참]

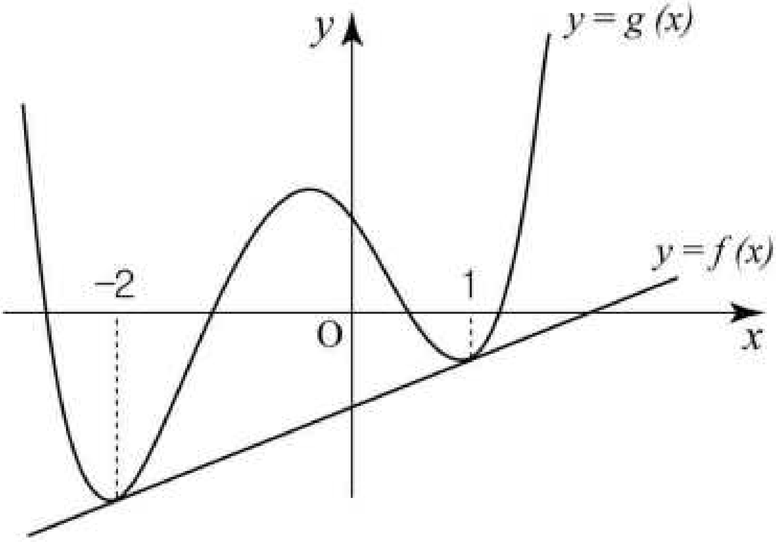
STEP Ⓑ $h(x)$의 그래프의 개형을 이용하여 2개의 양의 실근을 가짐을 보이기

ㄷ. $f'(x)=g'(x)$의 세 근을 0, a, $b\,(0<a<b)$라 하고
$f'(x)-g'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=b$이므로
$h(x)=f'(x)-g'(x)=kx(x-a)(x-b)$ (단, $k<0$)
$y=h(x)$, $y=h'(x)$의 개형은 다음 그림과 같으므로
$h'(x)=0$은 서로 다른 2개의 양의 실근을 갖는다. [참]



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

28. 그림과 같이 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x좌표가 -2, 1인 두 점에서 접한다. 함수 $h(x)=g(x)-f(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$의 극댓값은? [4점]



① $\dfrac{81}{16}$ ② $\dfrac{83}{16}$ ③ $\dfrac{85}{16}$ ④ $\dfrac{87}{16}$ ⑤ $\dfrac{89}{16}$

(2011년 7월 나형 20번)

28. [출제의도] 함수의 극대 · 극소 이해하기

$h(x) = g(x) - f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$

$h'(x) = 2(x+2)(x-1)(2x+1)$

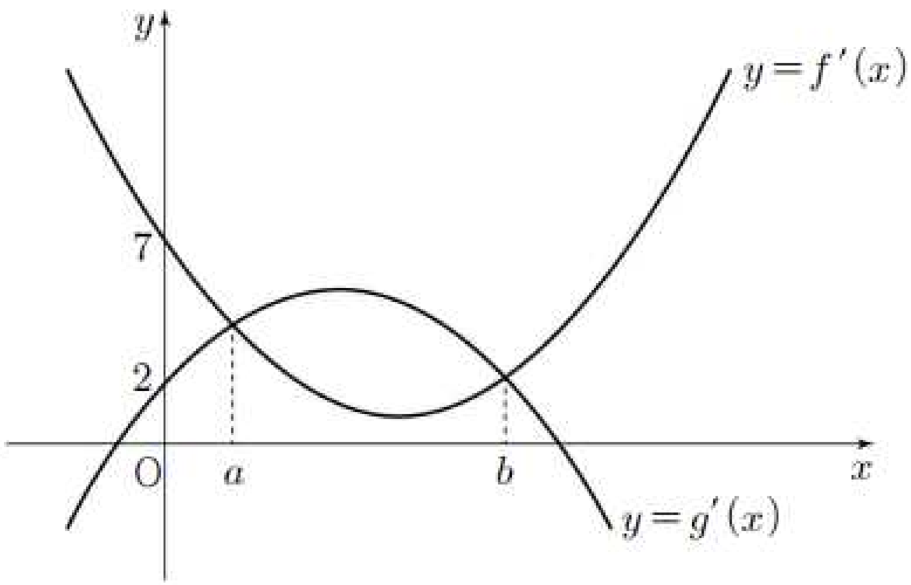
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{16}$

29. 그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, $b\,(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$) [4점]



<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

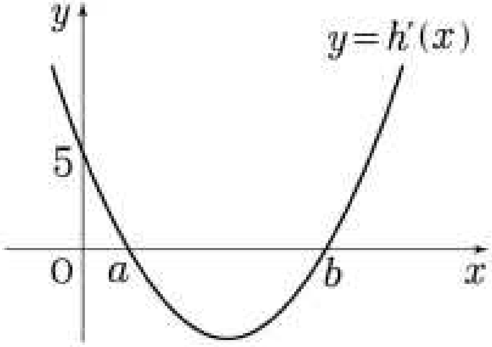
ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2016년 7월 나형 18번)

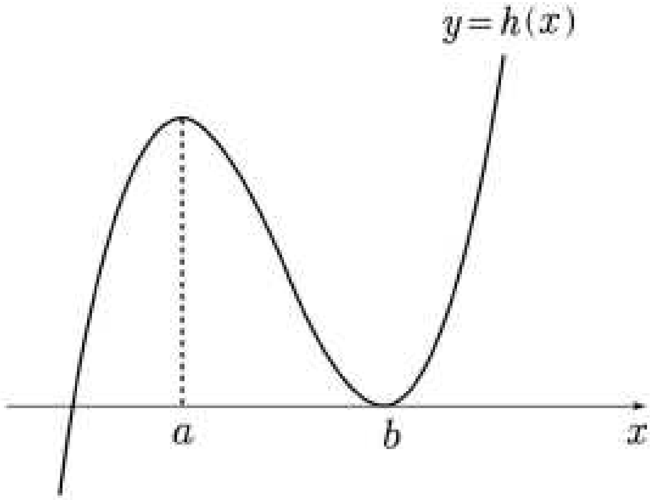
29. **[출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기**

함수 $y=h'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가

열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.

열린 구간 $(0,\ b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$ 이므로

$$\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$$

$h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$의 최댓값이 12일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

(2021년 4월 12번)

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$
$$=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	$\nearrow$	$a+4$	$\searrow$	a

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(1)=a+4$이므로 $a+4=12$에서 $a=8$

31. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오. [4점]

(2017학년도 6월 나형 28번)

31. **출제의도** : 주어진 구간에서 삼차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$

$\quad =(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\dfrac{a}{3}$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극대이고 $x=\dfrac{a}{3}$에서 극소이므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{a}{3}$에서 극솟값 $f\left(\dfrac{a}{3}\right)$을 갖는다.

$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\left(\dfrac{a}{3}\right)^3+a\times\left(\dfrac{a}{3}\right)^2-a^2\times\left(\dfrac{a}{3}\right)+2$

$\quad =-\dfrac{5}{27}a^3+2$

$-\dfrac{5}{27}a^3+2=\dfrac{14}{27}$에서 $a^3=8$, $a=2$

$f(x)=x^3+2x^2-4x+2$이므로

$f(2)=2^3+2\times2^2-4\times2+2=10$

$f(-2)=(-2)^3+2\times(-2)^2-4\times(-2)+2$

$\quad =10$

이므로 $M=10$

따라서 $a+M=2+10=12$

정답 12

32. 두 함수

$$f(x)=x^2+2x+k, \quad g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g \circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{11}{8}$　⑤ $\frac{3}{2}$

(2022년 3월 10번)

32. **[출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 실수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.**

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$

이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\geq k-1$ 이다.

함수 $g(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면 $t\geq k-1$이므로 함수 $g(t)$는 구간 $[k-1,\ \infty)$에서 정의된 함수이다.

한편 $g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

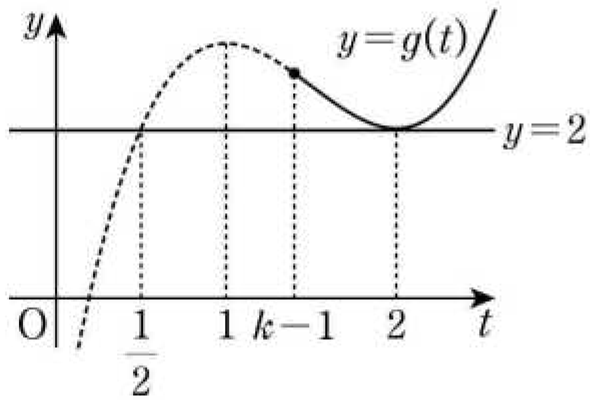
이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

$g(t)=2$에서

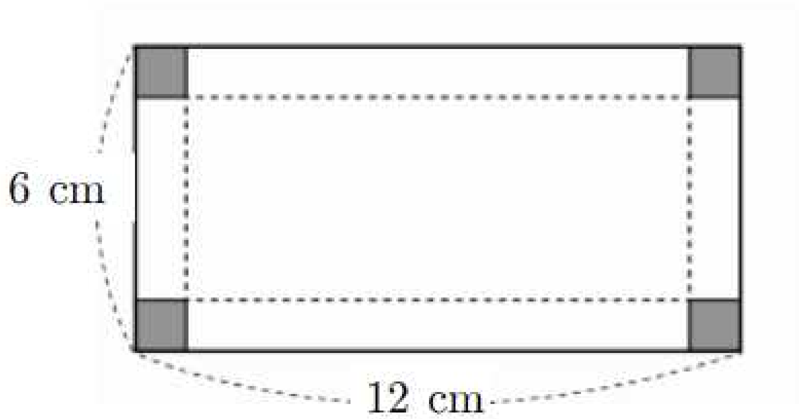
$2t^3-9t^2+12t-2=2,\ (2t-1)(t-2)^2=0$

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 그림과 같다.

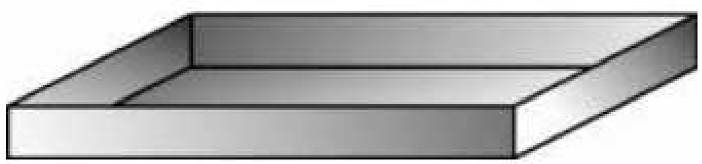


따라서 $\frac{1}{2}\leq k-1\leq 2$, 즉 $\frac{3}{2}\leq k\leq 3$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

33. [그림 1]과 같이 가로의 길이가 12 cm, 세로의 길이가 6 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형 모양의 종이를 잘라 낸 후 남는 부분을 접어서 [그림 2]와 같이 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값을 M cm^{3}이라 할 때, $\frac{\sqrt{3}}{3}M$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 무시한다.) [4점]



[그림 1]



[그림 2]

(2011년 4월 가형 28번)

33. [출제의도] 도함수를 활용하여 실생활문제 해결하기

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하고

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(6-2x)(12-2x)$ (단, $0<x<3$)

$V'(x)=12(x^2-6x+6)=0$이므로

$x=3-\sqrt{3}$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $M=24\sqrt{3}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}M=24$

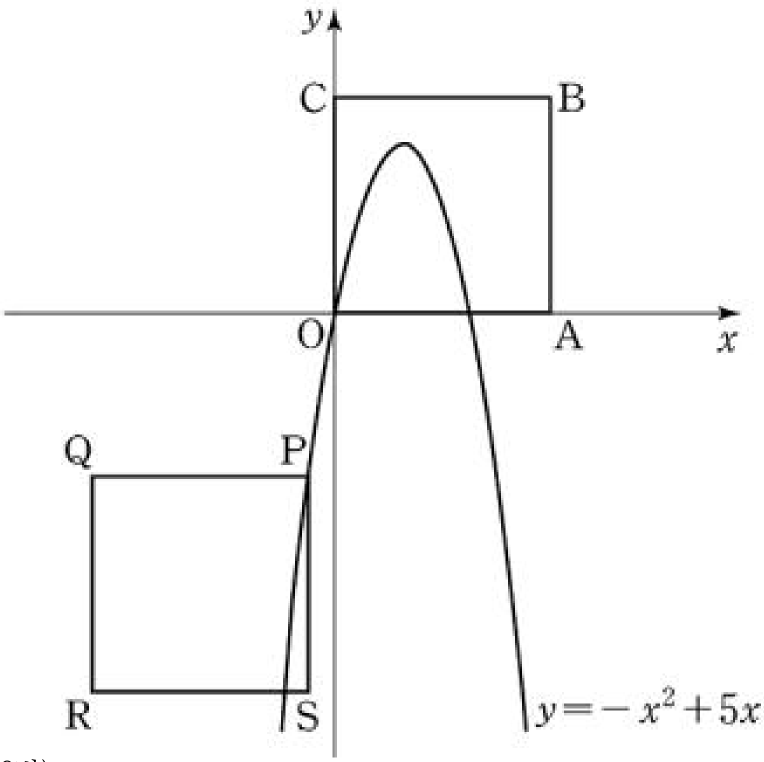
34. 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(8,\ 0),\ \mathrm{B}(8,\ 8),\ \mathrm{C}(0,\ 8)$$

을 꼭지점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다.
점 P가 점 $(-1,\ -6)$에서 출발하여 포물선

$$y=-x^2+5x$$

를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다.
평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최대값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(2008학년도 6월 가형 22번)

34. 점 P의 좌표를 $(x, -x^2+5x)$라 하면

두 정사각형 OABC, PQRS가 겹칠 때,

$0 \le x \le 5$이다.

두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=x(-x^2+5x)=-x^3+5x^2$$

이다.

$$S'(x)=-3x^2+10x=-3x\left(x-\frac{10}{3}\right)$$ 이므로

$S'(x)=0$에서 $x=0, \frac{10}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	5
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$		↗		↘	

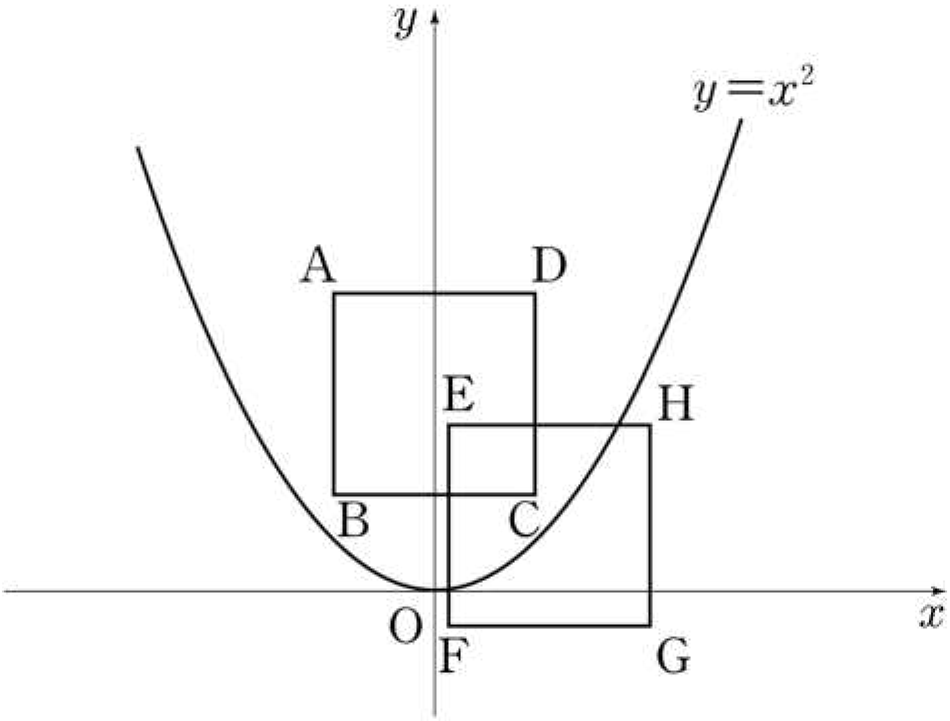
증감표에서 $S(x)$는 $x=\frac{10}{3}$일 때, 최대값을 갖고 최대값은

$$S\left(\frac{10}{3}\right)=-\frac{1000}{27}+5\cdot\frac{100}{9}=\frac{500}{27}$$

$\therefore\ p+q=27+500=527$

답 527

35. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 평행하다.) [4점]



① $\dfrac{4}{27}$　② $\dfrac{1}{6}$　③ $\dfrac{5}{27}$　④ $\dfrac{11}{54}$　⑤ $\dfrac{2}{9}$

(2012학년도 6월 나형 21번)

35. 출제의도 : 미분을 이용하여 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점의 좌표를 (x, x^2)이라 하자.

곡선 $y=x^2$과 정사각형 ABCD는 y축에 대하여 각각 대칭이므로 $0<x<1$인 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

이때, 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left\{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}\times\left\{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$$
$$=(1-x)x^2=x^2-x^3$$

이다.

$\therefore\ S'(x)=-3x^2+2x=x(-3x+2)$

이때, $S'(x)=0$에서

$$x=\frac{2}{3}\ (\because\ 0<x<1)$$

따라서 함수 $S(x)$는 $x=\frac{2}{3}$에서 극대이자 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{2}{3}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$$

<답> ①

36. 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.

ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2018학년도 9월 나형 20번)

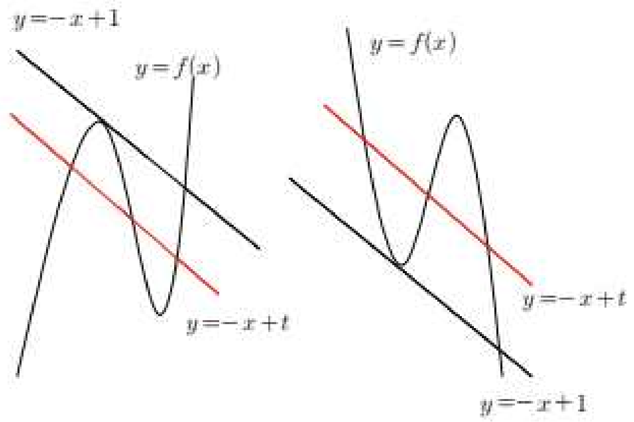
36. **출제의도** : 삼차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 곡선 $f(x)=x^3$과 직선 $y=-x+t$는 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$이다.

따라서, 함수 $g(t)$는 상수함수이다. (참)

ㄴ. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 교점의 개수가 2개인 경우는 다음 그림과 같은 경우이다.



따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+t$가 세 점에서 만나도록 하는 실수 t가 존재한다. (참)

ㄷ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$(a>0,\ b,\ c,\ d$는 상수)라 하자.

함수 $g(t)$가 상수함수이면 방정식

$ax^3+bx^2+cx+d=-x+t$

의 실근이 1개가 존재해야 한다.

즉, 방정식 $ax^3+bx^2+(c+1)x+d=t$에서 함수 $y=ax^3+bx^2+(c+1)x+d$의 그래프와 직선 $y=t$가 단 한 점에서 만나야 한다.

즉, 함수 $y=ax^3+bx^2+(c+1)x+d$가 극값이 존재하지 않아야 하므로

$y'=3ax^2+2bx+c+1$

에서 방정식 $3ax^2+2bx+c+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=b^2-3a(c+1)=b^2-3ac-3a\leq 0$$

이다.

한편, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서

방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=b^2-3ac$$

그런데, $a=2,\ b=3,\ c=1$이면

$$\frac{D_1}{4}=3^2-3\times2\times1-3\times2=-3\leq 0$$

을 만족시키지만

$$\frac{D_2}{4}=b^2-3ac=3^2-3\times2\times1=3>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

정답 ③

37. 삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(2015년 3월 B형 28번)

37. **[출제의도] 함수의 대칭성을 이용하여 미분가능성 문제를 해결한다.**

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선 $x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-0}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-0}\left[\frac{\{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1\}}{x-k}-\frac{(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}\right]$$

$$=\lim_{x\to k-0}\left[(k-x)\times\frac{\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}\right]$$

$$=-3k^2+2k+9$$

또, $\displaystyle\lim_{x\to k+0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$

$$=\lim_{x\to k+0}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+0}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+0}\frac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$$

$$=3k^2-2k-9$$

$$\lim_{x\to k-0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+0}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$

이므로

$$-3k^2+2k+9=3k^2-2k-9$$

$$3k^2-2k-9=0$$

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\dfrac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

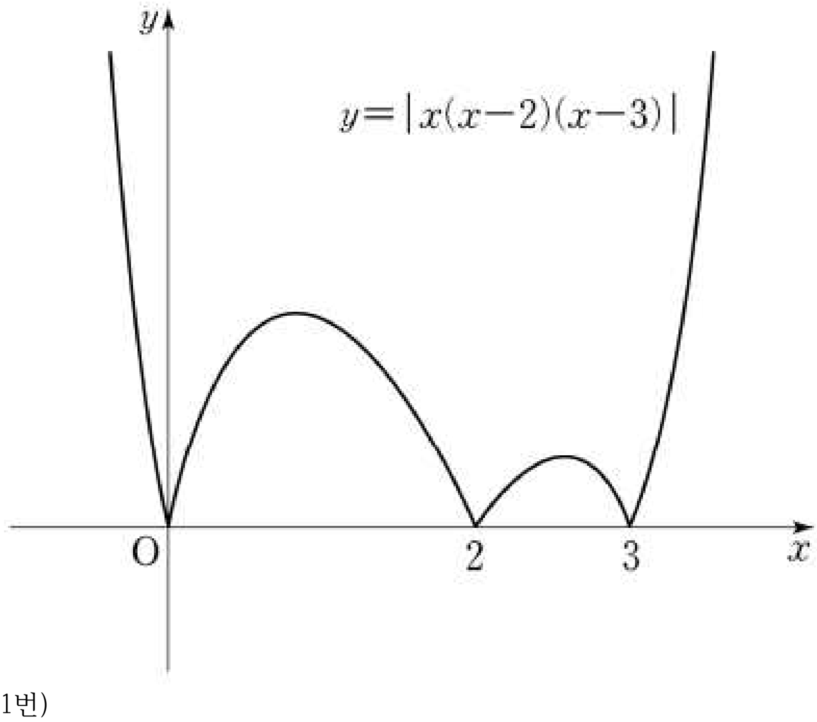
[참고]

함수 $y=f(2k-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

38. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



(2017학년도 9월 나형 21번)

38. 출제의도 : 함수의 그래프, 방정식, 미분가능성 등을 활용하여 함수를 추론하고 이와 관련된 함숫값의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여

$f(x)=ax^2(x-2)(x-3)$ $(a<0)$

또는

$f(x)=bx(x-2)^2(x-3)$ $(b<0)$

또는

$f(x)=cx(x-2)(x-3)^2$ $(c<0)$

이다.

(i) $f(x)=ax^2(x-2)(x-3)$ $(a<0)$일 때,

조건 (나)를 만족시키는 a의 값이 존재한다고 하면

$f(1)=2a<0$

이다.

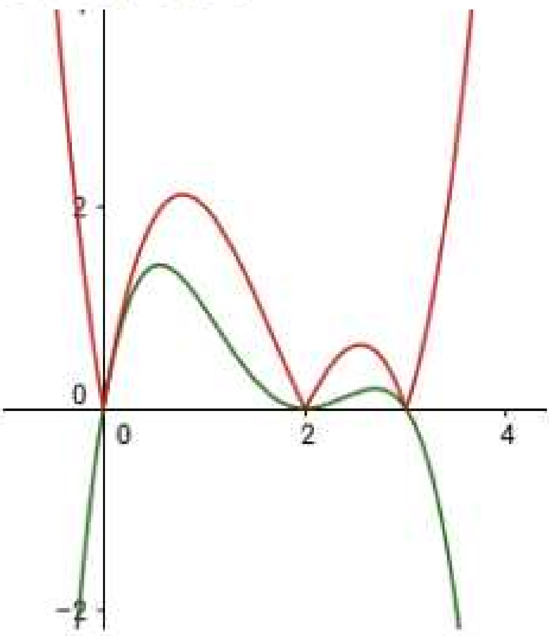
(ii) $f(x)=bx(x-2)^2(x-3)$ $(b<0)$일 때,

$h(x)=|x(x-2)(x-3)|$라 하면 $h(x)$는 $h(2)=0$ 이고 $x=2$에서 $h(x)$가 미분이 불가능하므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g(x)=f(x)$

이어야 한다.

즉, $f(x)=bx(x-2)^2(x-3)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



이때, $i(x)=x(x-2)(x-3)$이라 하면

$i'(0)=6$, $f'(0)=-12b$ 이므로

$0<-12b\le 6$

에서 $-\frac{1}{2}\le b<0$ 이고 $f(1)=-2b$ 이므로

$0<-2b\le 1$

즉, $f(1)$의 최댓값은 1이다.

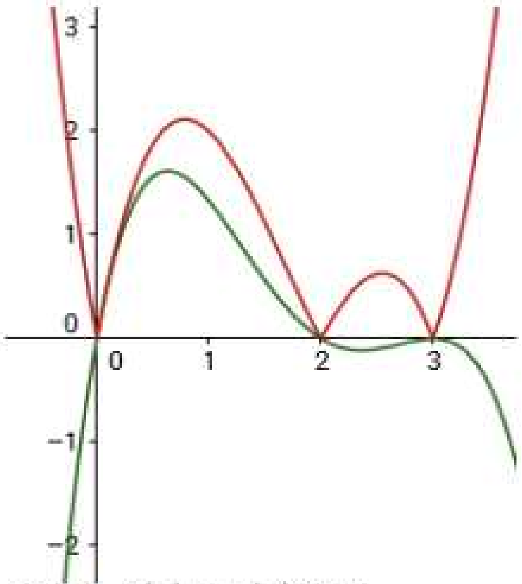
(iii) $f(x)=cx(x-2)(x-3)^2$ $(c<0)$일 때

$0<x<2$ 에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=h(x)$의 그래프가 교점을 가지면 함수 $g(x)$가 그 점에서 미분이 불가능하게 된다.

즉, $0<x<2$에서 $f(x)\ge h(x)$ 또는 $f(x)\le h(x)$ 이다.

그런데, $f(x)\ge h(x)$ 이면 $g(x)$는 $x=0$에서 미분이 불가능하게 된다.

즉, $f(x)=cx(x-2)(x-3)^2$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서, $f(x)\le h(x)$일 때,

$f'(0)=-18c$, $i'(0)=6$ 이므로

$0<-18c\le 6$

에서 $-\frac{1}{3}\le c<0$ 이고 $f(1)=-4c$ 이므로

$0<-4c\le\frac{4}{3}$

즉, $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

다.

정답 ②

39.

함수 $f(x)=x^3-2x$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ f(x+p)+q & (x\geq -1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 0이 아닌 상수이다.) [4점]

39. 실수 전체에서 미분가능

오답률 75 정답 4

STEP A 함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능 하도록 하는 조건 구하기

$f(x)=x^3-2x$에서 $f'(x)=3x^2-2=3\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$에서 극대, $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$에서 극소이고

$x=-1$에서 $f(-1)=-1+2=1$, $x=1$에서 $f(1)=1-2=-1$

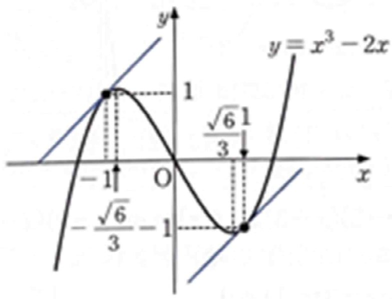
또한, $x=-1$에서 좌미분계수가 $f'(-1)=1$이므로

$f'(x)=1$에서 $3x^2-2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

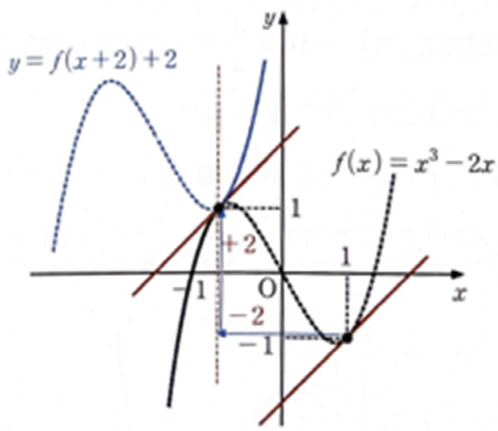
즉 $x=1$에서도 미분계수는 $f'(1)=1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



STEP B 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건을 이용하여 p, q의 값 구하기

$x\geq-1$에서 $y=f(x+p)+q$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축으로 $-p$만큼, y축으로 q만큼 평행이동한 그래프이다.



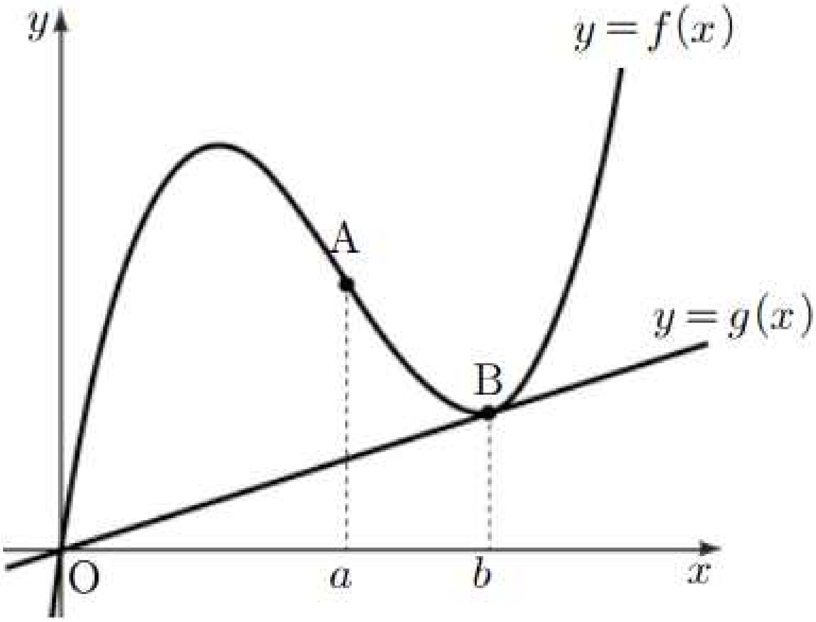
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

곡선 $y=f(x)$ 위에 있는 점 $(1,\ -1)$이 점 $(-1,\ 1)$의 위치에 오도록 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 $y=f(x)(x\geq1)$의 그래프가 평행이동하면 된다.

즉 $x\geq-1$일 때, $g(x)=f(x+2)+2$

따라서 $p=2$, $q=2$이므로 $p+q=4$

40. 그림과 같이 좌표평면에서 최고차항의 계수가 양수이고 원점을 지나는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점을 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$라 하고 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a<b$) [4점]



〈보 기〉

ㄱ. 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 a이다.

ㄴ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

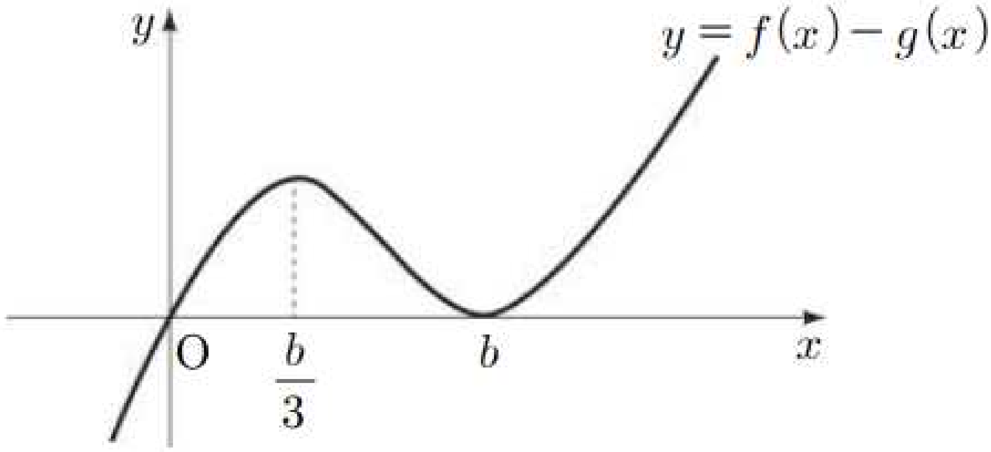
ㄷ. $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2011년 4월 가형 19번)

40. **[출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기**

ㄱ. $f(x)=px^3+qx^2+rx\ (p>0)$라 하고
$g(x)=mx\,(m\neq 0)$라 하자.
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의
x좌표는 $-\dfrac{q}{3p}$이므로 곡선 $y=f(x)-g(x)$의
변곡점의 x좌표는 a이다. (참)
ㄴ. 그림과 같이 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는
원점을 지나고 $x=b$에서 x축에 접하므로
$f(x)-g(x)=px(x-b)^2$이다.



$\{f(x)-g(x)\}'=p(x-b)(3x-b)$이므로
함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다. (참)
ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)=px(x-b)^2$
이라 하면 ㄱ 에서 $h''(a)=0$이다.
$\therefore\ a=\dfrac{2b}{3}$이므로 $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{1}{2}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

41. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(2020학년도수능 나형 30번)

41. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 삼차함수의 그래프를 추론하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(0)=0$이므로

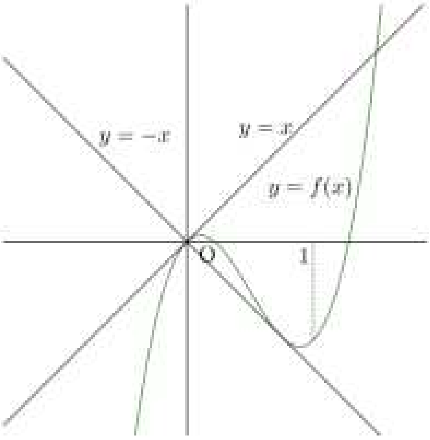
$d=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 $f'(1)=1$이므로

$3a+2b+c=1$ ⋯ ㉠

조건 (가)와 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$는 두 직선 $y=x$, $y=-x$와 각각 두 점에서 만나야 한다.

이때 $f(0)=0$, $f'(1)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같이 직선 $y=x$와 원점에서 접하고, 직선 $y=-x$와 점 $(\alpha, f(\alpha))$ $(\alpha>0)$에서 접해야 한다.



즉, $f'(0)=1$이므로

$c=1$

이때 ㉠에서 $3a+2b=0$이므로

$b=-\frac{3}{2}a$

따라서 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2+x$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 접점의 x좌표가 α이므로 $f(\alpha)=-\alpha$에서

$a\alpha^3-\frac{3}{2}a\alpha^2+\alpha=-\alpha$

이때 $\alpha>0$이므로

$2a\alpha^2-3a\alpha+4=0$ ⋯ ㉡

$f'(\alpha)=-1$이므로

$3a\alpha^2-3a\alpha+1=-1$

$3a\alpha^2-3a\alpha+2=0$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서

$\alpha=\frac{3}{4}$, $a=\frac{32}{9}$

따라서

$f(x)=\frac{32}{9}x^3-\frac{16}{3}x^2+x$

이므로

$f(3)=32\times3-16\times3+3=51$

정답 51

42. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고 $g(1)=g'(1)$이다. (나) $g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$g(2)$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

(2015년 7월 A형 21번)

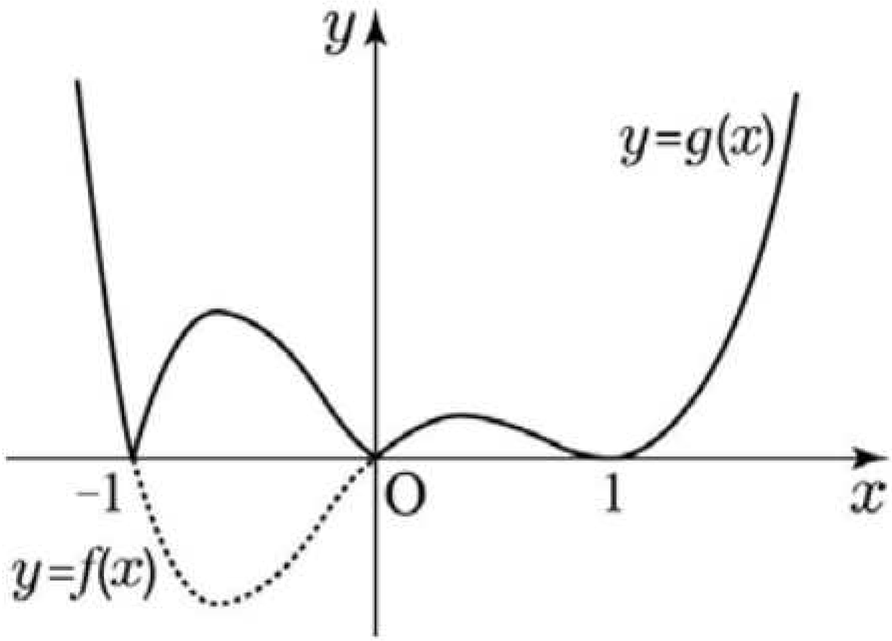
42. **[출제의도] 미분을 활용하여 문제해결하기**

$g(1)=g'(1)$이고 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$g(1)=g'(1)=0$ … ㉠

㉠에 의하여 $f(1)=f'(1)=0$

$g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 가지므로



$f(x)=(x-1)^2x(x+1)$

$g(x)=|(x-1)^2x(x+1)|$

따라서 $g(2)=6$

43. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3보다 작은 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

(2021년 10월 10번)

43. **[출제의도] 함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.**

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

그러므로 $-|f(a)|=|f(a)|$에서 $f(a)=0$

$f(x)=(x-a)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.

그러므로 $g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$

$h(x)=(x-a)^2(x-3)$이라 하면

$a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-6-a)=0$

함수 $h(x)$는 $x=\frac{6+a}{3}$에서 극솟값 -32를 갖는다.

$$h\left(\frac{6+a}{3}\right)=\left(\frac{6+a}{3}-a\right)^2\left(\frac{6+a}{3}-3\right)=-4\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=-32$$

$\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=8$이므로 $1-\frac{a}{3}=2$에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$에서 $f(4)=7$

44. $a>0$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$가 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

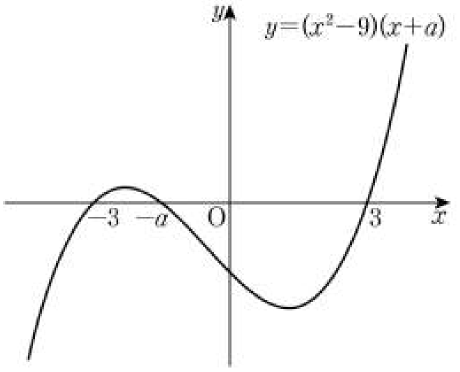
① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

(2020년3월 나형 18번)

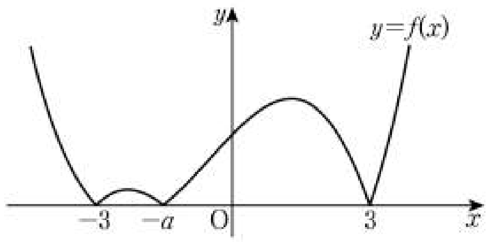
44. **[출제의도] 조건을 만족시키는 함수의 그래프를 추론하여 극댓값을 구한다.**

(i) $0<a<3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-3, 0)$, $(-a, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



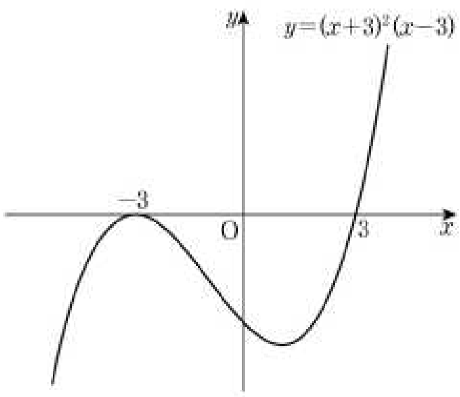
그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



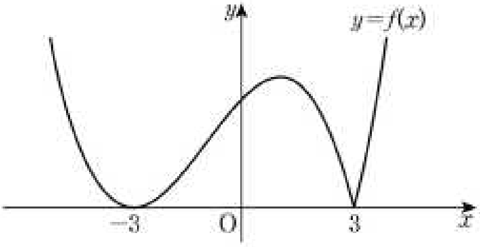
함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는 x축과 점 $(-3, 0)$에서 접하고 점 $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



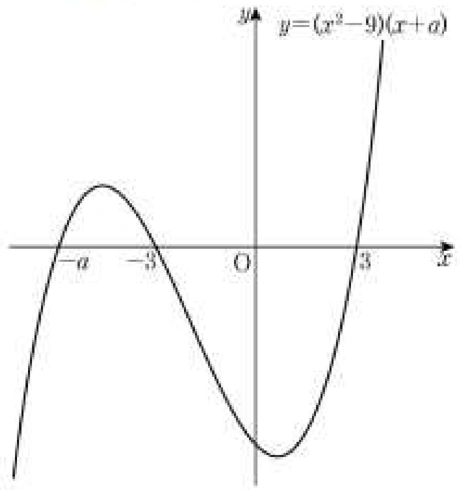
그러므로 $f(x)=|(x+3)^2(x-3)|$의 그래프 개형은 그림과 같다.



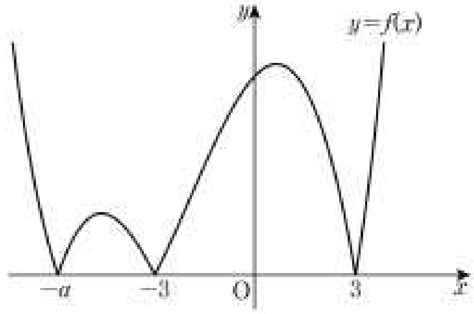
$f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a>3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-a, 0)$, $(-3, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=-3$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의해 $a=3$

함수 $y=(x^2-9)(x+3)$의 극솟값의 절댓값이 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$의 극댓값이다.

$y=(x^2-9)(x+3)$의 도함수는

$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$이므로

$y'=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=(x^2-9)(x+3)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-32	↗

그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$은 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -32

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=|-32|=32$

45. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은?

[4점]

(가) 함수 $\lvert f(x) \rvert$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌 구간 $[3, 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$ ④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

(2016학년도 수능 A형 21번)

45. **출제의도** : 조건에 맞는 삼차함수를 찾아 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여

$f(-1)=0$

또한, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌 구간 $[3,5]$에서 x축과 접하게 된다.

따라서,

$f(x)=k(x+1)(x-\alpha)^2$ $(k\neq 0,\ 3\leq\alpha\leq 5)$

라고 하면

$f'(x)=k(x-\alpha)^2+2k(x+1)(x-\alpha)$

이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{k\alpha^2-2k\alpha}{k\alpha^2}$$

$$=1-\frac{2}{\alpha}$$

그런데, $3\leq\alpha\leq 5$ 이므로

$\alpha=3$일 때 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$

$\alpha=5$일 때 최댓값 $M=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ Mm=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$

정답 ⑤

46. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x(x-2)(x-a)$ (단, a는 실수)

(나) 방정식 $|f(x)|=f(0)$은 실근을 갖지 않는다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $a=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $0<a<2$이고 $f(a)>0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

ㄷ. 함수 $|f(x)-f(2)|$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않으면 $k<0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

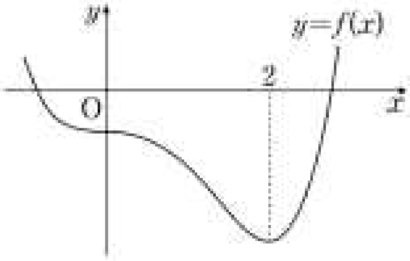
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2018년 10월 나형 20번)

46. **[출제의도] 도함수와 함수의 조건을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 추론한다.**

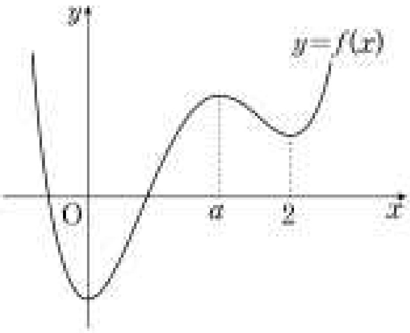
조건 (나)에서 $|f(x)|\geq 0$ 이므로 방정식 $|f(x)|=f(0)$ 이 실근을 갖지 않으려면 $f(0)<0$ 이어야 한다.

ㄱ. $a=0$ 이면 조건 (가)에서 $f'(x)=x^2(x-2)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



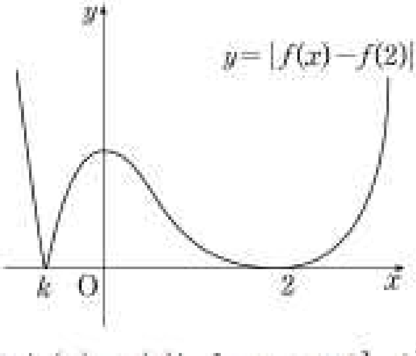
따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. (반례) $0<a<2$ 이고 $f(a)>0$ 일 때, $f(2)>0$ 이면 그림과 같이 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)



ㄷ. 함수 $|f(x)-f(2)|$ 가 $x=k$ 에서만 미분가능하지 않으려면 $f(x)-f(2)=\frac{1}{4}(x-k)(x-2)^3$ 이어야 한다.

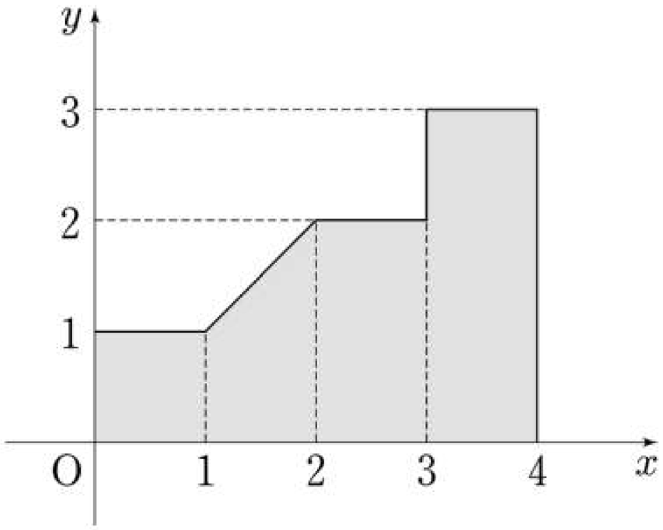
또, $f'(0)=0$ 이므로 함수 $y=|f(x)-f(2)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 함수 $|f(x)-f(2)|$ 는 $k<0$ 인 실수 k 에 대하여 $x=k$ 에서만 미분가능하지 않다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

47. 좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ 0)$, $(t,\ t)$, $(0,\ t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자.



열린 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(t)$가 미분가능하지 <u>않은</u> 모든 t의 값의 합은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

(2014학년도 5월 B형 21번)

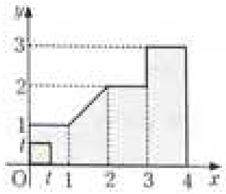
47. 거리를 이용한 함수의 미분가능 오답률 65 정답 ③

STEP Ⓐ 함수 $f(t)$를 t의 값의 범위에 따라 식으로 나타내기

$0<t<4$에서 t의 범위에 따라 주어진 도형과 한 변의 길이가 t인 정사각형이 겹치는 부분의 넓이 $f(t)$를 구하면

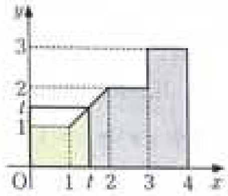
(i) $0<t<1$일 때,

$f(t)=t^2$



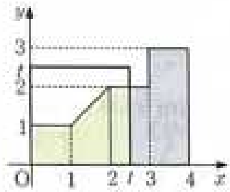
(ii) $1\le t<2$일 때,

$$f(t)=1+\frac{1}{2}(t+1)(t-1)$$
$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$$



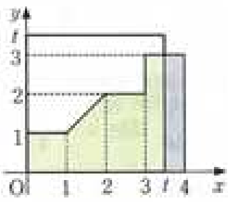
(iii) $2\le t<3$일 때,

$$f(t)=1+\frac{1}{2}(1+2)\times1+(t-2)\times2$$
$$=2t-\frac{3}{2}$$



(iv) $3\le t<4$일 때,

$$f(t)=1+\frac{1}{2}(1+2)\times1+2\times1+(t-3)\times3$$
$$=3t-\frac{9}{2}$$



(i)~(iv)에서

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t<1) \\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2} & (1\le t<2) \\ 2t-\frac{3}{2} & (2\le t<3) \\ 3t-\frac{9}{2} & (3\le t<4) \end{cases}$$

이므로 열린구간 $(0,4)$에서 함수 $f(t)$는 연속이다.

STEP Ⓑ $f(t)$가 미분가능하지 않은 모든 t의 값의 합 구하기

열린구간 $(0,4)$에서 $t\ne1$, $t\ne2$, $t\ne3$인 경우에 함수 $f(t)$는 미분가능하다.

$$f'(t)=\begin{cases} 2t & (0<t<1) \\ t & (1<t<2) \\ 2 & (2<t<3) \\ 3 & (3<t<4) \end{cases}$$

← 함수 $f(t)$는 각 구간에서 다항함수이므로 미분가능하고 각 구간의 경계값에서만 미분가능을 확인한다.

$t=1$, $t=2$, $t=3$에서 함수 $f(t)$가 미분가능한지 알아보자.

(i) $t=1$일 때,

$\lim_{x\to1-}f'(x)=2$, $\lim_{x\to1+}f'(x)=1$이므로

$t=1$에서 함수 $f(t)$는 미분가능하지 않다.

(ii) $t=2$일 때,

$\lim_{x\to2-}f'(x)=2$, $\lim_{x\to2+}f'(x)=2$이므로

$t=2$에서 함수 $f(t)$는 미분가능하다.

(iii) $t=3$일 때,

$\lim_{x\to3-}f'(x)=2$, $\lim_{x\to3+}f'(x)=3$이므로

$t=3$에서 함수 $f(t)$는 미분가능하지 않다.

따라서 $t=1$, $t=3$에서 함수 $f(t)$는 미분가능하지 않으므로 구하는 t의 값의 합은 $1+3=4$

48. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

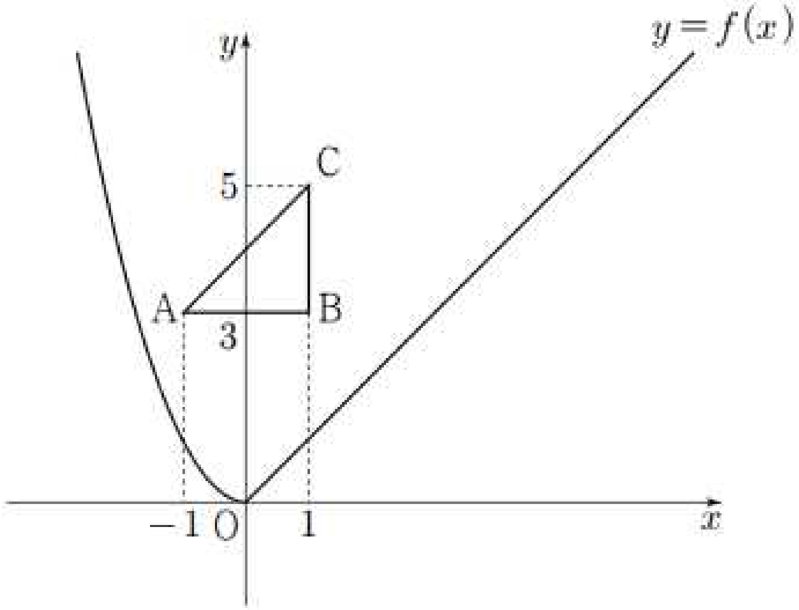
이고, 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$, $\mathrm{C}(1,\ 5)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$와 삼각형 ABC의 세 변 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최댓값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(0)=26$

ㄴ. 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 10이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합은 2이다.

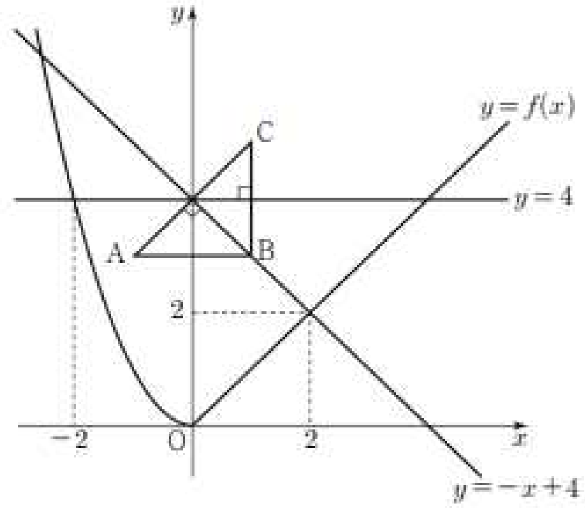


① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2018년 11월 가형 20번)

48. [출제의도] 함수의 미분가능성 추론하기



그림과 같이 선분 BC의 수직이등분선 $y=4$는 함수 $y=f(x)$ $(x<0)$의 그래프와 점 $(-2,\ 4)$에서 만나고, 선분 AC의 수직이등분선 $y=-x+4$는 함수 $y=f(x)$ $(x\geq 0)$의 그래프와 점 $(2,\ 2)$에서 만난다.

점 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$에 대하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값이 최대가 되도록 하는 점 Q는

$x<-2$일 때 점 $\mathrm{B}(1,\ 3)$,

$-2\leq x<2$일 때 점 $\mathrm{C}(1,\ 5)$,

$x\geq 2$일 때 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$이다.

(i) $x<-2$일 때

점 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+(x^2-3)^2=x^4-5x^2-2x+10$

(ii) $-2\leq x<0$일 때

점 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+(x^2-5)^2=x^4-9x^2-2x+26$

(iii) $0\leq x<2$일 때

점 $\mathrm{P}(x,\ x)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+(x-5)^2=2x^2-12x+26$

(iv) $x\geq 2$일 때

점 $\mathrm{P}(x,\ x)$에 대하여 $g(x)=\overline{\mathrm{PA}}^2$이므로

$g(x)=(x+1)^2+(x-3)^2=2x^2-4x+10$

(i)~(iv)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} x^4-5x^2-2x+10 & (x<-2) \\ x^4-9x^2-2x+26 & (-2\leq x<0) \\ 2x^2-12x+26 & (0\leq x<2) \\ 2x^2-4x+10 & (x\geq 2) \end{cases}$$

ㄱ. $g(0)=26$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(2x^2-12x+26)=10$,

$g(2)=\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(2x^2-4x+10)=10$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$0\leq x\leq 2$에서 함수 $y=2(x-3)^2+8$은 $x=2$일 때 최솟값 10을 갖고,

$2\leq x\leq 3$에서 함수 $y=2(x-1)^2+8$은 $x=2$일 때 최솟값 10을 가지므로

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 10이다. (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to -2-}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

$=\lim\limits_{x\to -2-}\dfrac{x^4-5x^2-2x+10-10}{x+2}=-14$

$\lim\limits_{x\to -2+}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

$=\lim\limits_{x\to -2+}\dfrac{x^4-9x^2-2x+26-10}{x+2}=2$이므로

함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다.

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x^4-9x^2-2x+26-26}{x}=-2$

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2x^2-12x+26-26}{x}=-12$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{2x^2-12x+26-10}{x-2}=-4$

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{2x^2-4x+10-10}{x-2}=4$이므로

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합은 $-2+0+2=0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ