1. 좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(2,\ -1)$에 대하여

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=10$$

을 만족시키는 두 실수 m, n을 각각 x좌표, y좌표로 하는 점 $\mathrm{P}(m,\ n)$이 나타내는 도형을 C라 하자. 도형 C 위를 움직이는 두 점 Q, R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$의 값이 최소일 때, 두 점 Q와 R 사이의 거리는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

(2017년 8월 가형 15번)

1. [출제의도] 벡터의 연산과 내적 문제해결하기

$m\vec{a}+n\vec{b}=(2m+2n,\ 4m-n)$ 이고

$|m\vec{a}+n\vec{b}|=10$ 이므로

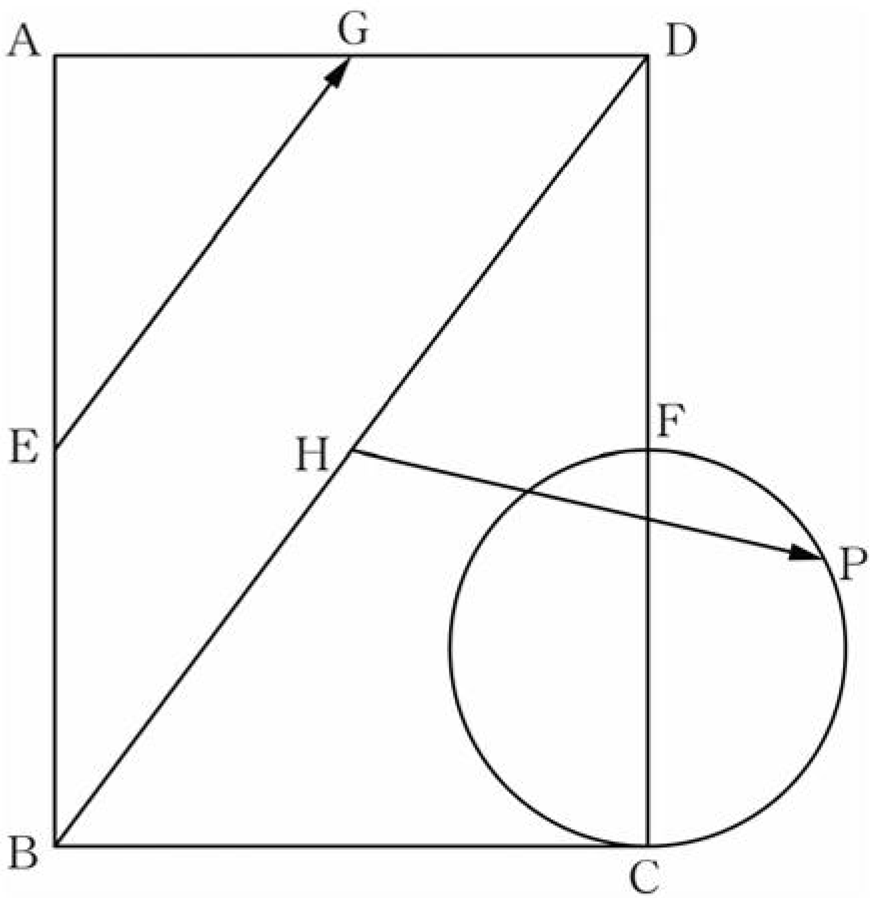
$|m\vec{a}+n\vec{b}|=\sqrt{20m^2+5n^2}=10$

즉, $20m^2+5n^2=100$ 이므로 도형 C는 타원 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{20}=1$

타원 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 위를 움직이는 두 점 Q, R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$가 최솟값을 갖는 경우는 두 점 Q, R가 장축의 양 끝 점 위에 있을 때이므로 두 점 Q, R 사이의 거리는 장축의 길이인 $4\sqrt{5}$

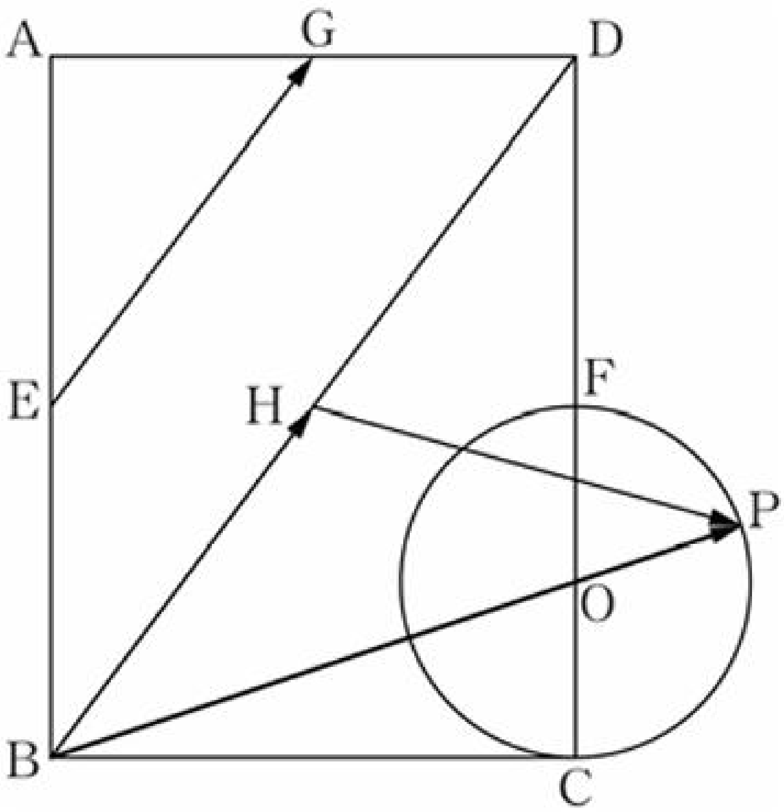
2. $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$ 인 직사각형 ABCD 에 대하여 네 선분 AB, CD, DA, BD 의 중점을 각각 E, F, G, H 라 하자. 선분 CF 를 지름으로 하는 원 위의 점 P 에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}|$ 의 최댓값은? [4점]

① 8　　② $2+2\sqrt{10}$　　③ $2+2\sqrt{11}$
④ $2+4\sqrt{3}$　　⑤ $2+2\sqrt{13}$



(2016년 10월 가형 18번)

2. [출제의도] 벡터의 기하학적인 성질을 이용하여 두 벡터의 합의 크기의 최댓값을 추론한다.



$\left|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}\right|=\left|\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}\right|=\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 이므로

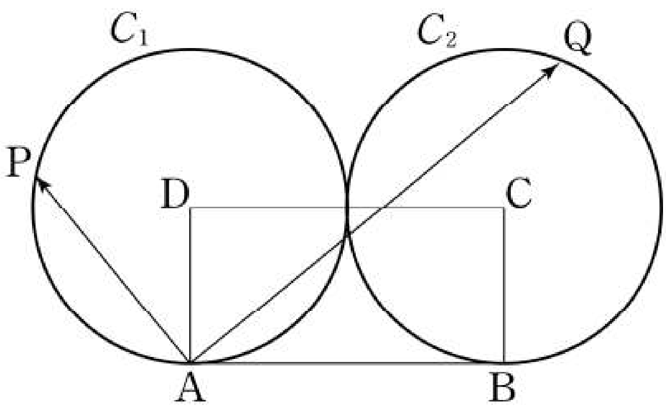
$\left|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}\right|$ 의 최댓값은 $\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 의 최댓값과 같다.

즉, 원 밖의 한 점 B 에서 원 위의 점 P 에 이르는 거리의 최댓값이다.

따라서 원의 중심을 O 라 하면 $\left|\overrightarrow{BP}\right|$ 의 최댓값은

$\overline{BO}+2=\sqrt{6^2+2^2}+2=2\sqrt{10}+2$

3. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=1$인 직사각형 ABCD에서 점 D와 점 C를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 모두 1인 두 원 C_1, C_2가 있다. 두 점 P, Q가 각각 원 C_1과 원 C_2 위의 점일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값은? [4점]



① $2\sqrt{2}-1$　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}+1$
④ $2\sqrt{2}+2$　⑤ $2\sqrt{2}+3$

(2016년 10월 가형 18번)

3. 이해력 – 평면벡터 [4점] **정답** ④

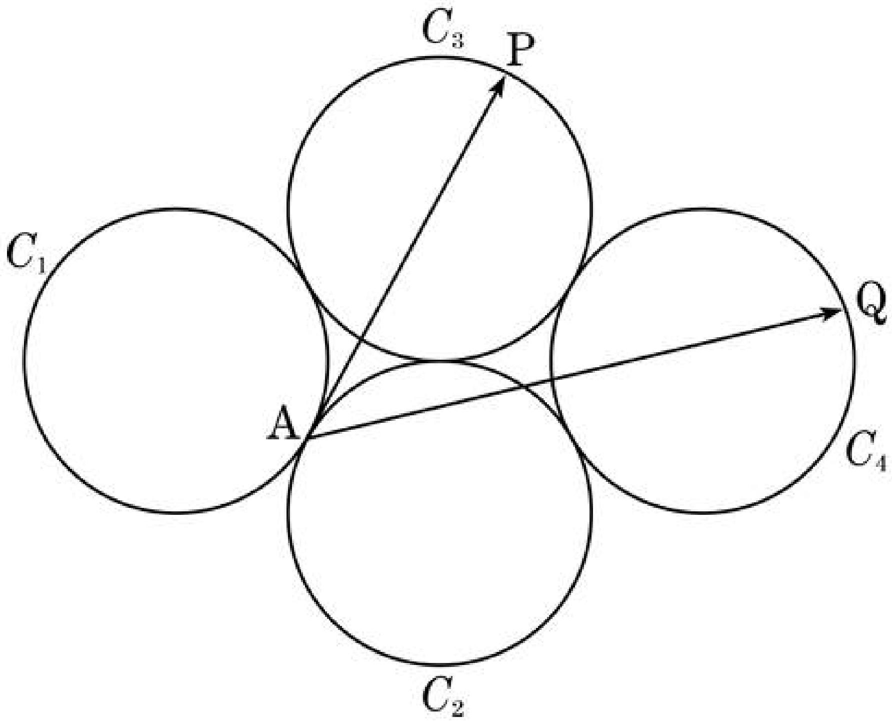
선분 CD의 중점을 M이라 하면

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}| &= |(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ})| \\ &= |(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CQ})| \\ &= |2\overrightarrow{AM}+(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CQ})| \\ &\le 2|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{DP}|+|\overrightarrow{CQ}| \\ &= 2\sqrt{2}+1+1=2\sqrt{2}+2\end{aligned}$$

(단, 등호는 두 벡터 $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{CQ}$가 모두 벡터 $\overrightarrow{AM}$과 평행할 때 성립한다.)

따라서, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값은 $2\sqrt{2}+2$이다.

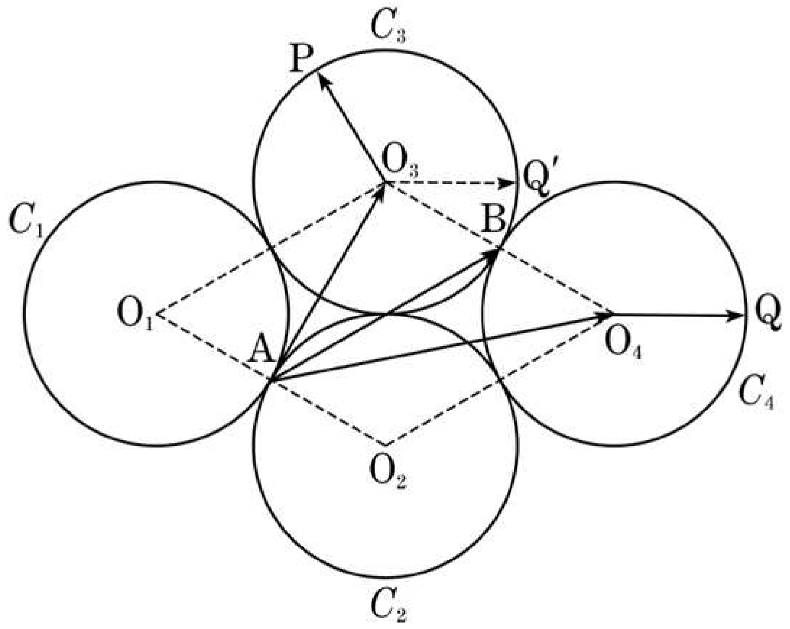
4. 그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4가 서로 외접하고 있고, 두 원 C_1, C_2의 접점을 A라 하자. 원 C_3 위를 움직이는 점 P와 원 C_4 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값은? [4점]



① $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　② 6　　③ $3\sqrt{3}+1$
④ $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$　　⑤ 7

(2013년 10월 B형 21번)

4. [출제의도] 벡터와 관련된 문제를 도형을 이용하여 해결한다.



네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각

O_1, O_2, O_3, O_4

라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라 하자.

사각형 $O_1O_2O_4O_3$은 네 변의 길이가 모두 2인 마름모이고, 두 점 A, B는 각각 변 O_1O_2, 변 O_3O_4의 중점이다.

$\therefore\ \overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4}=2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{O_1O_3}$

한편, 벡터 $\overrightarrow{O_4Q}$를 시점이 O_3이 되도록 평행이동하였을 때, 그 종점을 Q′이라 하면

$\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q}=\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}$이므로

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$

$=\left(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{O_3P}\right)+\left(\overrightarrow{AO_4}+\overrightarrow{O_4Q}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4}\right)+\left(\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q}\right)$

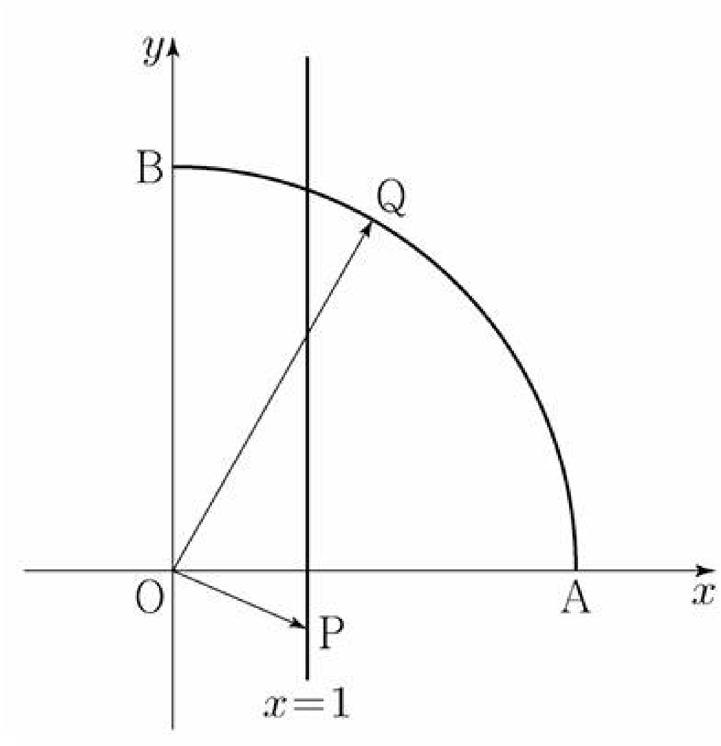
$=2\overrightarrow{O_1O_3}+\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}$

이때, 벡터 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$의 크기가 최대가 되려면 $\overrightarrow{O_1O_3}$은 방향과 크기가 일정한 벡터이므로 두 벡터 $\overrightarrow{O_3P}$, $\overrightarrow{O_3Q'}$이 $\overrightarrow{O_1O_3}$과 방향이 같아야 한다.

$\therefore\ \left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\right|\le 3\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|=6$

5. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(0, 3)$과 직선 $x=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(1, a)$가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=5$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $-5\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$ ④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$



(2020학년도 6월 가형 18번)

5. **출제의도** : 벡터의 합을 이해하고 벡터의 합의 크기가 최댓값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

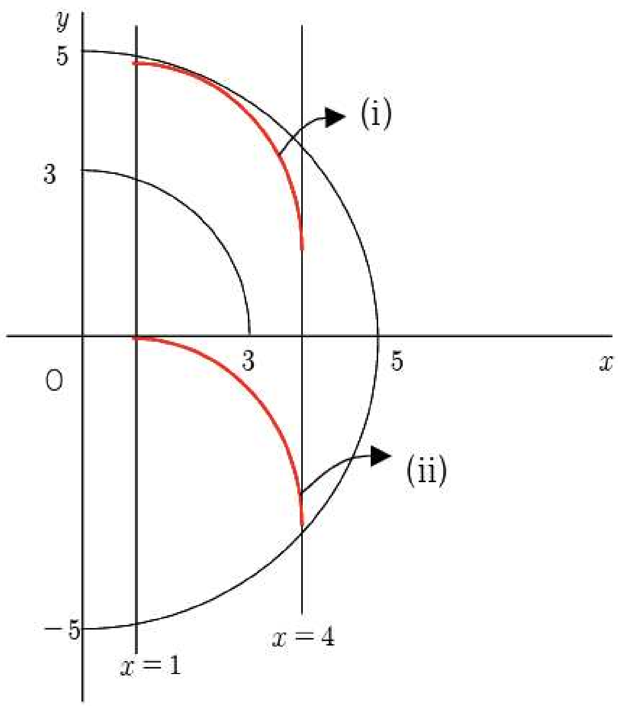
정답풀이 :

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}| \le 5$이어야 하므로 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$를 만족시키는 점을 R라 할 때,

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OR}| \le 5$

을 만족시켜야 한다.

이때, 점 P는 직선 $x=1$을 움직이므로 점 R의 좌표 중 x좌표가 가장 큰 점은 직선 $x=4$를 움직인다. 그런데 점 Q는 호 AB위를 움직이므로 최댓값이 5가 되는 경우는 그림과 같이 두 가지 경우이다.



(i) 두 원

$x^2+y^2=25$, $(x-1)^2+(y-a)^2=9$

이 서로 내접하는 경우이므로

$\sqrt{1^2+a^2}=5-3$, $\sqrt{a^2+1}=2$

$a^2=3$

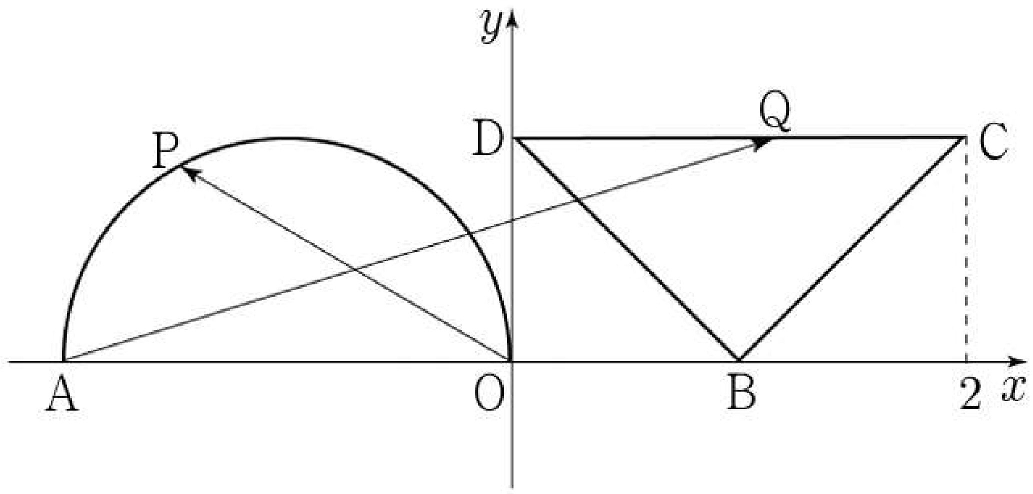
이때 $a>0$이므로 $a=\sqrt{3}$

(ii) 원 $x^2+y^2=25$에서 $x=4$일 때 $y=-3$ 이므로 $a=-3$ 이다.

(i), (ii) 에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $-3\sqrt{3}$ 이다.

정답 ③

6. 좌표평면 위에 네 점 $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$, $C(2, 1)$, $D(0, 1)$이 있다. 반원의 호 $(x+1)^2+y^2=1\,(0 \leq y \leq 1)$ 위를 움직이는 점 P와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M^2+m^2=p+2\sqrt{q}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]



(2021년 4월 29번)

6. **[출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기**

(ⅰ) 두 점 A, O의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}$이므로

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ})$

$=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$

$|\overrightarrow{MP}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$의 방향이 같고 $|\overrightarrow{MQ}|$의 값이 최대일 때, $|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$의 값은 최대이다. 그러므로 선분 MC와 반원의 호가 만나는 점을 X라 하면 점 Q가 점 C이고 점 P가 점 X일 때 $|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|$의 값은 최대이다.

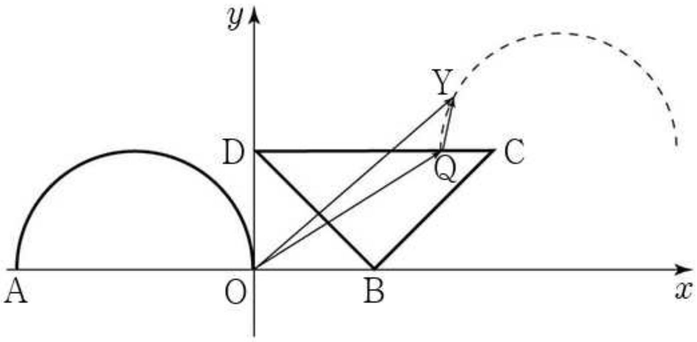
$\overline{MC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

$|\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}|\le|\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{MC}|=\sqrt{10}+1$

따라서 $M=\sqrt{10}+1$

(ⅱ) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})$

$=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}$



삼각형 BCD 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{QY}=\overrightarrow{AP}$인 점을 Y라 하자.

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QY}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OY}|\ge|\overrightarrow{OQ}|$

이므로 점 Y가 점 Q일 때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이다. 점 Q가 선분 BD 위에 있고 $\overline{OQ}\perp\overline{BD}$일 때 $|\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이므로

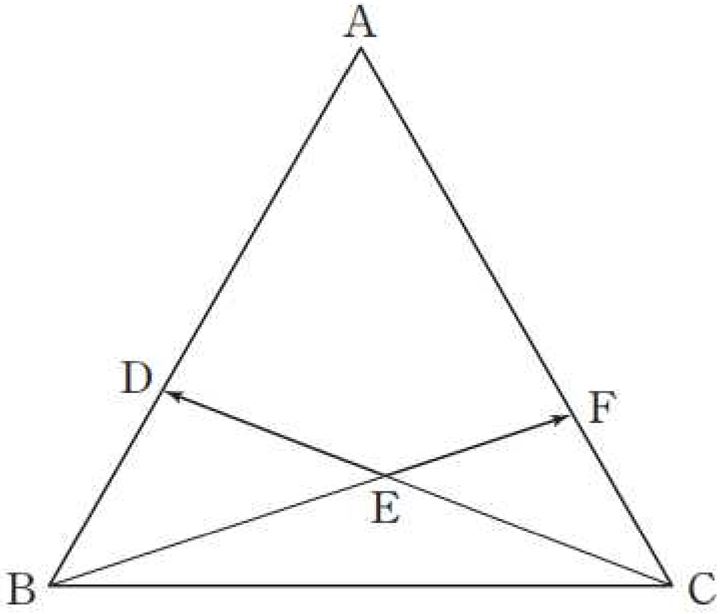
$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

$M^2+m^2=(11+2\sqrt{10})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{23}{2}+2\sqrt{10}$

따라서 $p=\dfrac{23}{2}$, $q=10$이므로 $p\times q=115$

7. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 ABC에서 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하고, 선분 DC의 중점을 E라 할 때, 선분 AC와 직선 BE의 교점을 F라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{ED}}-\overrightarrow{\mathrm{EF}}|$의 값은? [4점]



① $\sqrt{73}$ ② $\sqrt{74}$ ③ $5\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{19}$ ⑤ $\sqrt{77}$

(2019년 5월 가형 17번)

7. **수학 내적 문제 해결 능력 - 평면벡터** 정답 ①

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 점 D는 선분 AB를

$2:1$로 내분하는 점이므로 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{a}$

점 E는 선분 DC의 중점이므로

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$\overrightarrow{AF}=t\vec{b}\,(0<t<1)$이라 하면

세 점 B, E, F는 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AE}=(1-s)\vec{a}+s(t\vec{b})=(1-s)\vec{a}+st\vec{b}$를

만족시키는 실수 $s\,(0<s<1)$이 존재한다.

$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=(1-s)\vec{a}+st\vec{b}$에서

$\frac{1}{3}=1-s$, $\frac{1}{2}=st$이므로 $s=\frac{2}{3}$, $t=\frac{3}{4}$

따라서 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{2}{3}\times12=8$, $|\overrightarrow{AF}|=\frac{3}{4}\times12=9$

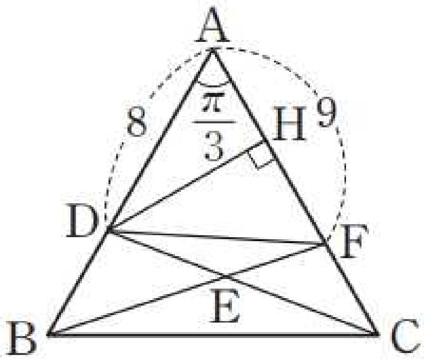
점 D에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}=8\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$,

$\overline{AH}=8\cos\frac{\pi}{3}=4$이므로

$\overline{HF}=\overline{AF}-\overline{AH}$

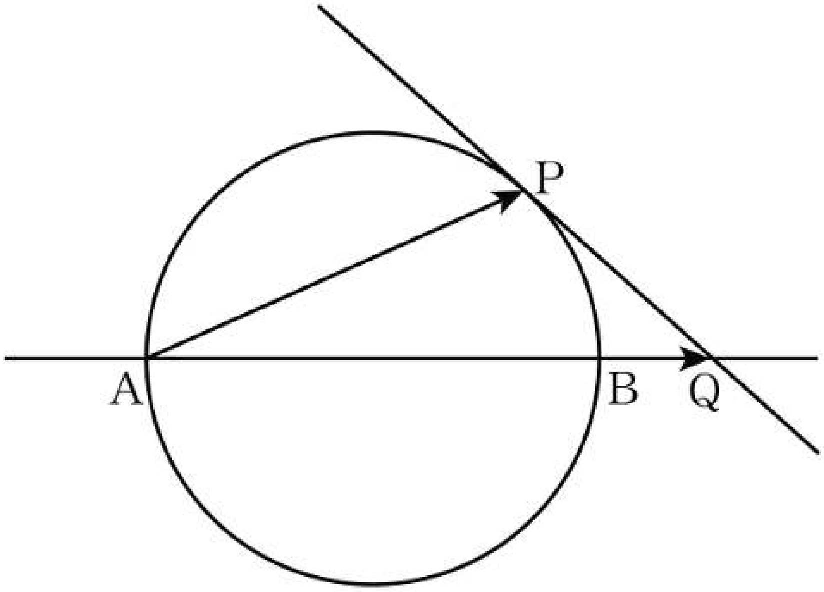
$=9-4=5$



따라서

$$|\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EF}|=|\overrightarrow{FD}|=\overline{FD}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HF}^2}$$
$$=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+5^2}=\sqrt{73}$$

8. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AB가 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 선분 AB를 $5:1$로 외분하는 점이고, $\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{3}$ 일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 의 값을 구하시오. [4점]



(2019년 10월 가형 27번)

8. **[출제의도] 원의 접선을 이용하여 평면벡터의 내적에 대한 문제를 해결한다.**

선분 AB의 중점을 O라 하면 점 Q가 선분 AB를 5 : 1로 외분하는 점이고, $\overline{BQ}=\sqrt{3}$ 이므로

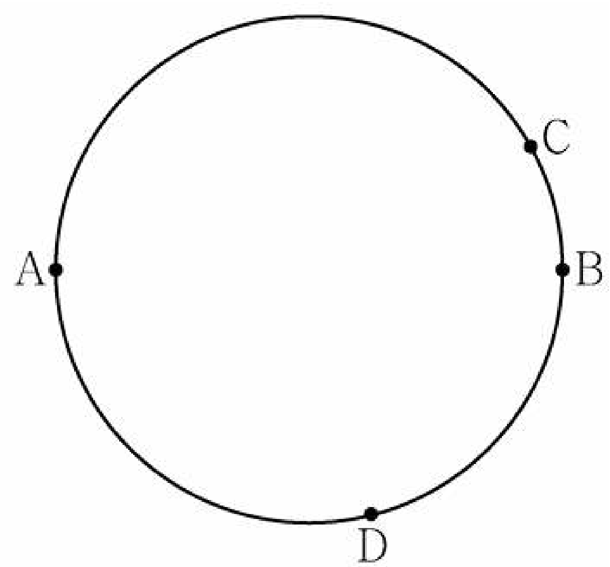
$\overline{AO}=\overline{OB}=\overline{OP}=2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{AQ}\\&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\left(\frac{5}{3}\overrightarrow{OQ}\right)\\&=|\overrightarrow{AO}|\times|\overrightarrow{AQ}|+\frac{5}{3}\times|\overrightarrow{OP}|^2\\&=2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}+\frac{5}{3}\times(2\sqrt{3})^2=50\end{aligned}$$

9. 한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$의 값은? [4점]

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 8$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

① 32　② 34　③ 36　④ 38　⑤ 40



(2020학년도 수능 가형 19번)

9. **출제의도** : 내적을 이용하여 두 벡터의 수직, 벡터의 크기 등을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$는 수직이다. 그러므로 선분 AB는 원의 지름이다.

이때, $|\overrightarrow{AB}|=8$이므로 이 원은 지름의 길이가 8인 원이다.

원의 중심을 O라 하면 조건 (나)에서

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{CB}$$

이때, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$이므로

$$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{CB}$$

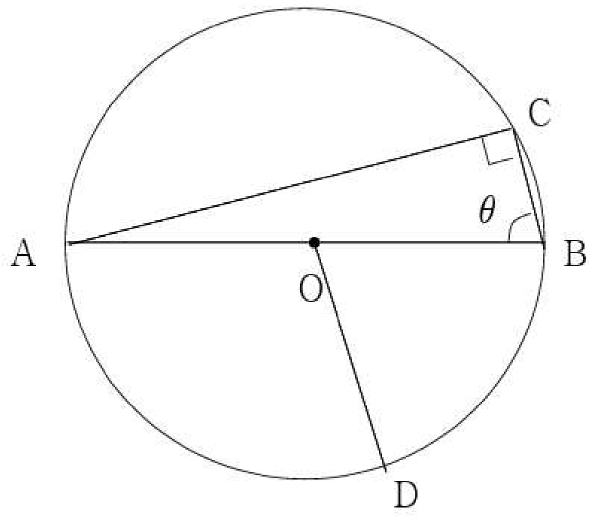
이때, 점 D는 원 위의 점이므로

$|\overrightarrow{OD}|=4$에서

$2|\overrightarrow{CB}|=4$

$|\overrightarrow{CB}|=2$

또, 두 벡터 $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD}$는 평행하다.



이때, $\angle ABC=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{CB}$는 평행하므로

$\angle AOD=\pi-\theta$

따라서,

$$|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$$
$$=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}$$

$$=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos(\pi-\theta)$$
$$=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2+2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta$$
$$=4^2+4^2+2\times4\times4\times\frac{1}{4}$$
$$=40$$

정답 ⑤

10. 좌표평면에서 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}| \le 1 \text{이고 } \overrightarrow{\mathrm{OX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}_k} \ge 0 \quad (k=1,\ 2,\ 3)$$

을 만족시키는 모든 점 X의 집합이 나타내는 도형을 D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$이면 D의 넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다.

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이면 D는 길이가 2인 선분이다.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = 0$인 경우에, D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이면 점 A_3은 D에 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2018학년도 9월 가형 19번)

10. 출제의도 : 평면벡터의 크기와 내적의 정의를 이용하여 벡터의 종점이 이루는 도형에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{OX}| \le 1$이므로 점 X는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부와 경계이다.

또, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \ge 0$에서 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OA_k}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

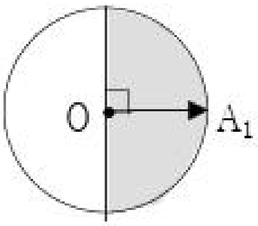
$|\overrightarrow{OX}|\,|\overrightarrow{OA_k}|\cos\theta \ge 0$

$\cos\theta \ge 0$

그러므로

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

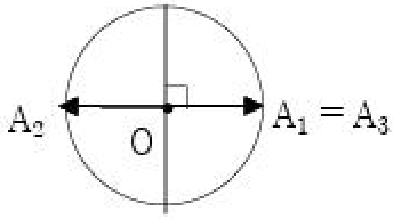
ㄱ. $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$이므로 조건을 만족시킬 점 X를 나타내는 도형 D는 반원과 이 반원의 내부이다.



그러므로 도형 D의 넓이는 반지름의 길이가 1인 원의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \pi = \frac{\pi}{2}$ <참>

ㄴ. $\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}$이고 $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}$이면 아래 그림과 같다. 이때, 점 X를 나타내는 도형 D는 선분 A_1A_2와 수직인 원의 지름이다.

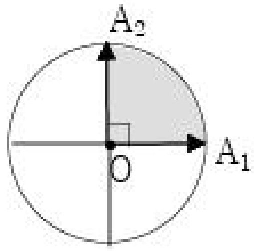


그러므로 D의 길이는 2이다. <참>

ㄷ. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = 0$이면

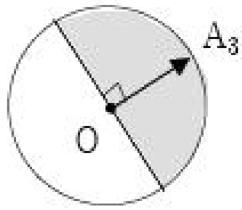
$\overrightarrow{OA_1} \perp \overrightarrow{OA_2}$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$에 대하여 조건을 만족시킬 점 X를 나타내면 다음과 같은 사분원의 경계 및 내부이다.



[그림1]

또, 벡터 $\overrightarrow{OA_3}$에 대하여 조건을 만족시킬 점 X를 나타내면 그림과 같이 반원과 이 반원의 내부이다.



[그림2]

이때, 도형 D의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이기 위해서는 위의 두 도형의 공통부분이 [그림1]과 같은 사분원의 경계 및 내부이어야 한다.

그러므로 점 A_3는 호 A_1A_2위에 있어야 한다. 즉, D에 포함되어야 한다. <참>

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

11. 좌표평면 위에 두 점 $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 2)$가 있다. 선분 OB 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 Q는 직선 AP 위의 점이다.
(나) $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$

점 Q가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\dfrac{\pi}{4}$ ② $\dfrac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

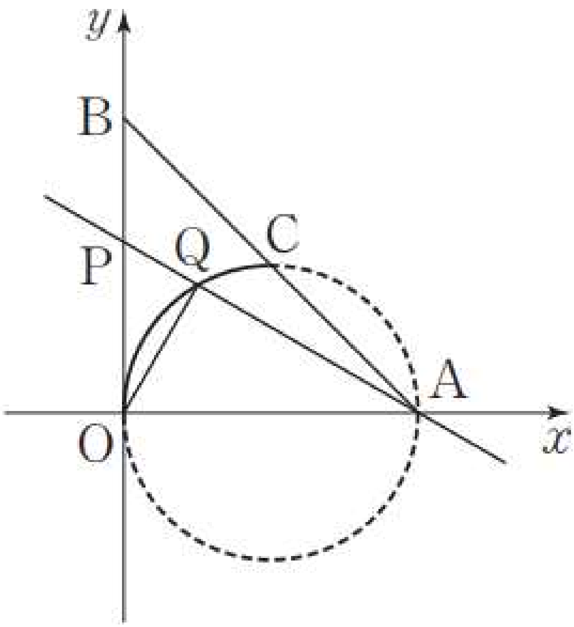
(2018년 5월 가형 14번)

11. **이해 능력 – 평면벡터** 정답 ②

$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$에서 $\overrightarrow{OQ} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0$

이므로 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

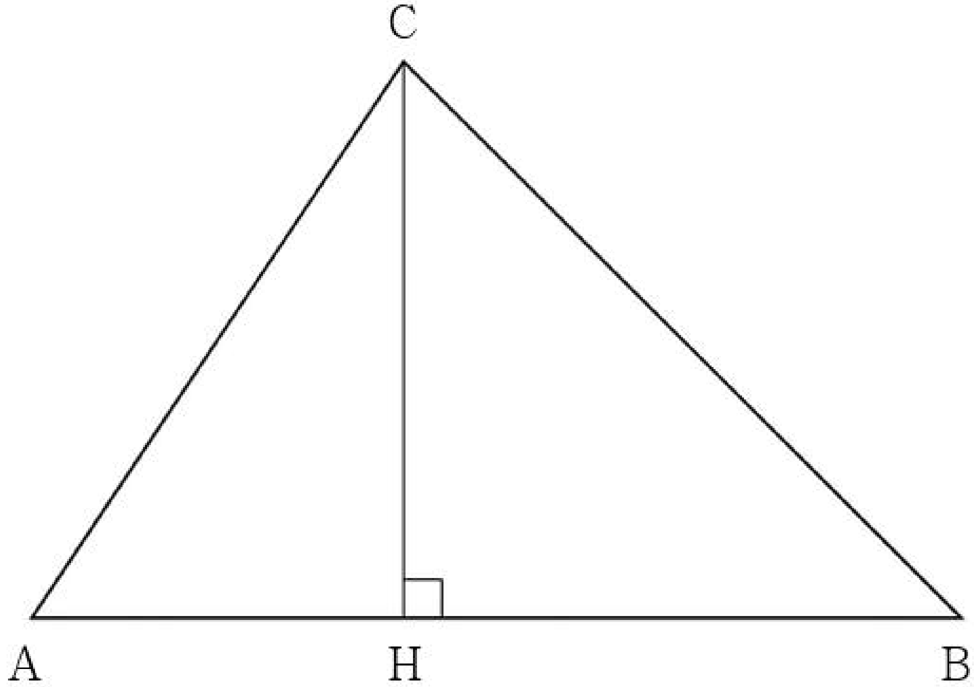
두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{AP}$가 서로 수직이고 점 Q가 직선 AP 위의 점이므로 점 Q는 원점 O에서 직선 AP에 내린 수선의 발이다.



선분 OA를 지름으로 하는 원과 선분 AB의 교점 중에서 점 A가 아닌 점을 C라 하면 점 Q가 나타내는 도형은 선분 OA를 지름으로 하는 원의 일부인 호 OC이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi \times 1 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

12. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}$의 값은? [4점]



(가) 점 H가 선분 AB를 $2:3$으로 내분한다.
(나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$
(다) 삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

① 36　② 37　③ 38　④ 39　⑤ 40

(2016년 7월 가형 19번)

12. [출제의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기

조건 (가)에서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=2k$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{HB}}\right|=3k\ (k>0)$

라 하면 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=5k$

조건 (나)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|\times\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=40$

$2k\times5k=40$ 이므로 $k=2$ 이고 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=10$

조건 (다)에서 삼각형 ABC 의 넓이는 30 이므로

$\frac{1}{2}\times\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\times\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|=30$ 에서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|=6$

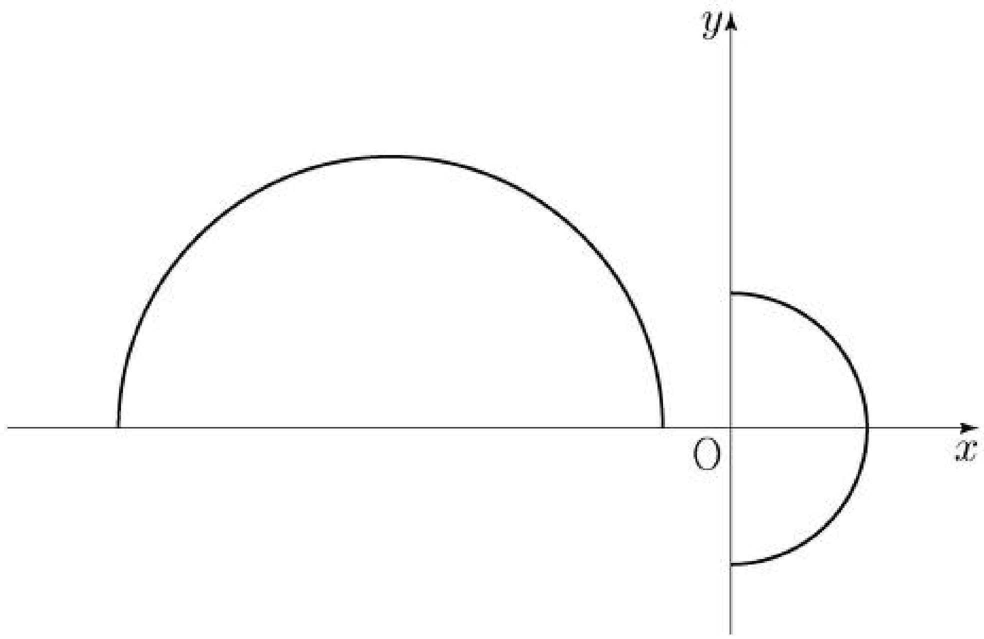
$\angle\mathrm{AHC}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2=36$

13. 좌표평면에서 반원의 호 $x^2+y^2=4$ $(x \geq 0)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a, b)$에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2$$

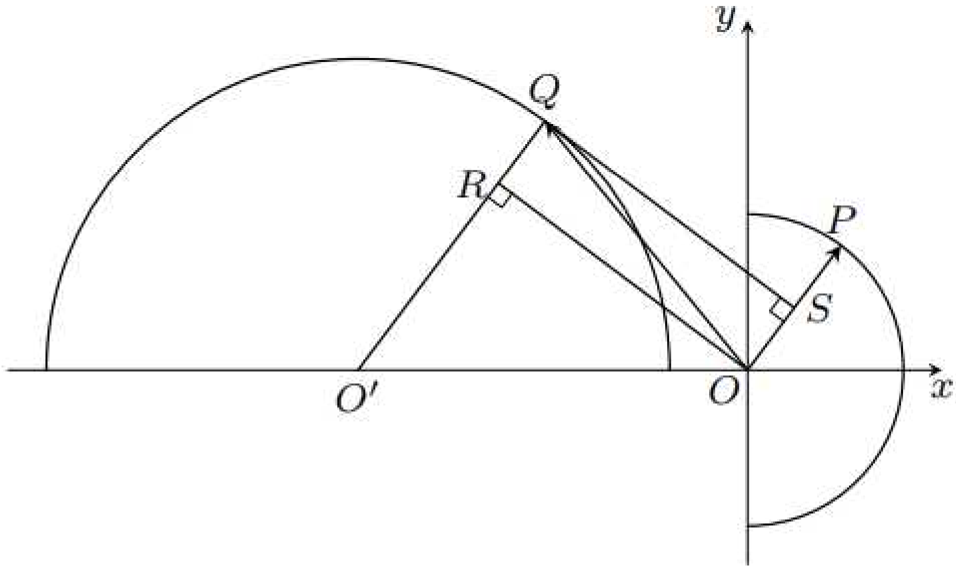
를 만족시키는 반원의 호 $(x+5)^2+y^2=16$ $(y \geq 0)$ 위의 점 Q가 하나뿐일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{13}{5}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{14}{5}$



(2022학년도 5월 28번)

13.



$(x+5)^2+y^2=16$의 중심을 O', O에서 $O'Q$에 내린 수선의 발을 R, Q에서 OP에 내린 수선의 발을 S라 하고, $\angle POQ=\theta$라 하자.

$\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ} = \left|\overrightarrow{OP}\right| \left|\overrightarrow{OQ}\right| \cos\theta = 2\left|\overrightarrow{OQ}\right| \cos\theta = 2$

$\therefore \left|\overrightarrow{OQ}\right| \cos\theta = 1$

따라서 $\overline{OS}=1$이다.

그러므로 $\overline{RQ}=1$이고, $\overline{O'R}=3$, $\overline{OO'}=5$에서 $\overline{OR}=4$

따라서 OP의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$

OP의 방정식은 $y=\dfrac{4}{3}x$

이 식을 원에 대입하여 P의 좌표를 구하면 $P\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

그러므로 $a+b=\dfrac{14}{5}$

답 ⑤

14. 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = 0$, $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|} = 3$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = -2|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = k\overrightarrow{\mathrm{PD}}$이다. 실수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{11}{2}$ ② 6 ③ $\dfrac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\dfrac{15}{2}$

(2021년 10월 28번)

14. **[출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.**

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$ 와 $\overrightarrow{PC}$ 가 이루는 각의 크기는 $90°$ 이다.

$\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|} = 3$ 에서 $|\overrightarrow{PC}| = t\ (t > 0)$ 이라 하면 $|\overrightarrow{PA}| = 3t$

두 벡터 $\overrightarrow{PB}$ 와 $\overrightarrow{PC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|$ 이므로

$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = 135°$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}| = -2|\overrightarrow{PC}|^2$ 에서

$|\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2}|\overrightarrow{PC}|$ 이므로 $|\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2}t$

$\angle APB = \angle BPC = 135°$, $\angle CPA = 90°$ 이므로

세 삼각형 ABP, BCP, CAP 의 넓이를 각각

S_1, S_2, S_3 이라 하면

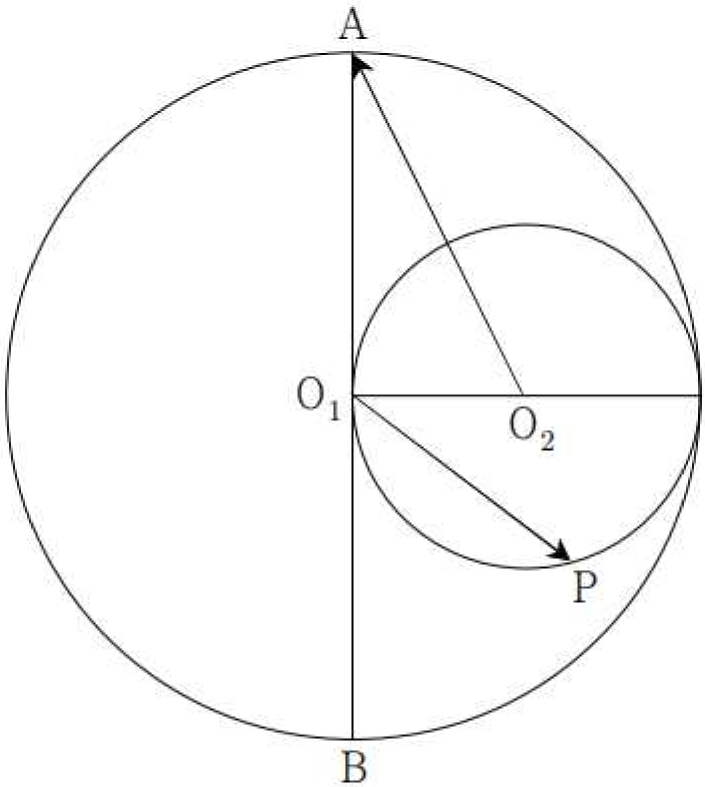
$S_1 : S_2 : S_3 = 3t^2 : t^2 : \dfrac{3}{2}t^2 = 6 : 2 : 3$

직선 AP 와 변 BC 의 교점이 D 이므로

$\overline{AD} : \overline{DP} = (S_1 + S_2 + S_3) : S_2 = 11 : 2$

따라서 $\overrightarrow{AD} = \dfrac{11}{2}\overrightarrow{PD}$ 이므로 $k = \dfrac{11}{2}$

15. 그림과 같이 두 점 O_1, O_2를 중심으로 하는 반지름의 길이가 각각 2, 1인 두 원이 내접하고, 큰 원의 지름 AB와 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$가 수직이다. 점 P가 작은 원 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{A}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{A}}$의 최댓값 M에 대하여 $12(M+1)^2$의 값을 구하시오. [4점]



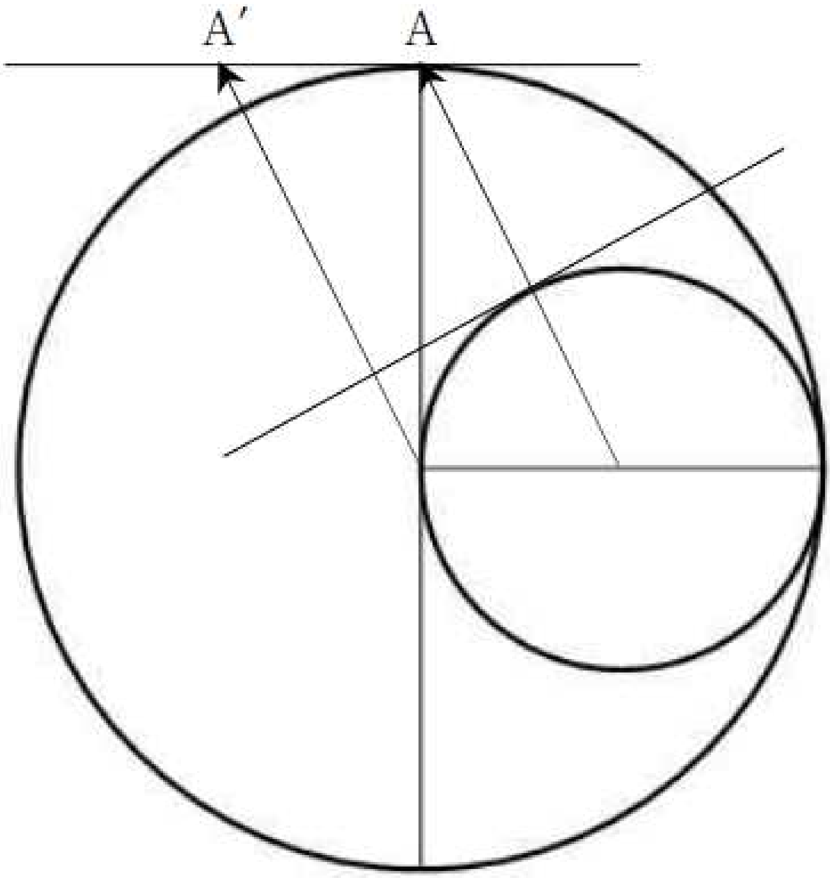
(2011년 10월 가형 30번)

15. **[출제의도] 벡터의 내적의 정사영의 정의를 알고 이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

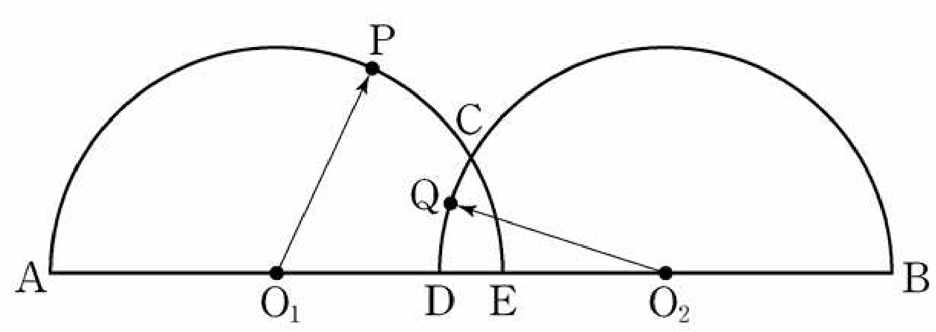
원 O_2와 $\overleftrightarrow{O_2A}$의 교점을 P라 하면 $M = |\overrightarrow{O_1A'}||\overrightarrow{O_1C}|$이다. $\triangle O_1O_2A \backsim \triangle CDO_1$, $|\overline{DO_1}| = |\overline{DP}|$에서

$|\overrightarrow{O_1A'}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{O_1C}| = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로 $M = \sqrt{5} - 1$

이다. 따라서, $12(M+1)^2 = 60$이다.



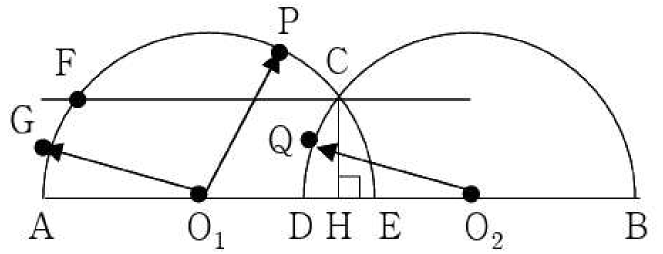
16. 그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AE} = \overline{DB} = 2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = 1$인 두 점을 O_1, O_2라 하자.
호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}\right|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $1 < \overline{O_1O_2} < 2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(2017학년도 6월 가형 28번)

16. **출제의도** : 벡터의 연산과 내적을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 C를 지나고 직선 AB에 평행인 직선이 호 AC와 만나는 점을 F라고 하면

$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1G}$

를 만족시키는 점 G는 호 AF 위에 있다.

$\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$

이므로 벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}$의 크기가 최소인 경우는 $\angle PO_1G$의 크기가 최대일 때이며, 이때 점 G가 점 A와 일치하고, 점 P가 점 C와 일치한다. 따라서

$$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1G}\right| \geq \left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$$

$\angle AO_1C=\theta$라 하자.

$$\left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$$

의 양변을 제곱하면

$$\left|\overrightarrow{O_1C}\right|^2+2\overrightarrow{O_1C}\cdot\overrightarrow{O_1A}+\left|\overrightarrow{O_1A}\right|^2=\frac{1}{4}$$

$$1+2\left|\overrightarrow{O_1C}\right|\left|\overrightarrow{O_1A}\right|\cos\theta+1=\frac{1}{4}$$

$$2\times1\times1\times\cos\theta=\frac{1}{4}-2$$

$$\cos\theta=-\frac{7}{8}$$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{O_1H}=\overline{O_1C}\cos(\pi-\theta)$$
$$=1\times(-\cos\theta)$$
$$=\frac{7}{8}$$

이고 $\overline{O_1H}=\overline{HO_2}$이므로

$$\overline{AB}=\overline{AO_1}+\overline{O_1H}+\overline{HO_2}+\overline{O_2B}$$
$$=1+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+1$$
$$=\frac{15}{4}$$

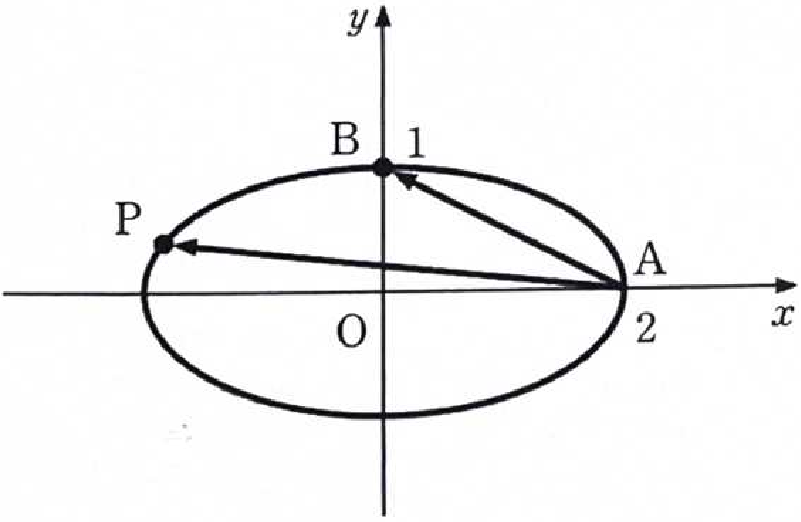
따라서 $p=4$, $q=15$이므로

$p+q=19$

정답 19

17.

두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 1)$과 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$가 최대가 되는 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점]



(2010년 10월 가형 21번)

17. [출제의도] 내적의 정의와 이차곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

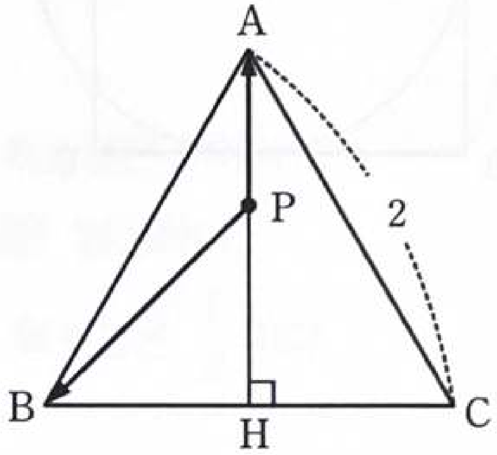
점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P′이라 하면, 두 벡터의 내적 $\mathrm{AB} \bullet \mathrm{A\vec{P}} = \overline{\mathrm{AB}} \times \mathrm{AP}'$이다. $\overline{\mathrm{AP}'}$가 최대가 되는 점 P는 직선 AB와 수직인 기울기를 갖고, 타원에 접하는 접점 중에서 제2사분면 위의 점이다. 따라서, 접선의 기울기는 2이고, 접선의 방정식은

$$y = 2x + \quad 17$$

18.

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(2013학년도 수능 가형 26번)

18. 출제의도 : 벡터의 합을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값을 구할 수 있는가?

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ (k는 $0 \le k \le 1$인 실수)로 놓을 수 있고

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$이다.

그러므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \frac{1}{2}k(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= 2k + 2k\cos 60^\circ \\ &= 3k\end{aligned}$$

또 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = |k\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = 3k^2$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

구하는 식에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} &= -\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= -3k + 3k^2\end{aligned}$$

$0 \le k \le 1$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다.

따라서 $p+q=7$

<답> 7

19. 좌표평면 위의 두 점 A$(6,0)$, B$(8,6)$에 대하여 점 P가

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$$

을 만족시킨다.
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$
④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

(2019학년도 9월 가형 16번)

19. **출제의도** : 위치벡터의 연산을 이해하고 벡터의 내적을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$ 에서

$2|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{10}$

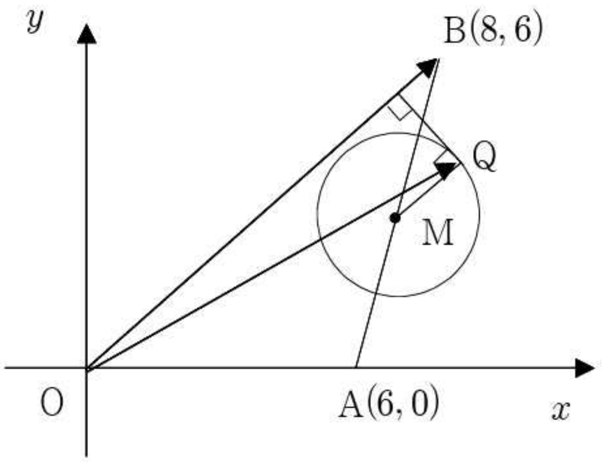
$|\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

그러므로 점 P는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 인 원 위의 점이다.

이 원을 C라 하자.

한편, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이기 위해서는 그림과 같이 직선 OB에 수직인 직선이 원 C와 접하는 점 중 선분 OP의 길이가 가장 클 때의 점이다.

그러므로 점 Q는 그림과 같다.



한편, 직선 OB에 수직이고 점 Q를 지나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로

$\overline{OB}//\overline{MQ}$

그러므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기와 같다.

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$

에서

$(6,0)\cdot(8,6)=\sqrt{6^2+0^2}\sqrt{8^2+6^2}\cos\theta$

$48=6\times10\times\cos\theta$

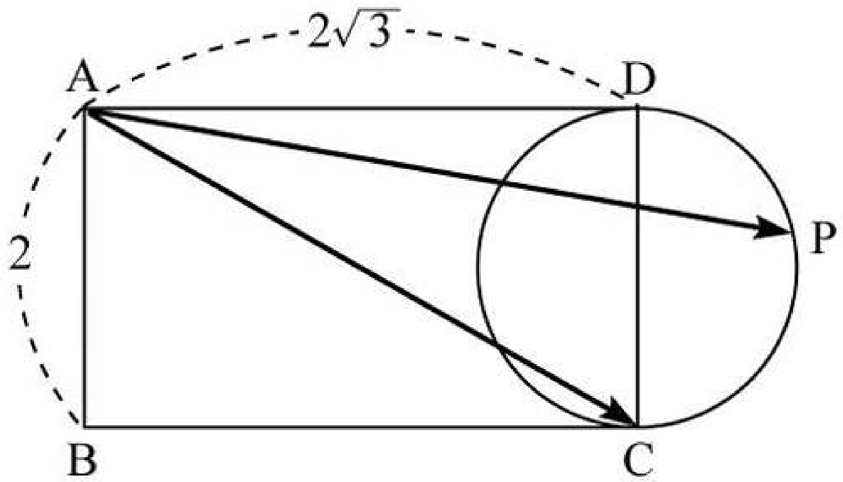
$\cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서, $|\overrightarrow{OA}|=6$, $|\overrightarrow{MQ}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}&=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MQ}|\cos\theta\\&=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{4}{5}\\&=\frac{12\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

정답 ③

20. 그림은 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 와 이 직사각형의 한 변 CD 를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ 의 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 의 최댓값은? (단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.) [4점]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

(2010년 10월 가형 11번)

20. **[출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

점 A를 원점, 직선 AD를 x축, 직선 AB를 y축으로 하면 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(2\sqrt{3}, -2)$이다.

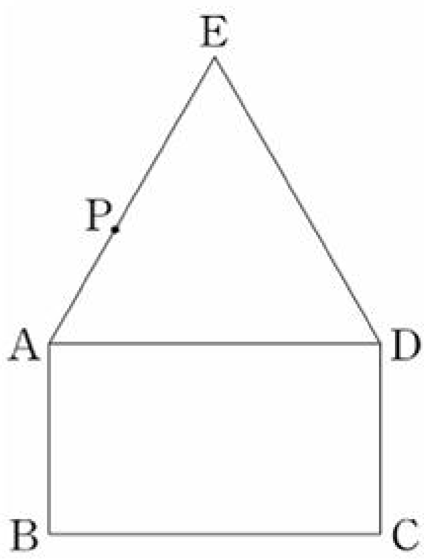
원 $(x-2\sqrt{3})^2+(y+1)^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\sqrt{3}x-2y$

$2\sqrt{3}x-2y=k$라 하면 $10 \leqq k \leqq 18$일 때, 직선과 원이 만나므로 k의 최댓값은 18이다.

21. 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$ 이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 와 정삼각형 EAD 가 있다. 점 P 가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점]



<보 기>

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 1 이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$ 의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

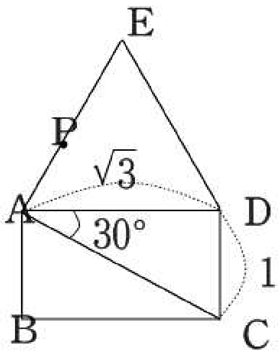
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(2011학년도 9월 가형 14번)

21. ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$이므로 선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.

따라서, 최솟값은 $\overline{AB}=1$이다. (참)

ㄴ.



$\triangle ACD$에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$이므로

$\angle CAD=30°$

$\triangle EAD$가 정삼각형이므로

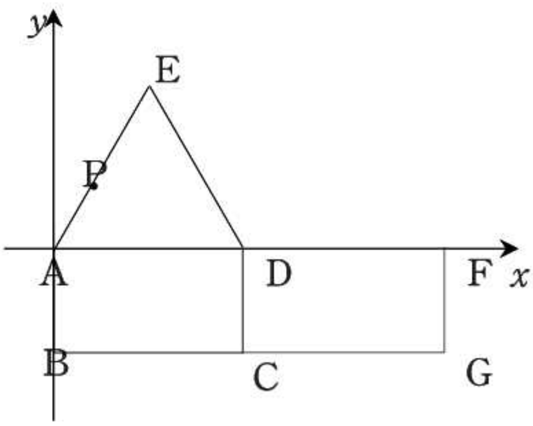
$\angle EAD=60°$

$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90°$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CP}&=\overrightarrow{CA}\bullet(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})\\&=\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AP}\\&=|\overrightarrow{CA}|^2+0\\&=2^2=4\ \text{(참)}\end{aligned}$$

ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.



$\overline{AD}=\overline{DF}$인 x축 위의 점을 F라 하고

직사각형 DCGF를 그리면

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$

이므로 $|\overrightarrow{GP}|$의 최솟값은

점 $G(2\sqrt{3},\ -1)$에서 직선 AE에 이르는 거리와 같다.

직선 AE의 방정식은

$y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$이므로

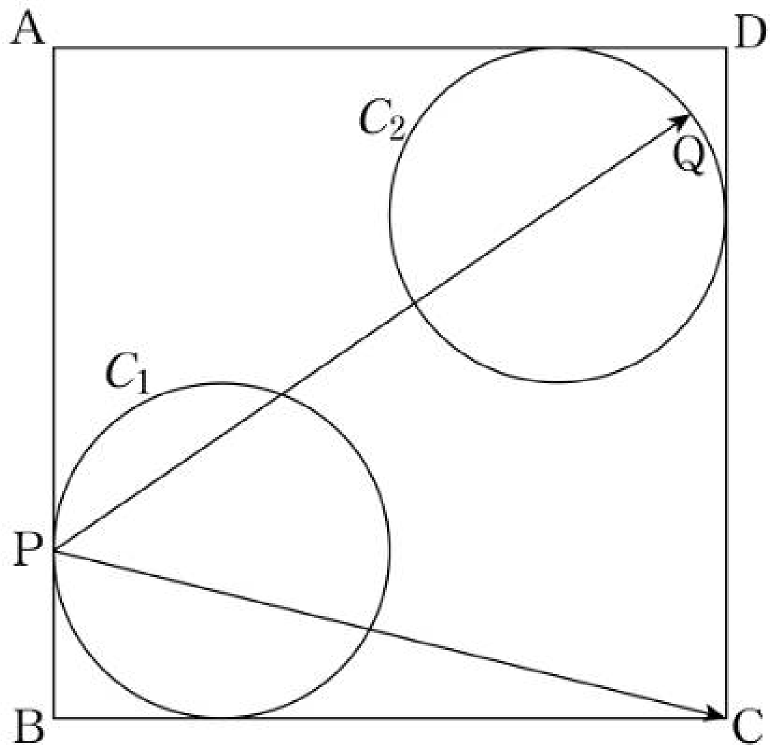
구하는 최솟값은

$$\frac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{7}{2}\ \text{(참)}$$

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

22. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 선분 AB와 선분 BC에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1과 선분 AD와 선분 CD에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2가 있다. 원 C_1과 선분 AB의 접점을 P라 하고, 원 C_2 위의 한 점을 Q라 하자.
$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 $a+\sqrt{b}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



(2017년 10월 가형 28번)

22. [출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결한다.

원 C_2의 중심을 O_2라 하면,

$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PO_2} + \overrightarrow{O_2Q})$

$= \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO_2} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{O_2Q}$

점 P가 원점에, 선분 AB가 y축 위에 오도록 정사각형 ABCD와 두 원 C_1, C_2를 좌표평면 위에 놓으면 두 점 O_2, C의 좌표는 각각 $(3,\ 2)$, $(4,\ -1)$이다.

그러므로 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO_2} = (4,\ -1) \cdot (3,\ 2) = 12 - 2 = 10$

$\overrightarrow{PC}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각을 θ라 하면

$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{O_2Q} = |\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{O_2Q}|\cos\theta$

$= \sqrt{17} \times 1 \times \cos\theta \le \sqrt{17}$ 에서

$\theta = 0$일 때, $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값은 $\sqrt{17}$

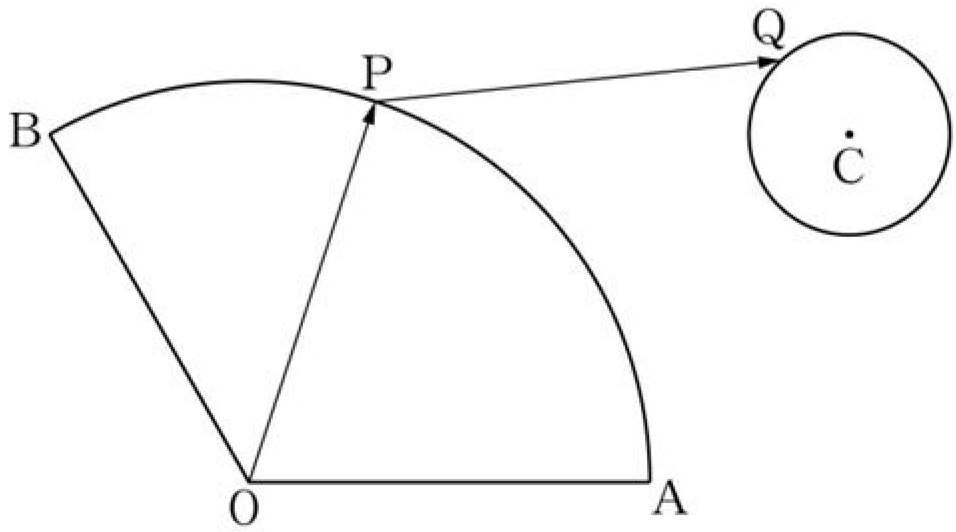
그러므로 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $10 + \sqrt{17}$

따라서 $a + b = 10 + 17 = 27$

23. 그림과 같이 한 평면 위에 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 OAB와 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 세 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$가

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 24, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

을 만족시킨다. 호 AB 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]



① $12\sqrt{3}-34$　② $12\sqrt{3}-32$　③ $16\sqrt{3}-36$
④ $16\sqrt{3}-34$　⑤ $16\sqrt{3}-32$

(2022년 10월 28번)

23. **[출제의도] 벡터의 내적의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.**

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ 에서 $\angle COB = 90°$, $\angle AOC = 30°$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OC}| \times \cos 30° = 2\sqrt{3} \times |\overrightarrow{OC}|$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 24$ 에서 $|\overrightarrow{OC}| = 4\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} - |\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} - 16 \quad \cdots\cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OP}$ 와 $\overrightarrow{OC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$0° \le \theta \le 90°$ 이고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ}) \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CQ} \\ &= 16\sqrt{3}\cos\theta + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CQ}\end{aligned}$$

$\theta = 0°$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$ 의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \le 16\sqrt{3} + 4$ ······ ㉡

$\theta = 90°$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CQ}$ 의 방향이 반대일 때,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 값이 최소이므로

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \ge -4$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$-4 - 16 \le \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} \le 16\sqrt{3} + 4 - 16$

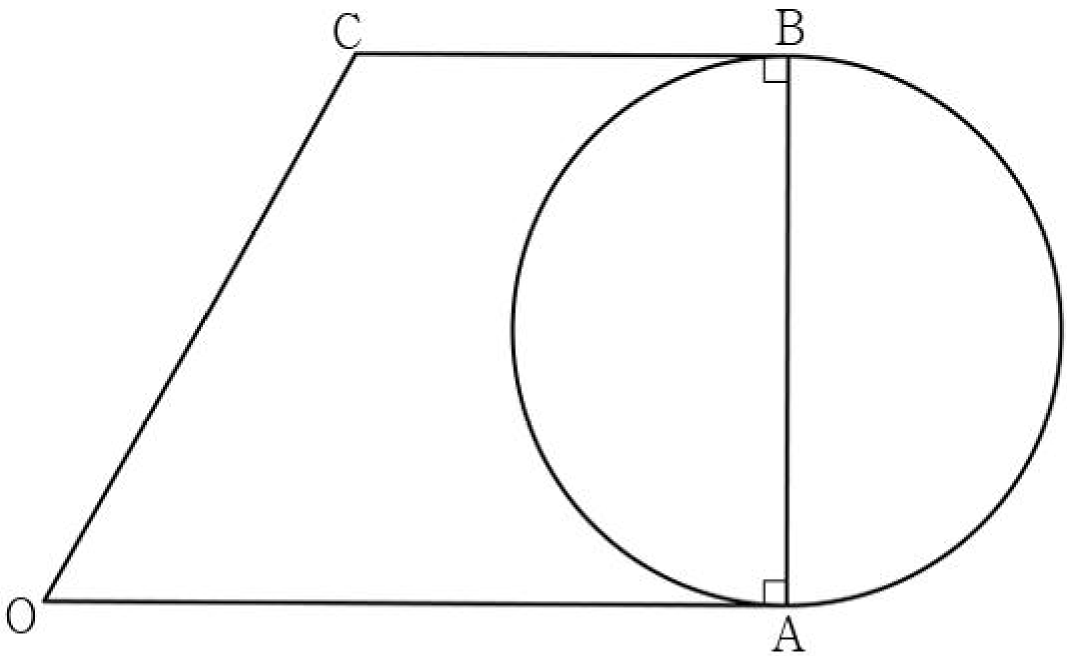
$M = 16\sqrt{3} - 12$, $m = -20$

따라서 $M + m = 16\sqrt{3} - 32$

24. 평면 위에

$$\overline{\mathrm{OA}}=2+2\sqrt{3}\,,\ \overline{\mathrm{AB}}=4,\ \angle\mathrm{COA}=\frac{\pi}{3},\ \angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$$

를 만족시키는 사다리꼴 OABC 가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 D라 하자. 원 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]



(2021년 7월 30번)

24. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을 활용하여 문제해결하기

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 E라 하자.

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP})$

$\quad=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}$의 값은 일정하므로

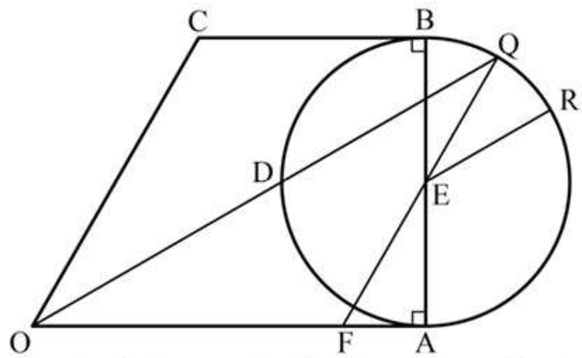
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대일 때

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때의 점 P가 Q이다.



직선 QE가 선분 OA와 만나는 점을 F라 하자.

$\angle\mathrm{EFA}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{AE}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{FE}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overline{\mathrm{FA}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{FA}}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{FE}}+\overline{\mathrm{EQ}}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$이므로 $\angle\mathrm{OQF}=\frac{\pi}{6}$

그러므로 $\overline{\mathrm{DQ}}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER})$

$\quad=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}\ \cdots$ ㉠

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}=2\sqrt{3}\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{ER}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}\le2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$

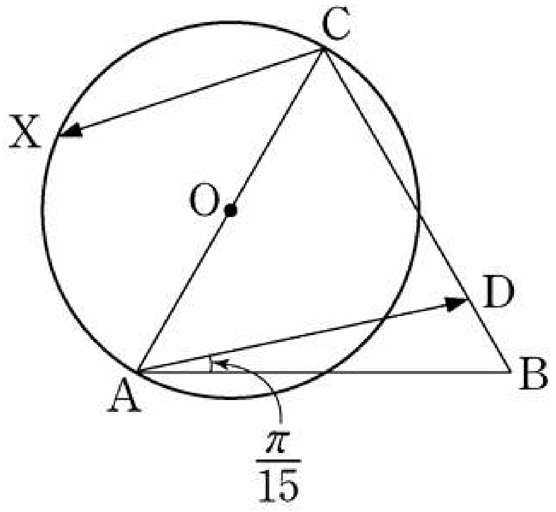
㉠에 의하여

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$

$\quad\le2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

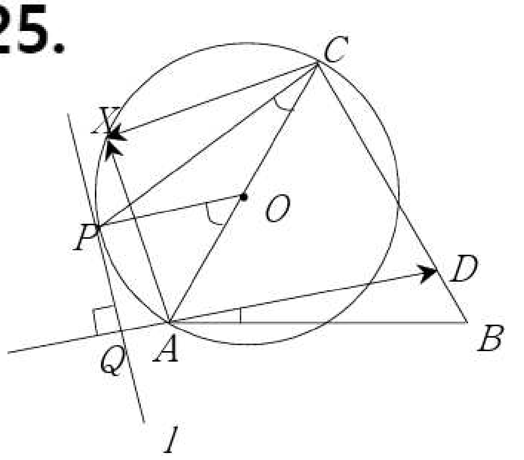
따라서 $M=6\sqrt{3}$이므로 $M^2=108$

25. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DAB} = \dfrac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle \mathrm{ACP} = \dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(2011학년도 수능 가형 22번)

25.



$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ …㉠

세 점 A, C, D는 고정된 점이므로

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다.

따라서, ㉠에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$의 값이 최소가 되어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$

이고, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은 상수이므로

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 최소이어야 한다.

그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선이 원과 접할 때의 접점을 P라 하면

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta \geq |\overrightarrow{AP}|\cos\theta$

$=-|\overrightarrow{AQ}|$

이때, $\angle POA=\angle OAD=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{15}=\dfrac{4}{15}\pi$

이므로

$2\angle ACP=\angle AOP$에서

$\angle ACP=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{15}\pi=\dfrac{2}{15}\pi$

$\therefore\ p+q=15+2=17$

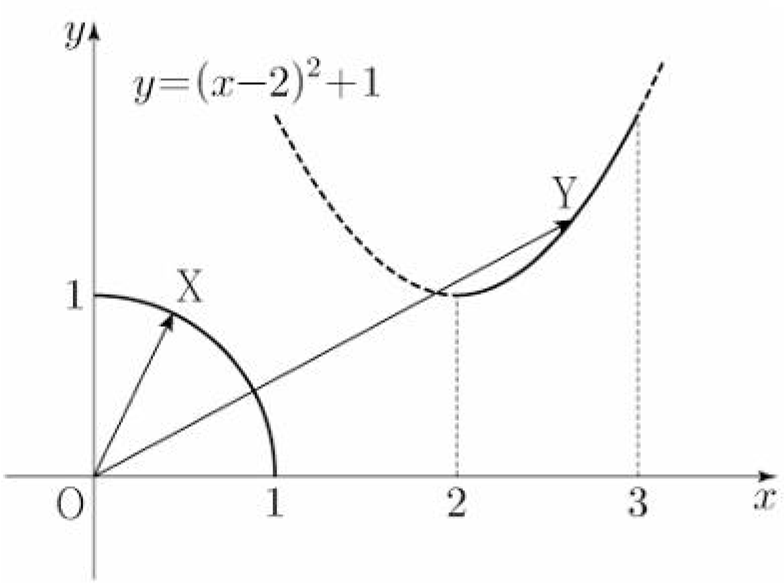
답 17

26. 좌표평면 위에 두 점 A(1, 0), B(0, 1)이 있다. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직이는 점 X와 함수 $y=(x-2)^2+1\,(2 \le x \le 3)$의 그래프 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R라 하자. 점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $16-2\sqrt{5}$　② $16-\sqrt{5}$　③ 16
④ $16+\sqrt{5}$　⑤ $16+2\sqrt{5}$



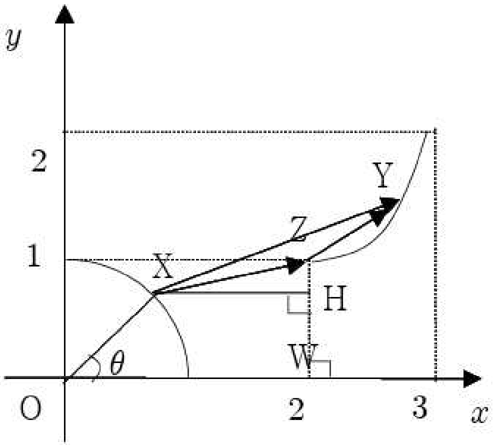
(2020학년도 9월 가형 19번)

26. 정답풀이 :

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}$

$=\overrightarrow{XY}$ ……㉠

선분 OX가 x축과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 포물선 $y=(x-2)^2+1$의 꼭짓점을 $Z(2,1)$이라 하고 점 Z에서 x축에 내린 수선의 발을 W, 점 X에서 선분 ZW에 내린 수선의 발을 H라 하자.



이때, ㉠에서

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XZ}+\overrightarrow{ZY}$ ……㉡

한편 점 X의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이므로

$\overline{XH}=2-\cos\theta$

$\overline{ZH}=1-\sin\theta$

그러므로

$\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{OZ'}$ ……㉢

인 점 Z′의 좌표는 $(2-\cos\theta, 1-\sin\theta)$이다.

이때,

$2-\cos\theta=x$, $1-\sin\theta=y$라 하면
$\cos\theta=2-x$, $\sin\theta=1-y$

이므로

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

이때, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이므로

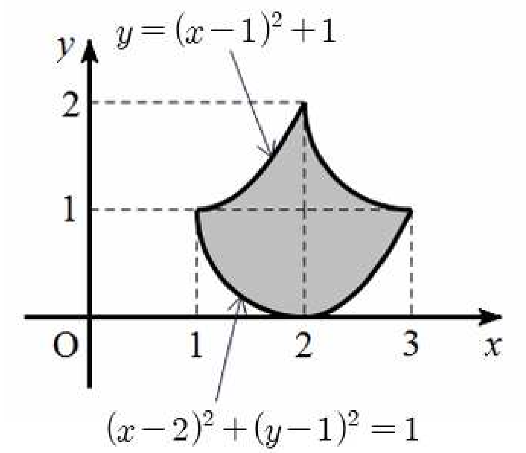
$1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$

그러므로 점 Z′은 중심이 $(2, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 중 $1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$인 점이다.

㉡과 ㉢에서

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OZ'}+\overrightarrow{ZY}$

이므로 점 P가 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분이다.



점 P가 점 $(3, 1)$일 때, 선분 OP의 길이가 최대이므로

$M=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

또, 점 $C(2, 1)$에 대하여 점 P가 선분 OC와 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$이 만나는 점일 때 선분 OP의 길이가 최소이므로

$m=\overline{OP}-1$

$=\sqrt{2^2+1^2}-1$

$=\sqrt{5}-1$

따라서

$M^2+m^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{5}-1)^2$

$=16-2\sqrt{5}$

정답 ①