기·출·의 파·급·효·과

수학Ⅱ(상) 워크북

수학Ⅱ(상)
워크북

기출의 파급효과

수학Ⅱ(상)

저자의 말

1. 기출의 파급효과에는 수학II 기출을 푸는 데 필수적인 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

1년 동안 열심히 공부한 학생이 현장에서 평가원 문제를 틀리는 이유는 개념이 부족해서가 아니라, 조건이 필연적으로 요구하는 태도와 도구가 없기 때문입니다. 따라서 각 Chapter를 교과서 목차를 따르지 않고 기출을 푸는데 필요한 태도와 도구를 바탕으로 작성했습니다.

2. 분권의 이유

'미적분도 아니고 수학II 수준에서 분권이 필요할 정도의 분량이 나올 수 있나?' 하는 의문이 들 수도 있습니다. 분권에는 크게 두 가지 이유가 존재하는데,

(1) 필수적이지만 교과서에는 없는 Chapter의 존재

〈Chapter 3. 다양한 정리와 함수의 극대, 극소〉, 〈Chapter 4. 다항함수, 대칭성〉, 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉, 〈Chapter 10. 복합적 개념이 포함된 킬러 문항〉 다섯 개의 챕터는 교과서에 없지만 중요한 태도와 도구를 정리한 챕터입니다.

특히 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉는 저학년 과정에서 모두 배우는 내용이지만 방정식, 항등식, 부등식, 합성함수, 역함수의 대강의 '느낌'만 가진 채 실제 문제에서 '어떻게' 처리해야 하는지 모르는 학생이 많아 독립된 챕터를 구성했습니다. 따라서 실제 수학II 교육과정에서 직접적으로 다루는 내용보다 훨씬 많은 내용을 다룹니다.

(2) 자세한 해설

기출 해설을 정말 자세히 썼습니다.

어떤 조건부터 적용해야 하는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 할 수밖에 없는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 하면 안 되는지,
여기서 왜 식으로 풀어야 하는지,
여기서 왜 그래프로 풀어야 하는지에 관한 내용을 다 담았습니다.

'딱딱하고', '불친절하게' 해설하면 분량은 많이 줄일 수 있겠으나, 그 경우 '기출의 파급효과'를 선택하는 의미가 퇴색되죠. 진정한 기출 분석은 위와 같은 질문에 모두 답할 수 있게끔 공부하는 것이기에 최대한 해설을 자세하게 썼습니다.

따라서 위의 두 가지 이유로 불가피하게 분권하게 되었습니다. 추천하는 것은 상하권을 순차적으로 학습하는 것이지만 본인이 어느 한 권에 해당하는 내용에는 자신이 있으면 다른 한 권만 공부하셔도 됩니다.

3. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다. 예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

4. 선별 문항

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다. 이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. **기출의 파급효과 수학Ⅱ에는 평가원, 교육청, 사관학교, 경찰대 기출 중 가장 핵심이 되는 168문제를 담았습니다.** 경찰대 문제는 매우 적습니다. **수학Ⅱ(상) 98문제, 수학Ⅱ(하) 70문제입니다.**

※ 문제 좌표에서 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 나형' 또는 'A형' 또는 '인문계' 기출입니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 워크북 전자책도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 워크북은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 **워크북 수학Ⅱ(상) 180문제, 워크북 수학Ⅱ(하) 135문제**로 구성되어 있습니다. 워크북의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

본권과의 호환성을 위하여 워크북에 담긴 기출 역시 본권의 목차를 따릅니다. **본권 학습을 하면서 워크북도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** 본권을 잘 학습하셨다면 워크북에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

본권을 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다.
본권만으로도 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 본권과 워크북을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

파급의 기출효과

cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다. 기출의 파급효과 시리즈는 국어, 수학, 영어, 물리학 1, 화학 1, 생명과학 1, 지구과학 1, 사회·문화가 예정되어 있습니다.

준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다.

'꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다.
단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.

교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

기출의 파급효과 팀 소속 오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

Chapter 03

다양한 정리와 함수의 극대, 극소

유제

01 05학년도 6월 평가원 가형 17번

다음은 구간 $(0, 1)$에서 두 함수

$f(x)=x^3-2x^2+4x-4$와 $g(x)=x^2-2x-3$의 그래프가 오직 한 점에서 만남을 증명한 것이다.

> <증명>
> $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
> $h(x)=x^3-3x^2+6x-1$은 모든 실수 x에 대하여 연속이다.
> $h(0) \cdot h(1)$ $\boxed{\text{(가)}}$ 0 이므로, 사잇값의 정리에 의해 방정식 $h(x)=0$은 0과 1 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
> 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)$ $\boxed{\text{(나)}}$ 0 이므로
> $h(x)$는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.
> 따라서 $h(x)=0$은 0과 1 사이에서 오직 하나의 실근을 갖게 된다. 즉, 구간 $(0, 1)$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	<	>	증가함수
②	<	>	감소함수
③	<	<	감소함수
④	>	<	감소함수
⑤	>	>	증가함수

02 08년 4월 교육청 가형 23번

두 함수 $f(x)=x^5+x^3-3x^2+k$,

$g(x)=x^3-5x^2+3$에 대하여 구간 $(1, 2)$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

03 11학년도 6월 평가원 가형 16번

다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge 0) \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$$

라고 하자. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

> <보 기>
> ㄱ. $f(0)=g(0)$
> ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 미분 가능하다.
> ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 18학년도 경찰대 24번

$1 \leq k < l < m \leq 10$인 자연수 k, l, m에 대하여 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = (x+1)kx^l(x-1)^m$$

일 때, $x=0$에서 $f(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 순서쌍 (k, l, m)의 개수를 구하시오. [4점]

05 23학년도 사관 10번

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$이다.
(나) 부등식 $xf'(x)>0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $1<x<3$이다.

① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$

06 24학년도 사관 19번

x에 대한 방정식

$$x^3 - \frac{3n}{2}x^2 + 7 = 0$$

의 1보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

CHAPTER

03 해설

01 05학년도 6월 평가원 가형 17번

답 : ①

각각의 문장에 번호를 부여하여 해설하겠다.

1. **$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)=x^3-3x^2+6x-1$은 모든 실수 x에 대하여 연속이다.**

   $f(x), g(x)$라는 함수를 독립적으로 생각하면 교점을 따지기 까다로운 관계로 문제는 차이함수를 설정하였다. 차이함수는 〈Chapter 5. 도함수의 활용〉 - 차이함수 파트에서 자세히 배운다.

$f(x)$와 $g(x)$의 교점 $\leftrightarrow$ $h(x)=f(x)-g(x)=0$의 실근

2. **$h(0)\cdot h(1)$ $\boxed{(가)}$ 0 이므로, 사잇값의 정리에 의해 방정식 $h(x)=0$은 0과 1 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.**

   $h(0)=-1$, $h(1)=3$이므로 $h(0)h(1)<0$

   사잇값 정리를 생각하자.

   (가)에는 '$<$'이 들어간다.

3. **모든 실수 x에 대하여 $h'(x)$ $\boxed{(나)}$ 0 이므로 $h(x)$는 $\boxed{(다)}$ 이다.**

   $h'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3$

   $h'(x)>0$이므로 $h(x)$는 증가함수다.

   (나)에는 '$>$'이 들어가고 (다)에는 증가함수가 들어간다.

4. **따라서 $h(x)=0$은 0과 1 사이에서 오직 하나의 실근을 갖게 된다. 즉, 구간 $(0, 1)$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.**

   $h(x)$가 증가함수이므로 2번 문장의 '적어도 하나의 실근'이 '오직 하나의 실근'으로 바뀌어서 서술된다.

comment

'특정 구간에서 두 함수의 교점의 존재성을 판단하는 도구'를 알려준다는 점에서도 좋은 문항이고, '사잇값 정리의 적용'을 연습하기에도 좋은 문항이다.

02 08년 4월 교육청 가형 23번

답 : 36

1. **'구간 $(1, 2)$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 적어도 하나의 실근을 갖도록'**을 보고 아무 생각 없이 사잇값 정리를 적용하면 안 된다.

   $f(x)-g(x)=h(x)$라 할 때, 연속함수 $h(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 증가구간과 감소구간을 모두 가진다면 $h(1)h(2) \geq 0$이어도 방정식 $h(x)=0$이 구간 $(1, 2)$에서 실근을 가질 가능성이 존재하기 때문이다.

   따라서 Chapter 3 본문을 충실히 공부한 학생이라면, 사잇값 정리를 쓰기 전에 함수 $h(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 증가하는지, 혹은 감소하는지, 혹은 증가·감소구간이 모두 존재하는지부터 파악해야 한다.

   $h(x)=f(x)-g(x)=x^5+2x^2+k-3$
   $h'(x)=5x^4+4x=5x\left(x^3+\dfrac{4}{5}\right)$

   방정식 $h'(x)=0$의 실근은 0과 $-\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$ 뿐이므로 $1<x<2$에서 $h'(x)>0$이다.

   따라서 $h(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가한다. 사잇값 정리를 사용해도 좋다.
   (이러한 사고과정 없이 사잇값 정리만 쓰면 안 된다!)

2. 사잇값 정리에 의해 $h(1)h(2)<0$이면 방정식 $h(x)=f(x)-g(x)=0$은 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

   $h(1)=k$, $h(2)=k+37$이므로 $k(k+37)<0$이다. $\therefore -37<k<0$
   따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 $(-1)-(-36)+1=36$이다.

※ **x에 관한 부등식 $a \leq x \leq b$를 만족하는 정수 x의 개수 (단, a, b는 정수) :** $b-a+1$

부등식에서 등호가 없을 때는, 등호가 있을 때로 바꾼 다음 공식을 적용하면 된다. 예를 들어, $a<x<b$를 만족하는 정수 x의 개수는 $a+1 \leq x \leq b-1$을 만족하는 정수 x의 개수와 같으므로 $(b-1)-(a+1)+1=b-a-1$이다.

03 11학년도 6월 평가원 가형 16번

답 : ⑤

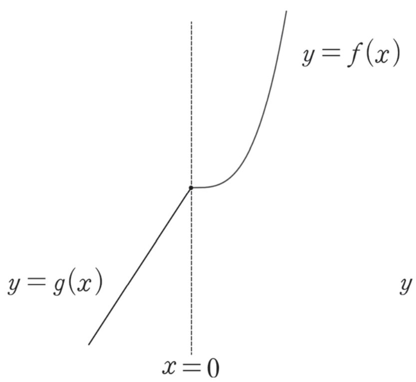
1. $h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $h(0-)=h(0+)=h(0)$이다.
따라서 $f(0)=g(0)$이다. (O)

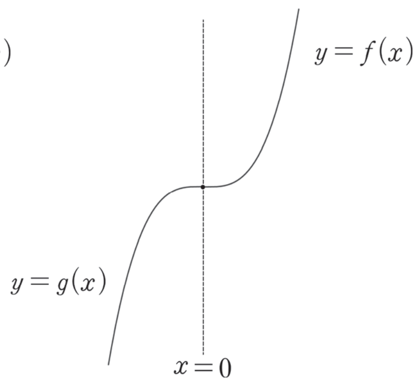
2. **〈Chapter 1〉의 〈구간에 따라 정의된 함수의 연속성과 미분가능성〉**에서 배운 내용이다.
미분계수의 정의를 사용할 필요 없이 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $f(x), g(x)$ 모두 미분가능하므로 $h(x)$가 미분가능할 조건은 $f'(0)=g'(0)$이다. (O)

3. $f'(0)g'(0) \le 0$이 아닌 $f'(0)g'(0) < 0$으로 제시한 이유를 생각해보자. 우리는 항상 학생의 입장이 아닌 출제자의 입장에서 생각해야 한다.

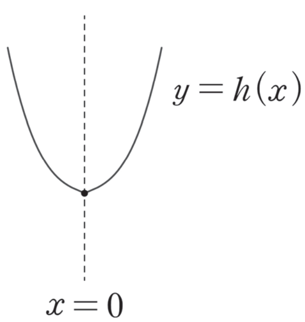
평가원 문항 속 모든 정보는 의도된 것이다. 아무리 사소해 보이는 조건이라도 그 속에는 전부 의미가 담겨있고, 그러한 의미를 낱낱이 파헤치는 것이 바로 '기출 분석'이다.

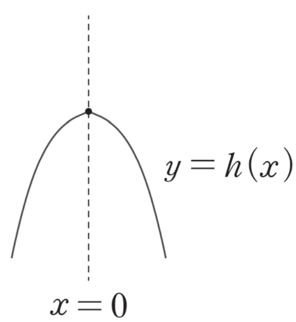
만약 선지 (ㄷ)이 등호를 포함하여 $f'(0)g'(0) \le 0$으로 제시되었다면 (ㄷ)은 틀린 선지가 된다.
아래의 그림과 같이 반례가 존재하기 때문이다.





하지만 (ㄷ)에는 등호가 없으므로 $f'(0)g'(0)<0$이므로 $f'(0)<0$이고 $g'(0)>0$이거나 $f'(0)>0$이고 $g'(0)<0$이다. 전자의 경우 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, 후자의 경우 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. **따라서 $x=0$ 부근에서 $h(x)$의 그래프는 아래와 같고 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다. (O)**





ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

04 18학년도 경찰대 24번

답 : 20

1. $x=0$에서 $f(x)$가 극댓값을 가지도록 해야 한다. **도함수 $f'(x)$의 식이 제시되었으므로 충분히 작은 양수 h 논증을 이용하자.** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지려면 $x=0$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌어야 한다.

   즉, 충분히 작은 양수 h에 대해 $f'(-h)>0$, $f'(h)<0$을 만족해야 한다.

   ① $f'(h)=(1+h)k(h)^l(h-1)^m<0$
   $1+h>0$, $k>0$, $h^l>0$이므로 부등식의 양변을 $(1+h)k(h)^l$로 나누면 $(h-1)^m<0$이다.
   이때, $(h-1)$은 음수이므로 $(h-1)^m<0$을 만족하기 위해 **m은 홀수**이어야 한다.

   ② $f'(-h)=(1-h)k(-h)^l(-h-1)^m>0$
   $1-h>0$, $k>0$, $(-h-1)^m<0$이므로 부등식의 양변을 $(1-h)k(-h-1)^m$으로 나누면 $(-h)^l<0$이다. 이때, $(-h)$는 음수이므로 $(-h)^l<0$을 만족하기 위해 **l은 홀수**이어야 한다.

   ※ h는 충분히 작은 양수이므로 $1-h>0$이다.
   $(-h-1)$은 음수이고 m은 홀수이므로 $(-h-1)^m<0$이다.

2. $1\le k<l<m\le 10$을 만족시키고 l, m이 모두 홀수인 순서쌍 (k, l, m)의 개수를 구하자.
   셋 중 가장 큰 자연수이자 홀수인 m을 기준으로 개수를 헤아리면 가장 간단하다.

   $m=3$인 경우) 없음 (0개)
   $m=5$인 경우) $l=3$이고 $k=1,2$ (2개)
   $m=7$인 경우) $l=5$이고 $k=1,2,3,4$ / $l=3$이고 $k=1,2$ (6개)
   $m=9$인 경우) $l=7$이고 $k=1,2,3,4,5,6$ / $l=5$이고 $k=1,2,3,4$ /
   $l=3$이고 $k=1,2$ (12개)

   따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (k, l, m)의 개수는 20이다.

comment

다른 방식으로 풀 수도 있다. k, l, m은 모두 자연수이므로
$f'(x)=(x+1)kx^l(x-1)^m$는 x축과 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서만 만난다.

즉, $-1<x<0$를 만족하는 임의의 x를 x_1이라 하고, $0<x<1$를 만족하는 임의의 x를 x_2라 할 때, $f'(x_1)>0$, $f'(x_2)<0$이면 $x=0$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양(+)에서 음(-)으로 바뀐다.
따라서 본인에게 편한 아무 숫자를 x_1, x_2로 특정한 다음(예를 들어 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$), 이를 $f'(x)$에 대입하여 부등식을 풀어도 좋다.

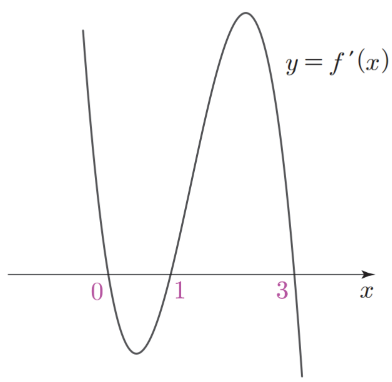
05 23학년도 사관 10번

답 : ②

1. 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 조건 (나)를 만족시킬 수 없으므로,
사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.

부등식 $xf'(x)>0$의 해는 $x<0$에서 $f'(x)<0$이고 $x>0$에서 $f'(x)>0$의 해와 동일하므로, 부등식 $xf'(x)>0$의 해가 $1<x<3$이라는 것은
$x<0$에서 $f'(x)<0$이고 $x>0$에서 $f'(x)>0$을 만족시키는 x가 $1<x<3$이라는 것이다.

따라서 $y=f'(x)$는 $x<0$에서 양수, $0<x<1$에서 음수, $1<x<3$에서 양수, $x>3$에서 음수
이므로 그래프 개형은 아래와 같다.



따라서 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $f'(x)=4ax(x-1)(x-3)$ $(a<0)$이다.

2. $f'(4)=48a=-24$에서 $a=-\frac{1}{2}$이고,
$\int_0^2 f'(x)dx = f(2)-f(0)=f(2)-2=\int_0^2 -2x(x-1)(x-3)dx$이고,
$\int_0^2 -2x(x-1)(x-3)dx=-2\int_{-1}^1 (x+1)x(x-2)dx=-4\int_0^1 -x^2dx=\frac{4}{3}$이다.
따라서 $f(2)=\frac{10}{3}$이다.

06 24학년도 사관 19번

답 : 12

1. $f(x)=x^3-\frac{3n}{2}x^2+7$이라 하자. $f'(x)=3x^2-3nx=3x(x-n)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 7, $x=n$에서 극솟값 $7-\frac{n^3}{2}$을 갖는다.

2. 방정식 $f(x)=0$ 의 1 보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2 가 되기 위해서는

$f(1)>0 \Rightarrow n<\frac{16}{3}$, 극솟값 $7-\frac{n^3}{2}<0 \Rightarrow n \geq 3 > \sqrt[3]{14}$ 가 성립하여야 하므로

이를 만족시키는 모든 자연수 n 의 값은 3 , 4 , 5 이다.

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은 12 이다.

※ 열린구간 $(1, n)$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 $f(1)>0$, $f(n)<0$ 이면

열린구간 $(1, n)$에서 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 하나 존재하고,

열린구간 (n, ∞)에서 함수 $f(x)$는 증가하고, $\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$ 이므로 $f(n)<0$ 이면

열린구간 (n, ∞)에서 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 하나 존재한다.