랑데뷰 시리즈 소개

랑데뷰세미나

저자의 수업노하우가 담겨있는
고교수학의 심화개념서

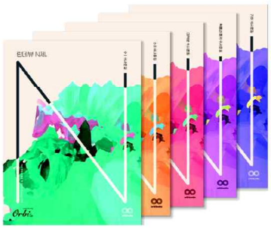
랑데뷰 기출과 변형 (총 5권)

- 1~4등급 추천(권당 약400~600여 문항)

Level 1 - 평가원 기출의 쉬운 문제 난이도
Level 2 - 준킬러 이하의 기출+기출변형
Level 3 - 킬러난이도의 기출+기출변형

모든 기출문제 학습 후 효율적인 복습
재수생, 반수생에게 효율적

<랑데뷰N제 시리즈>



라이트N제 (총 3권)

- 2~5등급 추천

수능 8번~13번 난이도로 구성

총 30회분의 시험지 타입
- 회차별 공통 5문항, 선택 각 2문항
총 11문항으로 구성

독학용 일일학습지
또는 과제용으로 적합

랑데뷰N제 쉬사준킬

- 1~4등급 추천(권당 약 240문항)

쉬운4점~준킬러 문항 학습에 특화
실전개념 및 스킬 등이 포함된
문제와 해설로 구성

기출문제 학습 후 독학용
또는 학원교재로 적합

랑데뷰N제 킬러극킬

- 1~2등급 추천(권당 약 120문항)

준킬러~킬러 문항 학습에 특화
실전개념 및 스킬 등이 포함된
문제와 해설로 구성

모의고사 1등급 또는 1등급 컷에
근접한 2등급학생의 독학용

<랑데뷰 모의고사 시리즈> - 선택 확률과통계, 미적분, 기하 합본

싱크로율 99% 모의고사

제1회 - 6평 싱크로율99%
제2회 - 9평 싱크로율99%
제3회 - 수능 싱크로율99%

1~4등급 추천

싱크로율 99%의 변형문제로 구성되어
평가원 모의고사를 두 번 학습하는 효과

기출 학습의 확인용으로 적합
100분 풀타임 모의고사 연습에 적합

랑데뷰☆수학모의고사 시즌1~3
어썸&랑데뷰 모의고사

1~4등급 추천

매년 8월에 출간되는 봉투모의고사

수능난이도와 비슷하거나 조금 어려운 난이도

실전력을 높이기 위한
100분 풀타임 모의고사 연습에 적합

랑데뷰 시리즈는 **전국 서점** 및 **인터넷서점**에서 구입이 가능합니다.

1. 지수함수와 로그함수

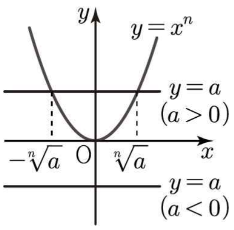
◆ 개념 01 - 거듭제곱근의 뜻

(1) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 $x^n = a$를 만족하는 x를 a의 n제곱근이라 한다. 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(2) 그래프를 이용한 거듭제곱근의 이해

(1) n이 짝수일 때



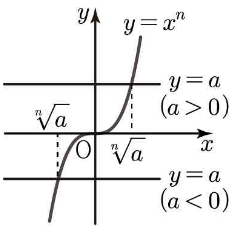
$y=x^n$은 우함수이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

① $a>0$이면 교점이 두 개가 생기고, 교점의 x좌표는 $x=-\sqrt[n]{a}$, $x=\sqrt[n]{a}$이다.

② $a=0$이면 교점이 한 개가 생기고, 교점의 x좌표는 $x=0$이다.

③ $a<0$이면 교점이 없다.

(2) n이 홀수일 때



$y=x^n$은 기함수이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때, a의 값에 관계없이 교점은 단 한 개가 생기고, 교점의 x좌표는 $x=\sqrt[n]{a}$이다.

◆ 개념 02 -거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 양의 정수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ④ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ ⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 양의 정수)

◆ 개념 03 - 지수의 확장

(1) $a \neq 0$이고, n이 자연수일 때 → ① $a^0 = 1$, ② $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(2) $a>0$이고, m은 정수, n은 2 이상의 자연수일 때 →

① $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, ② $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ③ $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

◆ 개념 04 - 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 유리수일 때

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ④ $(ab)^n = a^n b^n$ ⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

[랑데뷰팁] 지수법칙은 지수의 범위를 실수로 확장하여도 성립한다.

[랑데뷰팁]

① a의 n제곱근 : 방정식 $x^n = a$의 근

② n제곱근 a : $\sqrt[n]{a}$

③ $\sqrt[n]{a}$ (a의 n제곱근 중 a와 부호가 같은 실수)

(n제곱근 a)⊂(a의 n제곱근)

④ n제곱근 a는 많아야 1개이지만 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개이다.

[랑데뷰팁]

a의 n제곱근 중 실수인 것을 구하는 방정식 $x^n = a$의 실근을 구하는 것과 같고, 이것은 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 찾는 것과 같다.

[랑데뷰팁]

지수법칙에서 지수 범위의 확장

지수가 정수일 때는 밑이 음수인 경우에도 지수법칙이 성립하지만, 지수가 정수가 아닌 유리수, 실수일 때는 반드시 밑이 양수인 경우에만 지수법칙이 성립한다.

즉, 지수가 정수가 아닌 경우 밑이 음수이면 지수법칙을 적용하지 않는다.

예) 잘못된 계산 :

$\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-3)^{2\times\frac{1}{2}}$

$=(-3)^1 = -3$

옳은 계산 :

$\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3$

(1) 기본문제

1) 2023년 3월 교육청 16

$\log_2 96 - \dfrac{1}{\log_6 2}$의 값을 구하시오.

2) 2024학년도 9월 평가원 7

두 실수 a, b가

$$3a+2b=\log_3 32,\ ab=\log_9 2$$

를 만족시킬 때, $\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{2b}$의 값은?

① $\dfrac{5}{12}$ ② $\dfrac{5}{6}$ ③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{25}{12}$

3) 2022년 7월 교육청

$n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오.

4) 2022학년도 사관학교

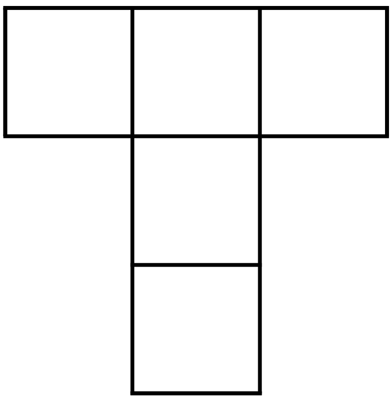
$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

5) 2022학년도 사관학교

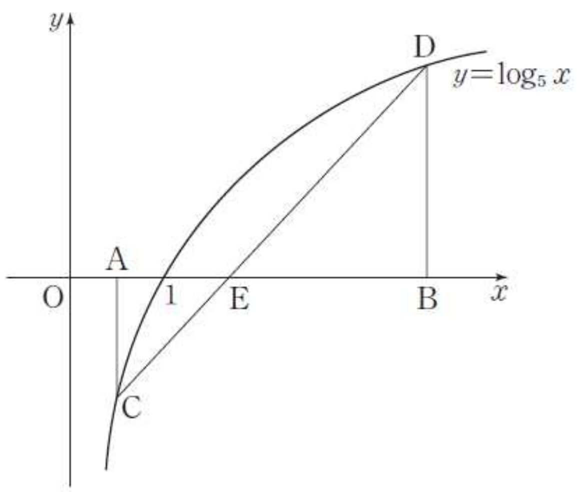
그림과 같은 5개의 칸에 5개의 수 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$을 한 칸에 하나씩 적는다. 가로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합과 세로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합이 15로 서로 같을 때, a의 값은?

① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2 ④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{3}}$



225) 2018년 5월 교육청

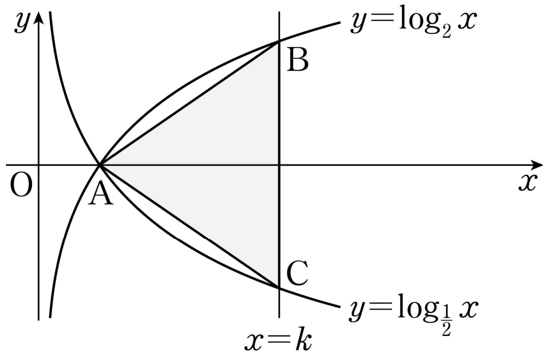
그림과 같이 두 점 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$을 각각 지나고 x축에 수직인 두 직선이 곡선 $y=\log_5 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 선분 CD와 x축이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ACE의 넓이를 S_1, 삼각형 BDE의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 : S_2 = 4 : 9$일 때, $\log_a b$의 값은? (단, $0<a<1<b$)



① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$

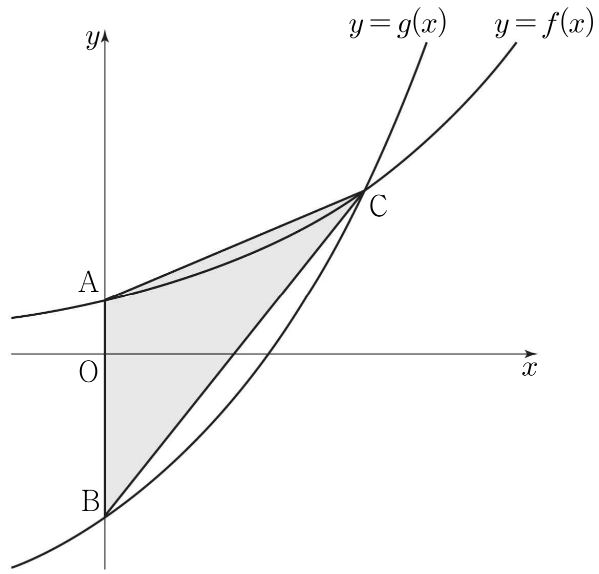
226) 2018년 10월 교육청

그림과 같이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=k\,(k>1)$이 두 곡선과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 무게중심의 좌표가 $(3, 0)$일 때, 삼각형 ACB의 넓이를 구하시오.



227) 2019년 4월 교육청

그림과 같이 두 함수 $f(x)=\frac{2^x}{3}$, $g(x)=2^x-2$의 그래프가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① $\frac{1}{3}\log_2 3$ ② $\frac{2}{3}\log_2 3$ ③ $\log_2 3$

④ $\frac{4}{3}\log_2 3$ ⑤ $\frac{5}{3}\log_2 3$

단원평가

228)

$-\frac{3}{2} \le x \le \frac{1}{2}$에서 함수 $f(x)=3^{x+1} \times \left(\frac{1}{27}\right)^x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m$의 값을 구하시오.

229)

부등식 $1+\log_2|x-3| \le \log_2(x-3)^2$을 만족시키는 10보다 작은 자연수 x의 개수를 구하시오.

230)

등식

$$\left(\frac{x^2}{5}\right)^{\log_5 x} = (25x^5)^{\log_x 5}$$

를 만족시키는 모든 실수 x의 곱은?

① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

231)

함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$ 와 5이하의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 정수 k의 값은?

$\sqrt{2}^{f(n)}$이 유리수가 되는 값들을 모두 곱한 값이 1024이다.

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

232)

두 함수 $f(x)=a^{x-1}$, $g(x)=\log_a x+1$의 교점을 A, B라 하자. 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이고 A, B의 중점의 좌표가 $(2, 2)$일 때, a^2의 값을 구하시오

233)

자연수 n에 대하여

$f(n)=\begin{cases} 2^{-n+6}-3 & (2 \le n \le 6) \\ (n-6)^2-2 & (n>6) \end{cases}$일 때, $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자.

$\sum_{n=2}^{9} g(n)$의 값을 구하시오.

111) 정답 ④

곡선 $y=a^x$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=\log_a x$이고 이 곡선이 점 $(2, 3)$을 지나므로 $x=2$, $y=3$을 대입하면 $3=\log_a 2$

따라서 $a=\sqrt[3]{2}$

[다른 풀이]

직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=a^x$의 역함수의 그래프이므로 지수함수 $y=a^x$에 $x=3$, $y=2$를 대입하면 등식이 성립한다.

따라서 $2=a^3$에서 $a=\sqrt[3]{2}$

112) 정답 ①

두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(2^n-x)$의 만나는 점의 x좌표는 $\log_2 x=\log_2(2^n-x)$에서 $x=2^n-x$

즉, $x=2^{n-1}$이므로 $a_n=2^{n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}2^{n-1}$

$=1+2+4+8+16=31$

113) 정답 13

점근선이 $x=5$이므로 $a=5$

$f(11)=\log_6(11-5)+b=9$이므로 $b=8$

따라서 $a+b=13$

114) 정답 ②

곡선 $y=a^x\ (a>1)$과 직선 $x=1$의 교점의 좌표는 $\mathrm{A}(1,\ a)$이고,

곡선 $y=\log_a(x-a)+1$과 직선 $y=1$의 교점의 좌표는 $\mathrm{B}(a+1,\ 1)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+(1-a)^2}=\sqrt{13}$이므로

$a=3$

115) 정답 2

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $f(x)=2^{x-m}$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$위에 있고, 교점 중 한 점의 x좌표가 4이므로 그 교점의 좌표는 $(4, 4)$이다.

$f(4)=2^{4-m}=4$이므로 $4-m=2$

따라서 $m=2$

116) 정답 ②

$a>0$에서 $0<2^{-\frac{2}{a}}<1$이므로 $1-2^{-\frac{2}{a}}>0$이다.

$$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)}{Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)}=\frac{1-\left(2^{-\frac{2}{a}}\right)^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$

$$=\frac{\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)\left(1+2^{-\frac{2}{a}}\right)}{1-2^{-\frac{2}{a}}}=1+2^{-\frac{2}{a}}$$

$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$에서 $1+2^{-\frac{2}{a}}=\frac{3}{2}$

$2^{-\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}=2^{-1}$

$-\frac{2}{a}=-1$에서 $a=2$

[다른 풀이]

$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$에서 $2Q(4)=3Q(2)$

$2Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)=3Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)$

$2^{-\frac{2}{a}}=t$로 놓으면 $a>0$이므로 $0<t<1$이다.

$2(1-t^2)=3(1-t)$

$2(1-t)(1+t)=3(1-t)$

$2(1+t)=3$

$t=\frac{1}{2}$

즉 $2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$

$-\frac{2}{a}=-1$에서 $a=2$

117) 정답 ②

$f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$에서

(ⅰ) $\frac{3}{a}>1$, 즉 $0<a<3$일 때,

함수 $f(x)$는 증가함수이므로 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$f(2)=\left(\frac{3}{a}\right)^2=4$에서 $a^2=\frac{9}{4}$

$a=\pm\frac{3}{2}$

$0<a<3$이므로 $a=\frac{3}{2}$

(ii) $\frac{3}{a}=1$, 즉 $a=3$일 때,

$f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 4가 아니다.

(iii) $0<\frac{3}{a}<1$, 즉 $a>3$일 때,

함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $x=-1$에서 최댓값을 갖는다.

$f(-1)=\left(\frac{3}{a}\right)^{-1}=\frac{a}{3}=4$ 에서

$a=12$

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{3}{2}\times 12=18$

118) 정답 ③

$y=\log_2 2(x-2)+3$

$=\log_2 2+\log_2(x-2)+3$

$\log_2(x-2)+4$

의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$이다.

그런데 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 점근선도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동된다.

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

119) 정답 ③

함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)+5$는 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그함수이므로 주어진 구간에서 감소한다. 따라서 최대값은 $f(1)=\log_{\frac{1}{2}}4+5=(-2)+5=3$

120) 정답 ④

함수 $y=5-\log_2(x+a)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$이므로 $a=3$

이 그래프가 점 $(-1,k)$를 지나므로

$k=5-\log_2(-1+3)=5-1=4$

$\therefore a+k=7$

121) 정답 21

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$은 감소함수이므로

닫힌구간 $[2,3]$에서 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.

$f(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{4-a}=27$

$3^{a-4}=3^3$

$a=7$

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-7}$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2,3]$에서 $x=3$일 때 최솟값을 가지므로

$m=f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{6-7}=3$

따라서 $a\times m=7\times 3=21$

122) 정답 ③

$f^{-1}(x)=\log_3(x-k)+1$이므로

$g(x)=\log_3(x-k^2-k)+1$이다.

곡선 $y=f(x)$의 점근선은 $y=k$이고

곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $x=k^2+k$이다.

두 점근선의 교점의 좌표는 $(k^2+k,\ k)$이고

직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위에 있으므로 $k=\frac{1}{3}(k^2+k)$

따라서 $k>0$이므로 $k=2$

123) 정답 2

$3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$에서 $3^{x-8}=(3^{-3})^x$, $3^{x-8}=3^{-3x}$

$x-8=-3x$, $4x=8$

$\therefore\ x=2$

124) 정답 3