TABLED

미적분

표에 정리한 필수 수능 개념을 문제에 무한히 적용해 체화합니다

자료 · 수업 문의 : https://open.kakao.com/o/spDyOV7f

TABLED 미적분

01. 수열의 수렴

[01] $n \to \infty$ 수렴한다의 정의 ········ 1p
[02] 등비수열이 포함된 수열의 극한 ········ 1p
[03] 수열의 극한으로 정의된 함수 ········ 1p

02. 급수의 2가지 유형

[01] 일반항 a_n을 통한 급수의 조사 ········ 2p

03. 덧셈정리

[01] tan 와 sin, cos 의 관계 ········ 3p
[02] 덧셈정리 표 ········ 3p
[03] 덧셈정리 인수분해 ········ 3p
[04] 배각 공식 ········ 3p

04. 수렴단위

[01] 무리수 e ········ 4p
[02] 수렴단위의 이해 ········ 4p
[03] 수렴단위의 다항함수로의 인식 ········ 4p
[04] 수렴단위의 사칙연산 ········ 5p
[05] 수렴단위의 미분계수 해석 ········ 5p

05. 다양한 도함수

[01] 기본 도함수 공식 ········ 6p
[02] 로그식 조작 미분 ········ 7p

06. 인수논리의 확장

[01] 다항식의 기본 인수논리와 그래프에의 적용 ········ 8p
[02] 초월함수의 인수논리 ········ 8p
[03] 수렴단위와 인수논리의 비교 ········ 9p

07. 점근선의 이해

[01] 점근선의 종류 ········ 10p
[02] 원함수의 도함수의 점근선 관계 ········ 10p
[03] 가로 점근선의 제작 ········ 11p
[04] 세로 점근선의 제작 ········ 11p
[05] $f'(x)=0$의 근이 존재하는 역함수의 미분계수 ········ 12p
[06] $\ln|f(x)|$의 세로 점근선 조사 ········ 12p

08. 극점의 우회적 판단

[01] 극점의 판단 ········ 13p
[02] 극점의 우회적 판단 도구 ········ 13p

09. 볼록성

[01] 볼록성의 정의 ········ 14p
[02] 평균변화율과 변곡점의 관계 ········ 14p
[03] 변곡점 조사 타이밍 ········ 15p
[04] 접선의 개수 변화 경계 ········ 15p

10. 사칙연산으로 구성된 함수

[01] 초월함수의 힘의 비교 ········ 16p
[02] 인수가 존재하는 경우의 그래프 ········ 16p
[03] 인수가 존재하지 않는 경우의 그래프 ········ 16p
[04] 삼각함수가 포함되어 있는 경우 함수의 그래프 ········ 17p
[05] 함수의 대칭성 파악 ········ 18p
[06] 분모가 1차식인 분수꼴 함수의 해석 ········ 18p

11. 합성함수의 분석

[01] 합성함수의 구성 ········ 19p
[02] 합성함수의 모든 극점 ········ 19p
[03] 합성함수의 대칭성 ········ 20p
[04] 미분없이 합성함수 스케치 ········ 20p

TABLED 미적분

12. 다중변수의 미분

[01] 미적불식과 미적가식 ··························· 21p
[02] 흔적 남기기 미분 ······························ 21p
[03] 함수의 표현 유의점 ··························· 22p
[04] 다중변수 미분 매뉴얼 ························· 22p

13. 역함수의 미분

[01] x와 y의 관계 ··································· 23p
[02] 역함수 문제 유형 ····························· 23p
[03] 역함수의 미분계수 구하기 ···················· 24p
[04] 계산 유형-역함수 항등식 ······················ 24p
[05] 계산 유형-대칭관계인 점에서의 미분계수 24p
[06] 그래프 해석 유형-미분계수의 범위 ··········25p
[07] 그래프 해석 유형-역함수 관계인 두 함수의 교점 ······································· 25p
[08] 그래프 해석 유형-역대응으로 정의된 x좌표 함수 ······································· 26p

14. 미분가능성

[01] 미분계수와 인수논리 ························· 27p
[02] 미분가능성 확인 도구 ························ 27p
[03] 구간별로 정의된 함수의 인수논리와 미분가능성 ······································· 27p
[04] 곱함수의 미분가능성 ························· 28p
[05] 합/차 함수의 미분가능성 ····················· 28p
[06] 몫함수가 미분가능한 조건 ···················· 28p
[07] 관찰 vs 식의 계산 ···························· 29p
[08] 합성함수의 연속성 ···························· 30p
[09] 합성함수의 미분가능성 매뉴얼 ··············· 30p
[10] 합성함수의 미분가능성 확인 도구 ··········31p
[11] 합성함수의 미분가능성 전수조사 ···········32p

15. 도형급수

[01] 도형급수의 대전제 ···························· 33p
[02] 도형급수 문제 유형 ··························· 33p
[03] 도형급수 매뉴얼 ······························ 34p
[04] 도형급수 유의 사항 ··························· 34p

16. 도형극한

[01] 도형극한과 도형급수의 차이점 ···············35p
[02] 도형극한 매뉴얼 ······························ 35p
[03] 문제에서 요구하는 극한식에 대한 관찰·· 36p
[04] 도형극한 유의사항 ····························36p

TABLED 미적분

17. 부정적분

[01] 암기 부정적분 공식 37p
[02] 인식 부정적분 도구 38p
[03] 다항 분수식의 부정적분 39p
[04] 곱함수 적분의 도구 선택 40p
[05] 치환 적분 40p
[06] 치환 적분 매뉴얼 41p
[07] 부분 적분 사용 타이밍 41p
[08] 테이블 적분법 42p
[09] 정적분으로 표현된 함수 용어 정리 43p
[10] 투명 함수의 조건과 조작 매뉴얼 44p
[11] 투명 함수의 풀이 선택 44p
[12] 합성 투명 함수의 이해 45p
[13] 다중 변수 피적분 함수의 이해 46p
[14] 미적가식의 적분 표현 47p

18. 정적분

[01] 정적분은 직사각형의 합의 극한 48p
[02] 급수의 정적분화 49p
[03] 정적분의 부호 49p
[04] 적분 구간의 조작 50p
[05] 정적분과 넓이의 비교 51p
[06] 정적분의 넓이 명령어 51p
[07] 피적분 함수가 선대칭/점대칭인 경우의 정적분 52p
[08] 선대칭한 함수의 정적분 53p
[09] 주기 함수의 정적분 53p
[10] 함수의 x축 방향으로의 확대/축소 54p
[11] 롤의 정리의 도함수에서의 의미 54p
[12] 다항함수의 넓이 값 55p
[13] 삼각함수의 넓이 값 56p
[14] 지수,로그 함수의 넓이 값 56p
[15] 역함수가 포함된 정적분 57p
[16] 입체도형의 부피 57p
[17] 움직인 거리 (곡선의 길이) 58p

07. 점근선의 이해

[01] 점근선의 종류

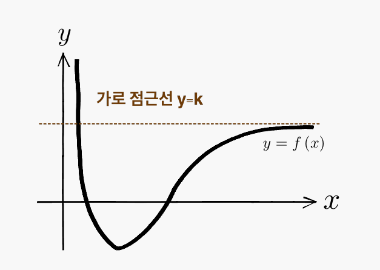
세로 점근선은 함수의 정의역이 제한되어 있는 경우, 존재할 가능성이 있는 점근선이다. 단, 정의역이 제한되어 있는 모든 지점에서 세로 점근선을 가지는 것은 아니다.

가로 점근선은 함숫값이 특정 값으로 수렴하는 경우 존재할 가능성이 있는 점근선이다. 단, 함숫값이 특정 값으로 수렴한다고 해서 반드시 가로 점근선을 가지는 것은 아니다.

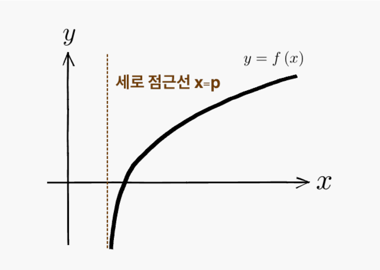
함수 $\mathrm{f(x) = h(x) + (ax + b)}$ 이고, $\mathrm{h(x)}$가 특정 값으로 수렴하는 경우, 함수 $\mathrm{f(x)}$의 그래프는 발산하지만, 그래프의 개형이 $\mathrm{ax + b}$ 를 점근하는데, 이를 **일차함수 점근선**이라고 한다.

점근선의 종류

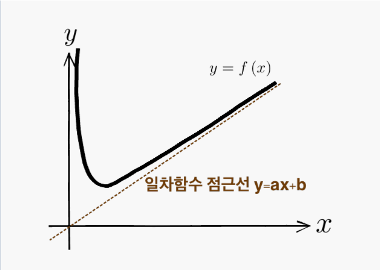
세로 점근선	$\lim\limits_{\mathrm{x \to a}} \mathrm{f(x)} = \pm\infty$ 인 경우, $\mathrm{f(x)}$가 $\mathrm{x = a}$ 근처에서 그리는 곡선은 $\mathrm{x = a}$ 로 점근한다.
가로 점근선	$\lim\limits_{\mathrm{x \to \pm\infty}} \mathrm{f(x) = k}$ 인 경우, $\mathrm{f(x)}$가 $\mathrm{y = k}$ 근처에서 그리는 곡선은 $\mathrm{y = k}$ 로 점근한다.
일차함수 점근선	$\mathrm{f(x) = g(x) + (ax + b)}$ 이고, $\lim\limits_{\mathrm{x \to \pm\infty}} \mathrm{g(x)} = 0$ 인 경우, $\mathrm{f(x)}$ 는 일차함수에 점근한다.



가로 점근선



세로 점근선



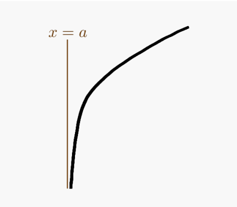
일찰함수 점근선

[02] 원함수와 도함수의 점근선 관계

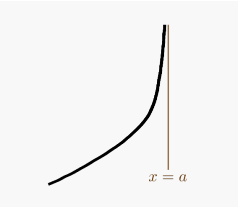
가로 점근선과 세로 점근선의 원함수와 도함수의 관계를 학습한다. 일반적으로 다음 명제들의 역의 성립 여부는 생각하지 않아도 좋지만, 세로 점근선 명제의 역은 성립하지 않는다. 대표적 반례로 $y = \sqrt{x}$ 가 있다.

원함수와 도함수의 점근선 관계

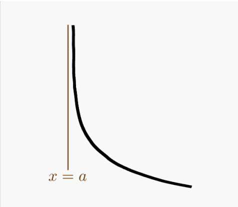
가로 점근선	$\lim\limits_{\mathrm{x \to \pm\infty}} \mathrm{f(x) = k}$ 인 경우, $\lim\limits_{\mathrm{x \to \pm\infty}} \mathrm{f'(x)} = 0$ 이다.
세로 점근선	$\lim\limits_{\mathrm{x \to a}} \mathrm{f(x)} = \pm\infty$ 인 경우, $\lim\limits_{\mathrm{x \to \pm\infty}} \mathrm{f'(x)} = \pm\infty$ 이다.



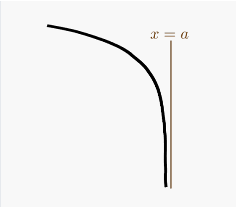
$\lim\limits_{\mathrm{x \to a+}} \mathrm{f(x)} = +\infty$



$\lim\limits_{\mathrm{x \to a-}} \mathrm{f(x)} = +\infty$



$\lim\limits_{\mathrm{x \to a+}} \mathrm{f(x)} = -\infty$



$\lim\limits_{\mathrm{x \to a-}} \mathrm{f(x)} = -\infty$

07. 점근선의 이해

[03] 가로 점근선의 제작

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$ 인 경우 함수 $f(x)$는 가로 점근선을 가진다. 가로 점근선이 존재하는 함수의 대표적인 예시들은 다음과 같다.

가로 점근선의 제작

다항분수식	$f(x) = \frac{2x^2+4x+2}{x^2+3}$	$f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{2x^2+2x+1}$
지수분수식	$f(x) = \frac{2^{x+1}+3}{2^x}$	$f(x) = \frac{2^x-1}{3^{x+2}+3}$
$\infty - \infty$ 꼴	$f(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+1}$	
지수식	$f(x) = e^x$	$f(x) = 3^{-x}$

[04] 세로 점근선의 제작

분수식에서 ① **분모의 인수이고, 분자의 인수와 약분되지 않거나 수렴 단위가 아닌 모든 인수의 해**는 모두 세로 점근선을 제작한다. 초월함수의 간접 인수 또한 포함한다. 또한 ② **함수 $\ln|f(x)|$의 $f(x)=0$의 모든 실근**은 세로 점근선을 제작한다.

세로 점근선의 제작

예시	세로 점근선의 조사
$f(x) = \frac{x^2+3x}{\sin \pi x}$	$\sin x$ 는 $(x), (x+1), (x+2)..$를 인수로 가진다. 분자는 $(x), (x+3)..$를 인수로 가지기 때문에 함수 $f(x)$는 $x=-3, 0$을 제외한 모든 정수에서 세로 점근선을 가진다.
$f(x) = \frac{x^2+x+4}{\sin \pi x}$	$\sin x$ 는 $...(x), (x+1), (x+2)...$를 인수로 가진다. 분자는 인수가 없기 때문에 함수 $f(x)$는 모든 정수에서 세로 점근선을 가진다.
$f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+2}$	분모는 $(x+2)$를 인수로 가진다. 분자는 인수가 없기 때문에 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 에서 세로 점근선을 가진다.
$f(x) = \ln|x^2-5x+4|$	x^2-5x+4 는 $(x-1), (x-4)$ 를 인수로 가진다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1, 4$ 에서 세로 점근선을 가진다.

07. 점근선의 이해

[05] $f'(x) = 0$의 근이 존재하는 함수의 역함수의 미분계수

① $f'(a) = 0$, $f(a) = b$이고, $x = a$에서 극점을 가지는 경우 역함수가 존재하지 않는다. 하지만, 극점의 좌우 구간 중 한 구간을 정의역으로 다시 정의하면 일대일대응을 만족하기 때문에 역함수를 정의할 수 있다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면, $\lim_{x \to b} g(x)$는 $\pm\infty$로 발산한다.

② $f'(a) = 0$, $f(a) = b$이고, $x = a$에서 극점을 가지는 경우 역함수가 존재한다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면, $\lim_{x \to b} g(x)$는 $\pm\infty$로 발산한다.

③ $f'(a) = 0$, $f(a) = b$이고, 정의역을 $x \geq a$로 정의한 함수의 역함수를 $g(x)$라 하자. $y = |g(x)|$는 $x = b$에서 연속이고 미분계수는 발산하는 함수이다.

$f'(x) = 0$의 근이 존재하는 함수의 역함수의 미분계수

① 예시	$f(x) = \sqrt{x}$	$y = x^2\ (x \geq 0)$의 역함수
② 예시	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$y = x^3$ 의 역함수
③ 예시	$f(x) = \sqrt{\lvert x \rvert}$	$y = x^2\ (x \geq 0)$의 역함수의 절댓값 함수

$\sqrt{f(x)}$의 $f(x) = 0$인 지점에서의 미분계수 조사

$y = \sqrt{f(x)}$가 정의되려면 $f(x) \geq 0$ 이어야 한다. ($\because$ 수1-$\sqrt[n]{a}$의 정의) $y' = \frac{f\prime(x)}{2\sqrt{f(x)}}$이다. $f(x) = x^n$이라 하면

n이 홀수 $\rightarrow$ $x \geq 0$, $y' = \frac{nx^{n-1}}{2x^{\frac{n}{2}}} = \frac{n}{2}x^{\frac{n}{2}-1}$ $n = 1$이면 $y' = \frac{n}{2}x^{-\frac{1}{2}}$이므로 발산한다. $n \geq 3$인 홀수: 수렴한다.
n이 짝수 $\rightarrow$ $f(x) = x^{2k}$라 하면, $y = |x|^k$ (단, $n = 2k, k$는 자연수) $n = 2$이면 $y = |x|$이므로 발산한다.
$n \geq 4$인 짝수이면 수렴한다.

$\therefore$ $f(x)$가 일차식인 경우, $f'(0\pm)$는 $\pm\infty$로 발산한다. (ex: $y = \sqrt{\sin x}$, $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = \sqrt{\tan x}$)
$f(x)$가 이차식인 경우, $f'(0+) \neq f'(0-)$이므로 발산한다. (ex: $y = \sqrt{1 - \cos x}$, $y = \sqrt{\sec x - 1}$)

[06] $\ln|f(x)|$의 세로 점근선 조사

$f(x) = 0$의 모든 실근에서 세로 점근선이 만들어진다는 것을 증명해보자

$\ln|f(x)|$의 세로 점근선 조사

$g(x) = \ln|f(x)|$라 하면, $g'(x) = \frac{f\prime(x)}{f(x)}$이다. $f(x) = x^n$이라 하면, $g'(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n} = nx^{n-1}$이다.
따라서 $x = 0$에서 $g'(x)$는 발산한다.

증명시 $f(x) = x^n$ 이라고 가정하였는데, 다항함수는 물론 초월함수의 증명까지 이정도면 충분하다. 미분계수는 $\frac{0}{0}$ 꼴 부정형이고, 이는 결국 **수렴단위의 형태**이기 때문에 조사포인트에서 수렴형태인 다항함수로 가정할 수 있다. 또한 고교과정에서 미분계수의 정의는 도함수의 극한의 조사로 대체해도 무방하다. (미분가능하지만 도함수가 불연속인 함수는 절대 출제되지 않는다.)

08. 극점의 우회적 판단

[01] 극점의 판단

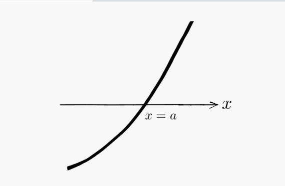
해당 주제에서 다루는 극점은 미분가능한 함수의 극점으로 한정한다. 미분가능한 함수의 극점은 미분을 통한 도함수의 부호변화를 통해 판단하는 것이 기본이다. 하지만 초월함수의 경우 미분하면 식이 더 복잡해지는 경향이 있기 때문에 극점의 존재성 정도는 미분 없이 판단할 수 있는 도구들을 학습하도록 하자.

[02] 극점의 우회적 판단 도구

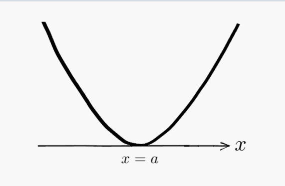
다음은 극점을 우회적으로 판단할 수 있는 도구들이다. 주의해야할 점은 함수의 인수가 존재하지 않는다고 하더라도 극점이 없는 것은 아니라는 것이다. 또한, 해당 도구들은 극점이 존재하는 것을 판단할 수 있는 도구이지 극점이 존재하지 않는 것을 판단할 수 있는 도구는 아니다.

극점의 우회적 판단 도구

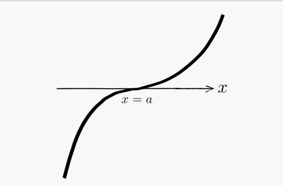
도구1 **인수가 짝수개이면 해당 지점에서 극점이다.**



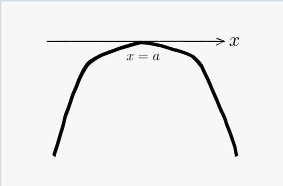
인수 1개 : 극점 X



인수 2개 : 극점 O

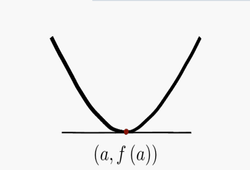


인수 3개 : 극점 X

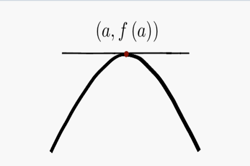


인수 4개 : 극점 O

도구2 **$f'(a)=0$ 이고 $f''(a)\neq 0$ 이면 x= a에서 극점이다.**



$f'(a)=0,\ f''(a)>0$



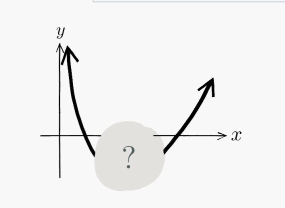
$f'(a)=0,\ f''(a)<0$

$f'(a)=0,\ f''(a)=0$ 이면 $x=a$에서 변곡점이다 → ×

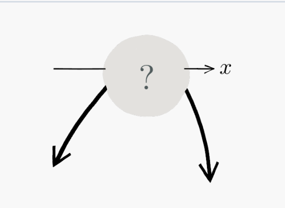
반례) $f(x)=x^4 \rightarrow f'(x)=4x^3 \rightarrow f''(x)=12x^2$ 이다.
$f''(0)=0$이지만, 변곡점이 아니다.

변곡점은 이계도함수의 부호 변화를 통해 판단한다.

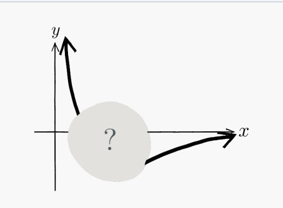
도구3 **정의역의 특이점과 양끝에서의 극한조사를 통해 극점의 최소한의 존재성을 유추할 수 있다.**



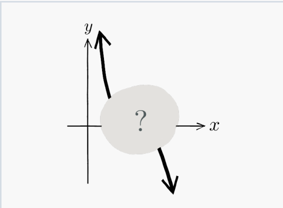
최소 1개의 극소



최소 1개의 극대

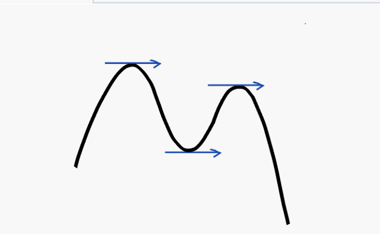


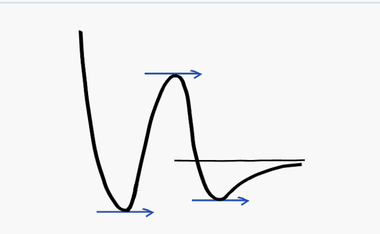
최소 1개의 극소

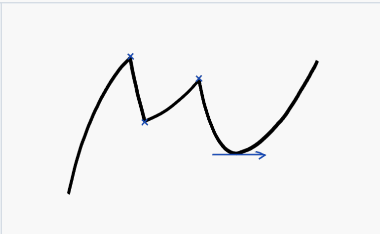


알 수 없음

도구4 **연속함수의 극점은 번갈아 등장한다**







09. 볼록성

[01] 볼록성의 정의

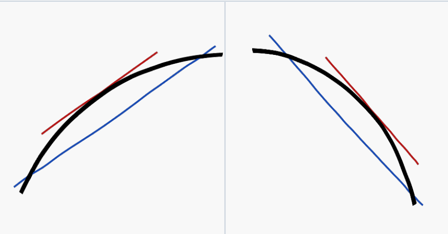
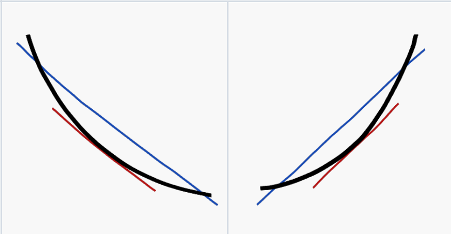
볼록성을 정의하도록 하자. 그래프에서 볼록성을 정의하는 방법은 평균값정리에 등장하는 두 직선과 곡선의 위치관계이다. 식에서의 볼록성은 이계도함수의 부호로 정의한다.

식에서의 볼록성, 변곡점의 정의

볼록성	특정구간에서 $f''(x) > 0$	해당 구간에서 아래로 볼록하다.
	특정구간에서 $f''(x) < 0$	해당 구간에서 위로 볼록하다.
변곡점	$f''(x)$ 연속	$f''(a) = 0$ & 좌우 f''의 부호 변화 → (a, f(a)) 변곡점
	$f''(x)$ 불연속	x=a 좌우 f''의 부호 변화 → (a, f(a)) 변곡점

그래프에서의 볼록성의 정의

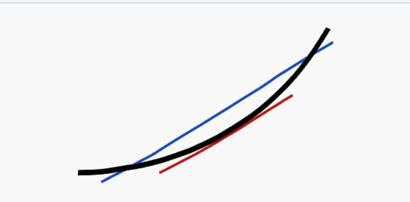
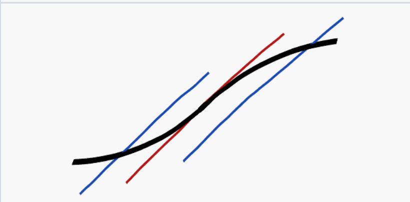
위로 볼록	미분계수 > 곡선 > 평균변화율
아래로 볼록	평균변화율 > 곡선 > 미분계수

위로 볼록	아래로 볼록
	
미분계수 > 곡선 > 평균변화율	미분계수 < 곡선 < 평균변화율

[02] 평균변화율과 변곡점의 관계

미분 가능한 함수에 대해, 평균변화율과 같은 미분계수가 사이에 존재한다는 정리를 평균값 정리라고 한다. 평균값 정리를 역인 명제를 생각해보자. 미분계수와 같은 평균값 정리가 존재하기 위해선 그래프의 볼록성이 유지되어야 한다. 변곡점의 미분계수인 경우 볼록성이 바뀌기 때문에 미분계수와 같은 평균값 정리가 존재하지 않을 수 있다는 것을 알 수 있다.

평균변화율과 변곡점의 관계

변곡점이 없는 구간	변곡점이 있는 구간
	
평균값정리의 역 성립 (O)	평균값정리의 역 성립 (X)

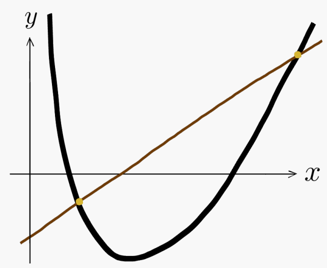
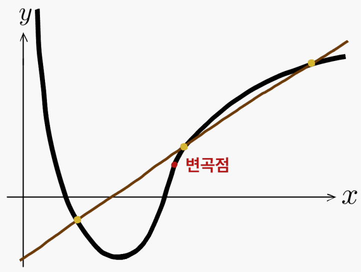
09. 볼록성

[03] 변곡점 조사 타이밍

그래프에서의 볼록성의 정의에서 알 수 있듯이 그래프와 직선의 상대적 위치에 따라 교점의 개수는 달라진다.

기울기가 0인 직선의 경우 곡선과 직선의 교점의 개수가 곡선의 볼록성에 따라 달라지지 않기 때문에 곡선의 볼록성을 조사하지 않아도 된다. 하지만 기울기가 0이 아닌 직선과 곡선의 교점의 개수는 곡선의 볼록성에 따라 달라진다. 따라서 기울기가 0이 아닌 직선과 곡선의 교점의 개수는 곡선의 볼록성에 따라 달라질 수 있다.

주로 로그함수가 합성되어 있는 함수의 경우 정의역이 커짐에 따라 로그함수의 발산력이 상대적으로 떨어지기 때문에 발산하면서 변곡점을 가지는 경우가 많다.

변곡점이 없는 경우	변곡점이 있는 경우
	
교점의 개수 2개	교점의 개수 3개

[04] 접선의 개수 변화 경계

접선은 기울기가 있는 직선과 곡선의 관계이기 때문에 볼록성에 대한 조사가 선행되어야 한다. 다음의 요소들은 접선의 개수 조사의 기준이 되는 경계들이다. 다음 경계들은 모두 그래프의 볼록성과 관련이 있다.

접선의 개수 변화의 경계 요소

① 함수 자체 ② 가로 점근선 $y = k$ ③ 세로 점근선 $x = k$ ④ 변곡접선