규 토
라이트
N 제

CONTENTS

3 적분법

1. 여러 가지 적분법

2. 정적분의 활용

규토 라이트 N제

오리엔테이션

규토 라이트 N제

책소개

개념, 유형, 기출을 한 권으로 Compact하게

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기 위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다 보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과 개념, 실전 개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다.
단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.
교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

2. **T**raining – 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여
수능최적화 자작으로 구성하였습니다.
기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.
단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

3. **T**raining – 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.
필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.
실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.
과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도
1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야 하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

단순히 유형서가 아니라 생기초부터 점점 살을 붙여가며 기출킬러까지 다루는 올인원 교재입니다.
즉, 교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.
규토 라이트 N제 미적분의 경우 총 906제이고
문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당 과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야 할지 갈피를 못 잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학성적이 잘 오르지 않는 학생

규토 라이트 N제

검토후기

문지유 / 울산대학교 의학과

규토 라이트 N제는 고3 학생들 뿐만 아니라 중학생, 고1, 고2 학생들이 선행학습을 할 때에도 활용하기 좋을 것 같아요. 개념 설명이 간단하면서도 명료하고 깔끔하게 되어 있으면서도, 중요한 포인트를 놓치지 않는 꼼꼼한 교재입니다. 개념 공부를 하며 바로바로 이해했는지 확인할 수 있는 예제 문제가 해설과 함께 중간중간 실려 있습니다. 기본 개념을 가지고 풀 수 있는 난이도가 그리 높지 않은 Guide Step 문제부터, 유형별로 개념을 적용하여 풀 수 있는 문제(Traning – 1Step), 단원별 역대 기출들(Training – 2Step), 고난도를 연습할 수 있는 Master Step까지. 개념 공부와 함께 문제풀이를 곁들여 밸런스 있는 공부를 하기 최적화된 문제집이라고 생각합니다.

벌써 제가 규토 N제 교재 검토를 한지도 4년차에 접어들었네요. 최대한 꼼꼼히 검토하는 편인데도 항상 놓치는 게 있을까 떨리네요. 새해가 밝아 학년이 바뀌고, 나이도 어느덧 한 살 더 먹은 여러분이 규토 라이트 N제와 함께 새로운 마음으로 산뜻하게 공부하셔서, 이 교재를 풀면서 성장하는 것을 스스로 느꼈으면 좋겠습니다. 뿌듯한 한 해 되세요! 파이팅 :D

윤승하 / 울산대학교 의예과

이번에 규토 라이트 N제를 검토한 울산대 의예과 24학번 윤승하입니다. 규토 라이트 N제의 추천 대상이 아직 수학에 대한 정리가 완벽하게 되지 않은 학생인 만큼, 개념에 대한 정리와 준킬러 문제까지의 징검다리 역할을 하는 것이 중요하다고 생각했고 검토하면서 규토 라이트 N제가 이러한 역할을 잘 수행한다고 느꼈습니다. 교과서 개념은 물론이고 학생들이 자주 실수하는 부분, 문제에 적용할 수 있는 스킬 등 문제를 푸는 데 필요한 모든 개념을 수록했습니다. 또한 문제의 난이도를 총 4단계로 나누어 준킬러•킬러 문제를 풀 때까지 문제의 난이도가 완만하게 높아지도록 문제를 배치하였습니다.

저 또한 수능을 준비하면서 다양한 문제집을 풀어보았지만, 규토 라이트 N제와 같이 수학 초보자가 어려운 4점 문제까지 풀 수 있도록 이끌어주는 문제집은 잘 접해보지 못했습니다. 개념이 부족하거나 기출 문제가 어렵게 느껴지는 학생들께 이 문제집을 추천하고 싶습니다!

정지영 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 검토자 정지영입니다. 벌써 한 해의 입시가 끝나고, 겨울을 지나 새학기가 시작되네요. 새학기의 시작과 함께 새로운 문제집이 출판되고, 풀린다는 생각을 하니 저자분의, 수험생들의 열의가 느껴지는 것만 같습니다.

규토 라이트 N제 미적분은, 결코 '라이트'하지만은 않은 교재입니다. 앞선 수1, 수2와의 연계성뿐만 아니라 교재 자체의 완성도까지 갖추었습니다. 수능 수학에 어떻게 접근하고, 어떻게 풀이를 완성해가야 하는지에 대한 내용을 빈틈없이 갖춘 교재라고 생각합니다. 단순히 '라이트'한 교재로 넘긴다기 보다는, 문제와 해설에 담긴 논리를 완벽하게 숙지할 수 있으시면 좋겠습니다.

과정은, 결과로 미화된다는 생각을 종종 합니다. 여러분의 올 한해 수험 생활은 분명 쉽지 않을거에요. 공부의 스트레스, 불안감... 많은 것들이 여러분을 괴롭힐 것 같습니다. 하지만 올 한해가 끝났을 때, 그 모든 과정이 좋은 기억으로 남을 수 있을 만큼 좋은 결과를 얻을 수 있으시기를 기원합니다.

감사합니다.

조윤환 / 대성여자고등학교 교사

규토 라이트 N제는 개념 설명 + 기출 문제 + 자작 N제로 구성되어 있어 세 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 독학서입니다. 특히 수능 대비에 알맞은 컴팩트한 볼륨의 Guide step(개념 익히기편)에서 수능에 자주 출제되는 중요한 개념을 빠르게 훑고 문제 풀이로 넘어갈 수 있습니다. Guide step에서는 실전에서 사용할 수 있는 유용한 테크닉과 학생들이 개념을 공부하면서 궁금할 수 있는 포인트까지 따로 자세하게 설명해주어서 교과서나 시중 개념서에서 해결할 수 없는 의문점까지 해결할 수 있습니다.
기출 문제에 추가로 자작 문제가 포함되어 있어서 기출 문제가 부족한 삼각함수의 그래프, 삼각함수의 활용 단원에서 트렌디한 평가원 스타일의 문제를 다양하게 풀어볼 수 있다는 것은 규토 라이트 N제 만의 큰 장점이라고 생각합니다.
저자의 TIP이 문제집과 해설집 곳곳에서 여러분들을 도와줄 것입니다. 규토 시리즈 특유의 유쾌한 해설이 무척 상세해서 규토 라이트 N제로 공부하다 보면 친절한 과외선생님이 옆에서 설명해주는 듯한 느낌을 받을 수 있을 것입니다. 특히 책 안에 나와있는 규토 시리즈의 100% 공부법을 참고하면 수학 공부 방법에 고민이 많은 학생들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하세요~ 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다. 현재 수능은 시간을 꽤 필요한 준킬러 수준의 문제들이 거의 반을 차지합니다. 이러한 문제들을 공략하기 위해서는 문제해결 능력을 길러야 할 뿐만 아니라, 문제들을 빠르고 정확하게 풀 수 있어야 합니다.
이러한 수능에 최적화된 문제해결 능력을 기르게 해주는 문제집이 바로 규토 라이트 N제입니다. Guide Step에서는 수능 수학의 기본 개념뿐만 아니라 실전 풀이법을 알려줍니다. Training 1 Step에서 저자가 최신 수능 트렌드를 분석하면서 만든 자작 문제들을 통해 실력을 기를 수 있고, Training 2 Step에서 기른 실력을 기출문제에 바로 적용할 수 있습니다. 마지막 Master Step에서 선별된 어려운 기출과 자작 문제들을 풀면서 심화를 다질 수 있습니다. 문제의 난이도가 절대 쉽지만은 않지만, 저자의 100% 공부법을 통한 꾸준한 반복과 복습을 하면, 어느새 준킬러 수준 이상의 문제들을 술술 푸는 자신을 발견할 겁니다. 올해 수험생 여러분 모두 건승을 기원합니다!

추천사

정시로 인서울 의대 합격 후기, 규토 라이트 N제 추천사 (윤종원)

안녕하세요. 저는 규토의 도움으로 이번에 인서울 의대에 정시로 합격하게 된 학생입니다. 저는 총 세 번의 수능을 치르면서 규토 라이트 N제의 효과를 몸소 느끼게 되어서 이번 추천서를 작성하게 되었습니다.

우선 저는 22, 23, 24, 총 세 차례의 수능을 겪은 삼수생입니다. 첫 수능에서는 간신히 2등급 컷트라인을 맞췄고, 두 번째 수능에서는 1등급 컷 점수를, 마지막 수능에는 원점수 96점을 받으며 성공적으로 입시를 마칠 수 있었습니다. 제가 이렇게 성적을 향상한 데에는 규토 라이트 N 제가 정말 큰 도움을 주었습니다.

제가 고등학교 3학년일 때, 저는 오르지 않는 수학 성적을 두고 정말 많이 고민했는데요, 사실 그때는 제가 정확히 어느 부분이 부족한지, 또 어느 부분을 잘하는지 잘 알지도 못했습니다. 그저 최고난도 문항(킬러문항)이 풀리지 않으니 그저 어려운 문제만 끊임없이 반복해서 풀었었죠. 그렇게 실망스러운 22 수능 성적을 받고, 재수를 결심한 이후로는 아예 개념부터 다지기로 생각했고, 그때 제가 개념을 다질 때 도움을 받은 책이 규토 라이트 N제였습니다.

이 책은 정말 낮은 난도의 문제부터, 최고난도라고 해도 손색이 없을 정도의 문제들까지 다양하게 수록이 되어있습니다. 특히 규토님이 직접 만드신 문제들이 정말 높은 퀄리티를 보여주며 문제를 풀수록 감탄하게 만들죠. 문제에 대한 평가는 여러분이 직접 풀면서 몸으로, 손으로 느끼는 것이 가장 정확하니 말을 아끼지만, 여타 시중의 다른 문제집들과 비교했을 때 절대 뒤지지 않는, 오히려 압도하는 품질을 보여준다는 것만은 명백합니다.

하지만, 문제의 퀄리티가 아무리 좋다 하더라도 본인이 체화하지 못한다면 소용이 없을겁니다. 그러나 규토 라이트 N제는 그럴 걱정이 없습니다. 문제집보다 훨씬 두꺼운 해설지를 보시면 아시겠지만, 마치 과외선생님이 옆에서 하시는 말씀을 그대로 옮겨적은 것만 같은 해설지는 문제의 해설보다도 학생의 이해를 최우선으로 두고 작성되었습니다. 헷갈릴 만한 포인트들은 옆에 다른 문제들을 이용해서 추가로 설명을 해준다거나 하는 식으로 구성된 해설은 마치 수준이 높은 과외선생님이 옆에 있다는 착각마저 들게 합니다.

그렇다 보니 이 규토 라이트N제를 완벽하게 습득하기 위해서는 답지를 어떻게 이용하는지가 굉장히 중요합니다. 규토의 100% 공부법을 읽어보시면 아시겠지만, 문제를 맞히더라도 내가 어떻게 맞추었는지 그 풀이법을 나 자신이 인지하고 있는 것이 굉장히 중요합니다. 내가 푼 방법에 논리적 비약이 있지는 않았는지, 내가 정확한 방법으로 푼 건지 끊임없이 점검해야 하죠. 이럴 때 답지가 정말 유용하게 사용됩니다. 정확하고 세심한 풀이를 통해, 빠뜨린 부분은 없는지, 넘겨짚은 부분은 없는지 끊임없이 옆에서 점검해 줍니다. 위에서 서술한 바와 같이, 과외를 받는 기분이 들 정도로요.

그렇다면 여기서 궁금한 점이 생기실 겁니다. 과연 규토 라이트 N제는 나에게 맞는 문제집일까? 너무 어렵지는 않을까? 혹은 너무 쉽지는 않을까? 위 질문에 대한 답은, 여러분의 실력에 따라 달라지게 됩니다. 냉정히 말해서 규토 라이트 N제는 이름과는 다르게 라이트하기만 한 문제집은 아닙니다. 아무것도 모르는 상태에서, 즉 기초가 다져지지 않은 상태에서 하기에는 쉽지 않죠. 하지만, 개념을 한 번이라도 봤다면 얼마든지 도전할 수 있는 난이도입니다. 문제집의 구조상 난이도별로 파트가 나누어지기도 하고, 답지와 함께 풀면 조금 어렵더라도 이해하기에 어렵지는 않을 겁니다. 그렇다면 최상위수험생들에게는 필요가 없는 문제집일까요? 그렇지도 않습니다. 최상위수험생이더라도 틀리는 문제가 있다면 어딘가 불안정한 부분이 있다는 뜻입니다. 규토 라이트N제는 흔들리는 기초를 단단하게 굳힐 수 있는 교재입니다. 혹시라도 내가 불안한 부분은 없는지, 나의 약점은 없는지 등을 알 수 있는, 그러한 교재입니다. 내가 지금껏 쌓아온 기초에

불안한 부분은 없는지, 내가 안다고 생각했던 부분에 허점은 없는지 점검할 때에도 규토 라이트 N제는 최고의 파트너가 되어줄겁니다. 내가 가야 할 길이 멀게만 느껴질 때, 내가 지금 하고 있는 방법이 옳은 방법인지 알 수 없을 때, 규토 라이트 N제는 여러분의 곁에서 충실히 길잡이 역할을 해줄겁니다. 그렇게 규토와 함께, 문제 하나하나를 곱씹으며 나아가다 보면 그 길의 끝에는 여러분이 목표하고 있던 수학 성적이 여러분을 기다리고 있을 것입니다.

규토와 함께하게 된 여러분을 진심으로 응원하며, 이만 글을 줄이겠습니다. 감사합니다.

규토 라이트 N제와 함께 1년 내내 수학 모의고사 1등급!! (김준한)

-4등급부터 시작해서 현재 수학 백분위 99%까지 달성 후기-

안녕하세요~ 저는 작년 고1 때는 모의고사 성적이 3,4등급에 머물러 있다가 올해 규토 라이트 N제 수1,2로 공부하면서 2022년에 시행된 고2 6,9,11월 모의고사에서 모두 1등급을 쟁취하게 되어 추천사를 작성하게 되었습니다. 제가 이 책을 처음 접했을 때 책의 구성도 물론 좋았지만 가장 눈에 들어온 것은 공부법이었습니다. 성적대가 낮은 학생들이 공부해도 큰 효과를 볼 수 있는 책이지만 평소에 수학 공부법에 회의감을 가지고 있는 학생들도 공부하면 더 큰 효과를 볼 수 있을 거라고 생각합니다!

고등학교 1학년 때의 저는 수학을 아주 잘하지도 못 하지도 않는 학생이었습니다. 단지 다다익선이라는 말처럼 시중에 나와 있는 문제집을 다 풀어 보며 성적이 잘 나오겠지하며 기대하는 학생에 불과했습니다. 그랬던 성적이 3등급이었고 저는 심각한 고민에 빠졌습니다. 그러던 도중에 한 커뮤니티 사이트에서 ‘규토 라이트 N제’ 후기를 보았습니다. 후기를 읽어보며 나도 저런 드라마틱한 성장을 이뤄낼 수 것 같다는 느낌을 받았고 그 중심인 ‘100% 공부법’을 알게 되어 바로 책을 구입하게 되었습니다.

규토 라이트 N제를 보면서 구성이 참 놀라웠습니다. 현 교육과정에 따른 개념이 모두 수록되어 있을 뿐만 아니라 규토님 특유의 테크니컬한 팁들이 다 들어 있어서 자작문제 (t1)에 적용하여 체화를 시키고 이에 따라 배운 것들을 기출문제 (t2)에 또 적용할 수 있어 개념-기출의 괴리감을 최소화 시켜준다는 장점이 있습니다. 그리고 규토 라이트 N제의 고난도 문제의 집합이라고 할 수 있는 마스터 스텝 (mt) 인데 저는 개인적으로 푸는 데 너무 재밌었습니다. 저는 문제를 풀면서 규토쌤이 괜히 문제 배치를 마지막에 하신 게 아니구나라는 것을 느꼈습니다. 이 문제들은 약간 방금 전에 언급한 t1,t2 문제들을 믹스 시킨 문제, 즉 기본 예제 들의 집합이라고 느꼈습니다. 마스터 스텝 문제까지 책의 공부법으로 완전히 흡수시켜야 비로소 책의 취지에 맞게 안정적인 1등급에 도달한다고 느끼게 되었습니다.

이제 공부법에 대해 얘기해보려 합니다. 사실 제가 제일 강조하고 싶은 부분입니다!! 제 성적향상의 근원이기도 합니다ㅎ 올해 3월달... 저의 수학 성경책을 받은 날이었죠..저는 책과 물아일체가 되겠다는 마음가짐으로 임했습니다. 규토 선생님께서 강조하시는 수학 공부법이 처음에는 어색했지만 계속 적용해보니까 수능 수학에 가장 이상적이고 적합한 방법이라는 것을 깨달았습니다. 제가 세 번의 모의고사에서 1등급을 받은 그 공부법! 100% 공부법의 핵심은 “누군가에게 설명할 수 있다”입니다. 사실 혹자께서는 문제를 잘 푸는 거랑 어떤 차이냐고 물으실 수 있는데 사실은 엄청난 차이가 있다고 생각합니다. 문제를 완벽하게 설명하려면 풀이를 써 내려갈 때 개념 간의 논리를 정확하게 이해하고 남을 이해시킨다는 마음으로 문제를 정확히 자기것으로 만들어야 합니다. 저는 이 과정이 정말 힘들었습니다. 하지만, 계속 거듭하고 묵묵히 하다보니 가속도가 붙더라고요! 내년에 공부하실 2024 규토 수험생 분들도 이 부분을 강조하며 공부하시면 충분히 좋은 결과 있으실 거라고 믿습니다!!

마지막으로 규토 선생님! 제 수학 성적을 눈부시게 끌어올려 주셔서 감사합니다! ㅎㅎ

수능 수학의 시작과 마무리, 규토 라이트 N제 (오세욱)

–규토 N제 수1, 수2, 미적분 풀커리(라이트~고득점)로 수능 미적분 백분위 98% 달성 후기–

저는 현역 때 운 좋게 대학입시에 성공해 인서울 대학에 합격했지만 수능에 미련이 남아있는 학생 중 한명이었습니다. 수학을 잘한다고 생각했고 자부심을 가지고 있었지만 막상 수능에서는 3등급 백분위 78을 받았습니다. 수능 시험장에서 문제를 풀면서 '나는 개념을 놓치고 있고 조건을 해석할 줄 모르는구나'를 깨달았습니다.

그렇게 대학에 진학했다는 생각으로 놀며 2020년을 보냈고 2021년이 되자 이대로 끝내면 후회가 남을 것 같다는 생각에 다시 한번 입시 속으로 뛰어들었습니다. 대학을 병행하며 진행하고 싶었기에 과외나 학원을 다니기에는 시간이 촉박하다고 판단하여 구매하게 된 책이 바로 과외식 해설을 담은 '규토 라이트 N제'입니다.

규토 라이트 N제를 만나게 되면서 앞에 적힌 공부방법에 따라 개념 부분과 개념형 유제부터 자세히 읽고 풀어보며 사소하지만 실전 문제풀이에 도움이 되는 팁을 얻었습니다. 또한 함께 실린 자작문제와 기출문제에 개념을 적용해 풀며 답안지와 내 풀이의 차이점을 비교하였고 잘못되게 풀이한 부분이 있다면 다시 한번 적어보며 틀린문제는 풀이의 길을 외울 정도로 반복해서 풀었습니다. 솔직히 이러한 과정이 빠르고 쉽다 한다면 거짓말입니다. 처음 시작할 때는 막막할 정도로 문제가 벽으로 느껴졌고 모르면 아직도 모르는게 많다는 것에 화가 나기도 했습니다. 하지만 한 문제, 한 단원 넘어갈 때마다 확실하게 개념이 탄탄해지고 새로운 문제를 만나도 개념을 중심으로 풀이가 진행되는 경우가 많아 자신감과 재미를 느끼게 되었습니다. 이렇게 수1, 수2부터 미적분까지 3권을 모두 마무리하고 반복하여 풀이하다 보니 평가원 시험에서 고정적으로 1등급을 받게 되었습니다.

규토 라이트 N제는 이름과 달리 절대 '라이트' 하지만은 않습니다. 선택과목 체재에서 규토 라이트 N제는 시작이며 마무리인 단계입니다. 기출을 이미 많이 접해본 N수나 고3분들 중 컴팩트하고 완전하게 개념과 기출을 정리하고 싶은 분들부터 수능 수학을 처음으로 공부해 개념을 탄탄하게 쌓고 싶은 분들까지 규토 라이트 N제를 자신있게 추천드립니다.
[중요] 만약 책을 구매하게 된다면, 규토 선생님의 방법으로 공부하세요.

추신) 여담으로 타 문제집(쎈)과 규토 라이트N제를 비교하는 글이 많아 두 문제집 모두 풀어본 입장에서 남긴다면 해설의 자세함, 친절도, 수능 수학을 할 때 필요한 문제의 질, 개념의 자세함 모두 규토 라이트 N제가 좋다고 생각합니다. 그리고 N제라는 이름 때문에 그런지 몰라도 두 책의 목적은 완전하게 다른데 비교하는 경우가 많은 것 같습니다. 이 책은 자세한 개념부터 심화문제(30번)까지 모두 다룹니다. 과장없이 미적분2022평가원문제 모두 이 책에 있는 문제를 규토 선생님의 방식으로 다뤘다면 모두 맞출 수 있었다고 생각합니다.

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데요. 9월부터 규토 라이트로 두 달동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데요. 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다.

첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 얻어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주시는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻔한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데요, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사설 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데요, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. ‘theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑같게 느껴질 때 비로소 이해한 것’ 이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 → 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1,2 학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해두었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지도 풀리더라구요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해봐야겠다는 생각을 했습니다. 어쩌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부 한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정이 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까.교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에선 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됐고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제양과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.

개념익히기와 〈1 step〉 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 될텐데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.

다음으로는 제가 가장 애정했던 〈2 step〉 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됐던 step이었습니다. 하지만 이 단계부턴 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하시분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 〈2 step〉만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니다. 꼭 여러 번 회독하셔서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리하실 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니다. 〈2 step〉를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이있습니다.) 역시나 기출의 반복이었습니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니다.

마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전날까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니더라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니다. 시간이 조금만 남았더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.

끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학이 힘드신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문제집을 보자니 너무 두껍고 양이 많습니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 컨텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다.

코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다.

많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, “이 책을 공부하는 방법(?)”이 마치 과외를 받는 기분이 들도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다.

규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갉아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고 보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했었던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다. 그렇게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.

책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다.

늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다.!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

01

수열의 극한

급수의 수렴과 발산

성취 기준 – 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

개념 파악하기 (1) 급수의 수렴과 발산이란 무엇일까?

급수의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 덧셈 기호 $+$로 연결한 식 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 을 **급수**라 하고,

기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다.

또 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n,

즉 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$를 이 급수의 제$n$항까지의 **부분합**이라 한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때,

즉 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$일 때, 이 급수는 S에 수렴한다고 한다.

이때 S를 이 **급수의 합**이라 하고, 이것을 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$와 같이 나타낸다.

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

Tip 1 $\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\lim_{n\to\infty} S_n$이다.

Tip 2 급수의 합은 부분합으로 이루어진 수열 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$의 극한으로 정의한다.

ex1 급수 $1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$이다. 이때 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ex2 급수 $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$S_n=\dfrac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$이다. 이때 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{1}{2}$이므로

주어진 급수는 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

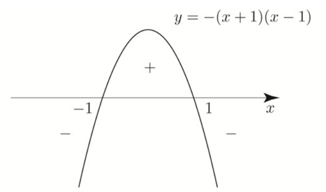
Tip 3 수열 $\{a_n\}$의 수렴과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴을 혼동하지 않도록 유의해야 한다.

수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산은 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 조사하는 것이고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산은 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 조사하는 것이다.

예제 7

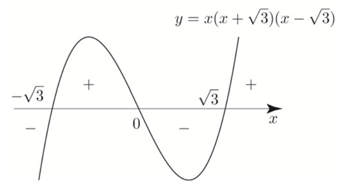
함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$의 그래프의 개형을 그리시오.

풀이



① 분모 $x^2+1\neq 0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
② $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (기함수)
③ $f(0)=0$이므로 점 $(0,\ 0)$을 지난다.
④ $f'(x)=-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$이므로 Semi 도함수 $f'(x)=-(x+1)(x-1)$

$f(1)=1,\ f(-1)=-1$ ($x=1$에서 극대, $x=-1$에서 극소)



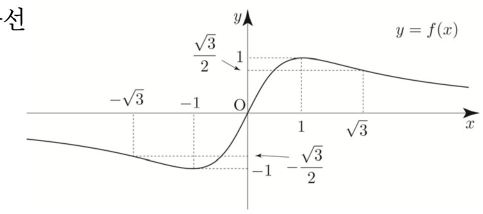
⑤ $f''(x)=\dfrac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$이므로

Semi 이계도함수 $f''(x)=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

변곡점은 $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

⑥ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



Tip 1 굳이 증감표를 그릴 필요 없이 Semi 도함수 $f'(x)$를 바탕으로 도함수의 부호를 판별하면 된다.
대략적인 개형을 그린 후 점근선과 이계도함수를 종합하여 조금 더 디테일하게 그려주면 된다.

Tip 2 **〈실수하기 좋은 point〉**
Semi 도함수 $f'(x)$를 미분하여 $f''(x)$를 구하면 안 된다.
Semi 도함수 $f'(x)$는 증감을 쉽게 따지기 위해서 도입한 새로운 함수이므로
$f''(x)$를 구하기 위해서는 원래 $f'(x)$를 미분해서 구해야 한다.

Tip 3 기함수이므로 $x>0$인 부분만 그린 뒤 원점 대칭하여 전체의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
이때 분모 분자를 x로 나누면 $\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}$이므로 분모에서 산술기하평균을 사용하면

$x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\dfrac{1}{x}}=2$이고 등호조건은 $x=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=1\ (\because x>0)$이므로 분모의 최솟값은 2이다.
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 1을 갖는다.

Tip 4 모든 문제를 풀 때 반드시 이계도함수를 구해야 하는 것은 아니다.
따라서 무조건 이계도함수를 조사하기보다는 문제에 따라 조사 여부를 탄력적으로 판단하면 된다.
판단의 기준은 경험이다.

Tip 5 곡선 $y=\dfrac{ax}{x^2+1}$의 그래프는 매우 잘 나오므로 개형을 기억해 두자.

개념 확인문제 7 다음 함수의 그래프의 개형을 그리시오.

(1) $f(x)=xe^{-x}$

(2) $f(x)=\ln(x^2+1)$

(3) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+3}$

(4) $f(x)=e^x+e^{-x}$

(5) $f(x)=x^2e^x$

(6) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$)

(7) $f(x)=(\ln x)^2$

05 미분법

다항함수×지수함수 형태의 그래프 (심화 특강)

성취 기준 – x절편을 이용하여 다항함수×지수함수 형태의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있다.

개념 파악하기 (7) 다항함수×지수함수 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있는 방법은 없을까?

다항함수×지수함수 그래프의 개형 빨리 그리기

이때까지는 도함수와 이계도함수를 바탕으로 여러 가지 함수의 그래프의 개형을 그리는 방법에 대하여 배웠다.
실전에서 문제를 접근할 때, 대략적인 개형을 알고 난 뒤 문제를 접근하면 훨씬 더 용이한 경우가 존재한다.
따라서 이번에는 빈출 소재인 다항함수×지수함수 그래프의 개형을 빨리 그리는 방법에 대하여 알아보자.

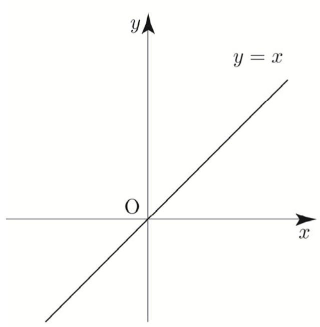
[1단계] 다항함수 그래프의 개형을 그린다. (x절편이 핵심)
[2단계] $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$를 조사한다. (점근선 체크)
[3단계] 다항함수 그래프의 개형에서 점근선이 그려지려면 어떤 모양이 되어야 하는지 생각해본다.

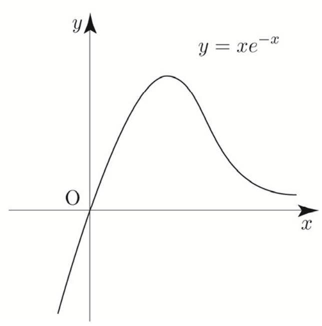
ex1 $y=xe^{-x}$

$y=x$를 그린 후 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$이 반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다. 즉, $x\to\infty$일 때, 아래로 볼록하면서 x축으로 한없이 가까이 가야 한다.

$y=x$가 위로 올라가는 힘보다 $y=e^{-x}$가 아래로 내려가는 힘이 더 크기 때문에 x축으로 한없이 가까이 간다라고 생각하면 된다. 이를 반영하여 그래프를 그려주면 다음과 같다.

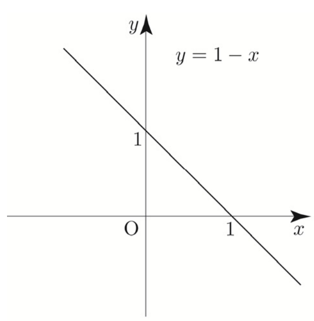


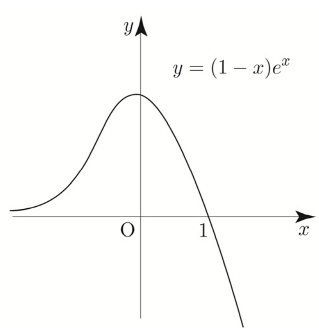


Tip 이때 극값을 갖는 x를 구하려면 도함수를 구하여 조사하면 된다.
지금 우리가 궁금한 것은 대략적인 그래프의 개형이다.

ex2 $y=(1-x)e^{x}$

$1-x$를 그리고 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이 반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.
이를 반영하여 그래프를 그려주면 다음과 같다.





06 합성함수의 그래프 그리기 (심화 특강)

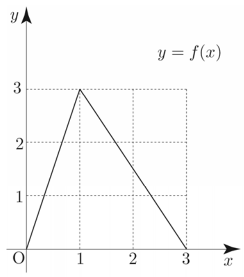
성취 기준 – 합성함수의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있다.

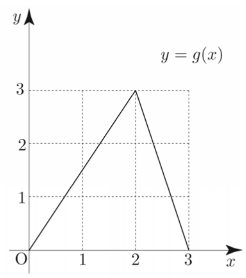
개념 파악하기 (8) 합성함수의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있는 방법은 없을까?

합성함수의 그래프의 개형 빨리 그리기

함수 $f(g(x))$의 그래프를 그린다고 가정해보자. $f(g(x))$를 미분하여 도함수 $g'(x)f'(g(x))$를 구한 후 $g'(x)f'(g(x))$의 부호변화를 바탕으로 증감을 파악하여 합성함수의 그래프를 그릴 수 있다.
허나 문제에 따라서는 도함수 $g'(x)f'(g(x))$의 부호변화를 파악하기 힘든 경우가 존재할 수 있다.
따라서 이번에는 도함수를 구하지 않고 $f(x)$와 $g(x)$의 각각의 증감만을 이용하여 함수 $f(g(x))$의 그래프의 대략적인 개형을 빨리 그리는 방법에 대하여 알아보자.

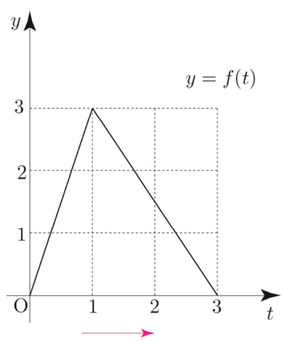
이해를 돕기 위해 오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 바탕으로 함수 $y=f(g(x))$의 그래프를 그려보자.

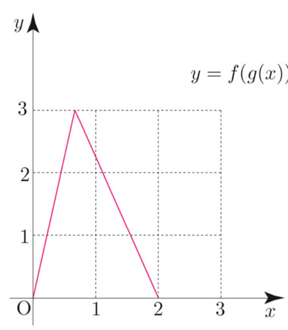




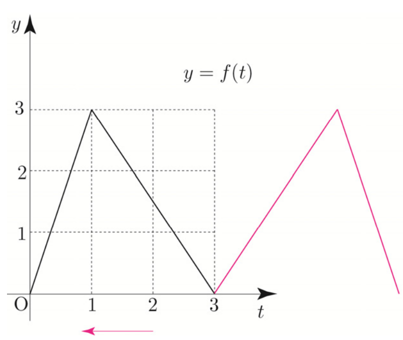
함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=2$를 경계로 $0<x<2$에서 증가하고 $2<x<3$에서 감소한다.

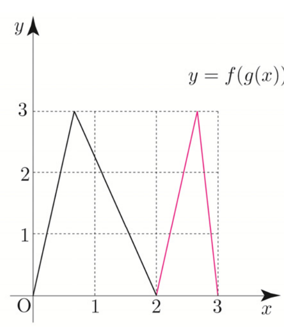
$g(x)=t$라 하면 x가 $0 \to 2$일 때, t는 $0 \to 3$이므로 함수 $y=f(t)$에서 $0<t<3$의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $0<x<2$에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.





x가 $2 \to 3$일 때, t는 $3 \to 0$이므로 함수 $y=f(t)$에서 $0<t<3$의 범위의 그래프를 좌우 반전시킨 후 복사하여 정의역 $2<x<3$에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.





함수 $y=f(g(x))$의 그래프를 그리는 순서를 정리하면 다음과 같다.

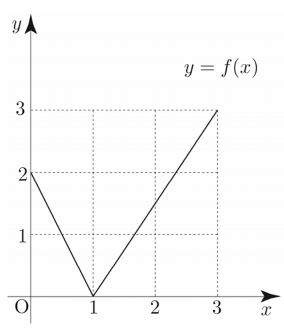
[1단계] 함수 $y=g(x)$의 그래프의 증가하는 구간과 감소하는 구간을 파악한다.
(함수 $f(g(x))$의 정의역 x의 범위 파악)
증가 또는 감소하는 정의역 x 범위가 $a<x<b$라 하자.

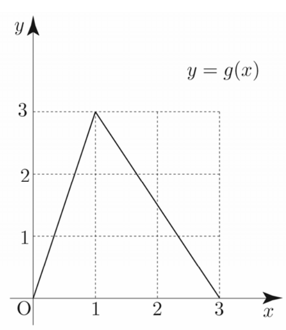
[2단계] ① $a<x<b$에서 함수 $g(x)$가 증가하는 경우
$g(x)=t$라 하면 x가 $a \to b$일 때, t는 $g(a) \to g(b)$이므로
함수 $y=f(t)$에서 $g(a)<t<g(b)$의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $a<x<b$에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그린다.

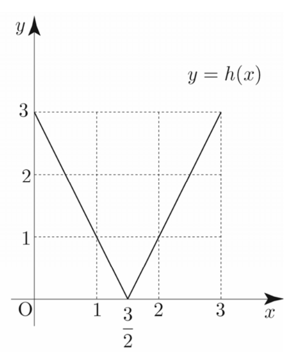
② $a<x<b$에서 함수 $g(x)$가 감소하는 경우
$g(x)=t$라 하면 x가 $a \to b$일 때, t는 $g(a) \to g(b)$이므로 함수 $y=f(t)$에서 $g(b)<t<g(a)$의 범위의 그래프를 좌우 반전시킨 후 복사하여 정의역 $a<x<b$에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그린다.

[3단계] 함수 $y=g(x)$의 그래프의 증가 또는 감소하는 구간에 대하여 [1단계], [2단계]를 적용하여
함수 $y=f(g(x))$의 그래프를 그린다.

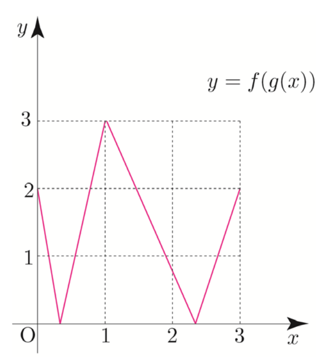
닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 정의된 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 다음과 같을 때,
ex1 ~ ex3에 해당하는 합성함수를 그려보자.







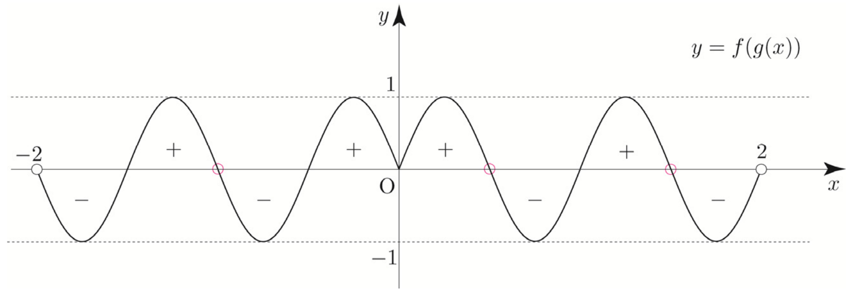
ex1 $y=f(g(x))$



함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=1$을 경계로 $0<x<1$에서 증가하고
$1<x<3$에서 감소한다. $g(x)=t$라 하면 x가 $0 \to 1$일 때, t는 $0 \to 3$이므로
함수 $y=f(t)$에서 $0<t<3$의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $0<x<1$에
들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다. x가 $1 \to 3$일 때,
t는 $3 \to 0$이므로 함수 $y=f(t)$에서 $0<t<3$의 범위의 그래프를 좌우 반전시킨 후
복사하여 정의역 $1<x<3$에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.

ex8 $-2 < x < 2$에서 함수 $h(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2)dt$가 극대가 되는 x의 개수를 구하시오.

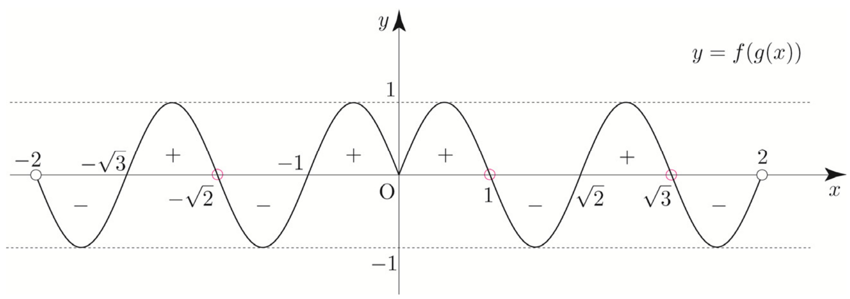
$h'(x) = \sin(\pi x^2)$이므로 $g(x) = x^2$라 보고 $f(x) = \sin\pi x$라 하면 $y = h'(x)$는 $y = f(g(x))$와 같다.
ex6 에서 그렸던 그래프로 해석해보자.



$x = a$ $(-2 < a < 2)$의 좌우에서 $h'(x) = f(g(x))$의 부호가 $+ -$로 변하는 a의 개수는 3이므로
$-2 < x < 2$에서 함수 $h(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2)dt$가 극대가 되는 x의 개수는 3이다.

위 문제와 별개로 함수 $h(x)$가 극대가 되는 x를 직접 구해보자.

방정식 $\sin(\pi x^2) = 0$ $(-2 < x < 2)$의 서로 다른 실근은
$x = -\sqrt{3}$ or $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{3}$이므로 x절편을
넣어서 그려주면 다음과 같다.



따라서 함수 $h(x)$는 $x = -\sqrt{2}$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$에서 극대이다.

Tip 증감을 기초로 한 합성함수의 그래프 그리기가 만능은 아니다. 적절한 상황에 맞춰 탄력적으로 사용해야지 무분별하게 사용하다가 오히려 독이 될 수도 있다. 합성함수의 그래프 그리기를 사용하면 오히려 시간이 더 걸리는 경우도 있고, 상황이 더욱 복잡해지는 경우도 더러 있기 때문이다.

실전에서 합성함수의 그래프 그리기를 사용할지 말지 판단하거나 실전에서 사용했다가 '이건 아니다 처음으로 다시 돌아가자'라고 판단하는 기준은 사실상 경험이다.

규토 라이트 N제

미분법

Training – 1 step

필수 유형편

3. 도함수의 활용

038

함수 $f(x)=2\ln(3-x)+\frac{1}{2}x^2\ (x<3)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

〈보기〉

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=3$을 점근선으로 갖는다.
ㄷ. $x_1<x_2<2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)<f(x_1)$이다.
ㄹ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.
ㅁ. 곡선 $y=f(x)$가 열린구간 $(-\infty,\ k)$에서 아래로 볼록하도록 하는 실수 k의 최댓값은 $3-\sqrt{2}$이다.
ㅂ. 방정식 $f(x)=3$은 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㅅ. 방정식 $f(x)=f(a)$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 개수는 2이다.
ㅇ. $\lim\limits_{x\to b+}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}\neq\lim\limits_{x\to b-}\frac{|f(x)|-|f(b)|}{x-b}$를 만족시키는 실수 b는 오직 하나 존재한다.
ㅈ. $x_1<3-\sqrt{2}<x_2<3$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

Theme 7 함수의 최대와 최소

039

닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)=(x^2-3)e^{-x+3}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은?

① $-12e^3$ ② $-14e^3$ ③ $-16e^3$
④ $-18e^3$ ⑤ $-20e^3$

040

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\cos x}{2+\sin x}$는 $x=a$에서 최솟값 m, $x=b$에서 최댓값 M을 갖는다. $\frac{b}{a}+M+m$의 값은?

① $\frac{11}{7}$ ② $\frac{12}{7}$ ③ $\frac{13}{7}$ ④ 2 ⑤ $\frac{15}{7}$

041

두 함수 $f(x)=-\frac{\ln\sqrt{x}}{x}$, $g(x)=kxe^{-x+2}$에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,x>0\}$인 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$의 최솟값이 $-\frac{1}{2e}$이 되도록 하는 양의 실수 k의 최솟값을 구하시오.

071 • 2020학년도 고3 9월 평가원 가형

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=\frac{1}{2}e^{2(t-1)}-at,\quad y=be^{t-1}$$

이다. 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도가 $(-1,\ 2)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

072 • 2020년 고3 7월 교육청 가형

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=3t-\frac{2}{\pi}\cos\pi t,\quad y=6\ln t-\frac{2}{\pi}\sin\pi t$$

이다. 시각 $t=\frac{1}{2}$에서 점 P의 속력을 구하시오. [3점]

073 • 2022학년도 고3 6월 평가원 미적분

두 함수

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$

④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

074 • 2024학년도 고3 6월 평가원 미적분

x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8

④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

075 • 2024학년도 수능 미적분

실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$

④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

076 • 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

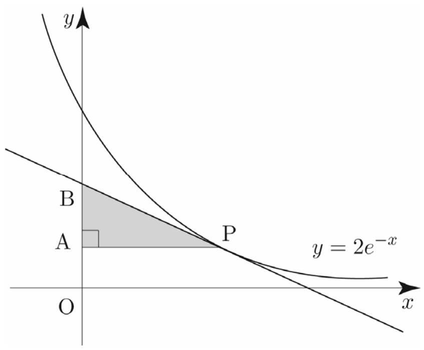
미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\sin x$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ (g\circ f)(1))$에서의 접선이 원점을 지난다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$$

일 때, 상수 k에 대하여 $30k^2$의 값을 구하시오. [4점]

086 • 2017학년도 수능 가형

곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})\ (t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은? [4점]



① 1 ② $\dfrac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ e

087 • 2018학년도 고3 6월 평가원 가형

실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

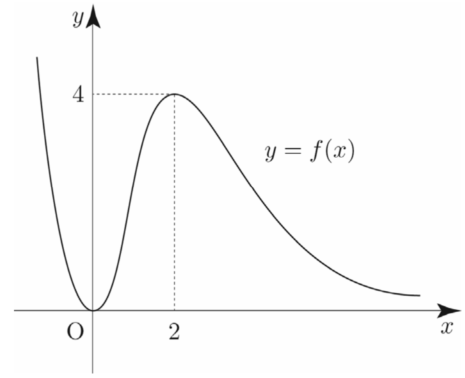
$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x\le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은? [4점]

① -2 ② $-\dfrac{9}{4}$ ③ $-\dfrac{5}{2}$ ④ $-\dfrac{11}{4}$ ⑤ -3

088 • 2017년 고3 3월 교육청 가형

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

089 • 2016년 고3 4월 교육청 가형

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$, $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{R}(r(t),\ 0)$, $\mathrm{S}(s(t),\ 0)$이라 하자. 함수 $f(t)$를 $f(t)=r(t)-s(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 극솟값은? [4점]

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{5}$ ⑤ $-\dfrac{1}{6}$

미적분

예제 6

정적분 $\int_0^2 (e^x-1)^2dx - \int_0^2 (e^x+1)^2dx$의 값을 구하시오.

풀이

$$\int_0^2 (e^x-1)^2dx - \int_0^2 (e^x+1)^2dx = \int_0^2 \{(e^x-1)^2-(e^x+1)^2\}dx = \int_0^2 \{(e^{2x}-2e^x+1)-(e^{2x}+2e^x+1)\}dx$$

$$= -4\int_0^2 e^x dx = -4\left[e^x\right]_0^2 = -4(e^2-1)$$

개념 확인문제 8 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^2dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)^2dx$

(2) $\int_9^{16} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx + \int_9^{16} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$

예제 7

정적분 $\int_0^{\pi} |\cos x|dx$의 값을 구하시오.

풀이

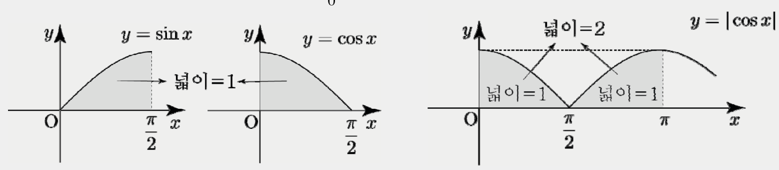
$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$일 때, $y=|\cos x|=\cos x$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$일 때, $y=|\cos x|=-\cos x$

$$\int_0^{\pi} |\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$$

Tip [예제 5]에서 살펴보았듯이 함수 $y=\sin x\,(0<x<\pi)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 2이므로 함수 $y=\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2=1$이다.

사인함수와 코사인함수는 서로 평행이동 관계이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$이다.

이를 이용하여 넓이의 관점에서 해석하면 $\int_0^{\pi} |\cos x|dx = 1+1=2$인 것이 자명하다.



개념 확인문제 9 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-1}^{1} |e^x-1|dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x-\sin x|dx$

036

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)e^{x-t}dt = \sin 3x$$

을 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$의 값은?

① $\frac{2\sqrt{2}+1}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}+2}{9}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}+3}{9}$

④ $\frac{3\sqrt{2}+1}{9}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}+2}{9}$

037

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^2 x f(tx+1)dx = 4te^t$$

을 만족시킬 때, $f(5)\times f(-3)$의 값은?

① -26 ② -24 ③ -22

④ -20 ⑤ -18

Theme 6 정적분으로 정의된 함수(New 함수)

038

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\int_0^x \frac{2t-3}{t^2-3t+4}dt$$

의 최솟값은?

① $\ln\frac{3}{16}$ ② $\ln\frac{5}{16}$ ③ $\ln\frac{7}{16}$

④ $\ln\frac{9}{16}$ ⑤ $\ln\frac{11}{16}$

039

함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{e^{t^2+1}}dt$에 대하여 상수 a가 $f(a)=3$을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{\{f(x)\}^2}{e^{x^2+1}}dx$의 값을 구하시오.

040

함수 $\int_x^{x+\ln 2} |e^t-2|dt$의 최솟값을 m이라 할 때, $e^m=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

041

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \pi\sin 2x & (0 \le x \le \pi) \\ 1-\cos 2x & (\pi < x \le 2\pi) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 방정식 $\int_a^x f(t)dt=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ (m은 자연수)라 할 때, $m+\sum_{n=1}^{m} a_n = p+q\pi$ 이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

042

상수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x^2+1} & (x \ge 0) \\ (x+2)x & (x<0) \end{cases}$$

의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때, 방정식 $\int_0^x f(s)ds=t$을 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$는 $t=k$에서 불연속일 때, $\left\{\lim_{t\to k+} g(t)\right\}^2+g(k)=e^p+q$이다. $27(p-q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

043

함수 $f(x)=\int_a^x \{2+\cos(t^3)\}dt$라 하자.

$f''(a)=-\sqrt{3}a^2\cos(a^3)$일 때, $(f^{-1})'(0)$의 값은? 구하시오. (단, a는 $0<a<\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{2}}$ 인 상수이다.)

① $\dfrac{2-2\sqrt{3}}{13}$ ② $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{13}$ ③ $\dfrac{6-2\sqrt{3}}{13}$

④ $\dfrac{8-2\sqrt{3}}{13}$ ⑤ $\dfrac{10-2\sqrt{3}}{13}$

044

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)=\int_1^x \dfrac{f(t^3)}{t}dt$ 이다.

(나) $\int_1^8 f(x)dx=27$

$\int_1^2 x^2 g(x)dx=13$일 때, $g(2)$의 값을 구하시오.

045

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$는

$$\int_0^2 \{f(x)\}^2 dx+\int_0^2 F(x)f'(x)dx=12$$

을 만족시킨다. $\int_0^2 xf'(x)dx=5$일 때,

$\int_0^2 \{F(x)\}^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, $F(2)>0$)

060 • 2024학년도 고3 9월 평가원 미적분

함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\int_{1}^{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{2}+\frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2}+e$ ③ $\frac{e^2}{2}+2e$

④ e^2+e ⑤ e^2+2e

061 • 2023년 고3 7월 교육청 미적분

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_{1}^{2}(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

062 • 2024학년도 수능 미적분

양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 양수 a에 대하여

$$\int_{1}^{a}\frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

063 • 2021년 고3 10월 교육청 미적분

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
(나) 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 -2이다.

$\int_{-1}^{3}f(x)dx=3$일 때, $\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)\,dx$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

064 • 2017년 고3 10월 교육청 가형

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. $f(1)=3$, $g(1)=3$일 때,

$\int_{1}^{3}\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$의 값은? [4점]

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

065 • 2019학년도 수능 가형

$x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3}+1$

④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{3}{2}$

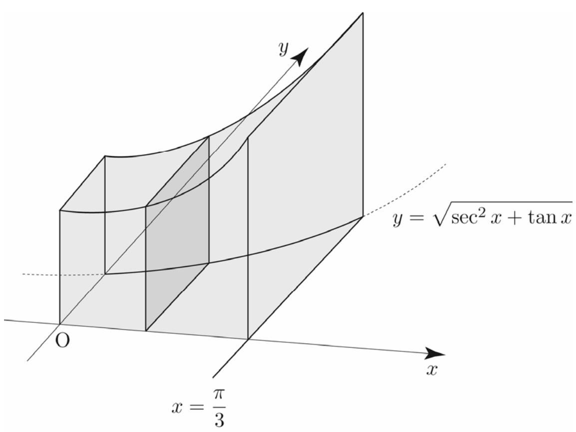
051 • 2022학년도 수능 미적분

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

052 • 2023학년도 수능 미적분

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분의 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$

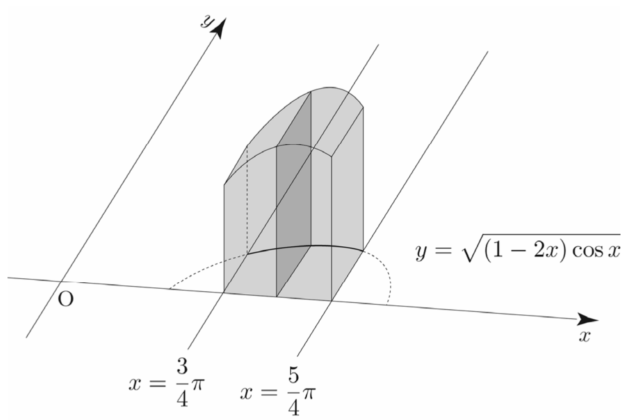
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

053 • 2008학년도 수능 가형

$x=0$에서 $x=6$까지 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이를 구하시오. [4점]

054 • 2024학년도 수능 미적분

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}\left(\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

Tip

〈보이면 꿀 안 보여도 그만〉

$X=\dfrac{e^t \pm \sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$에서

$e^{2t}+4e^{-2t}-4=(e^t)^2+(-2e^{-t})^2+2e^t(-2e^{-t})$

$=(e^t-2e^{-t})^2$

이므로

$X=\dfrac{e^t \pm |e^t-2e^{-t}|}{2}$

$\Rightarrow e^\alpha=e^{-t},\ e^\beta=e^t-e^{-t}$

100

$x^2-2xy+2y^2=15$에서 양변을 x에 대해 미분하면

$2x-2\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)+4y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x-2y}\ (x\neq 2y)$

점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{a-(a+k)}{a-2(a+k)}=\dfrac{k}{a+2k}$이고,

점 $\mathrm{B}(b,\ b+k)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{b-(b+k)}{b-2(b+k)}=\dfrac{k}{b+2k}$이다.

두 접선이 서로 수직이므로

$\dfrac{k}{a+2k}\times\dfrac{k}{b+2k}=-1$

$\Rightarrow ab+2(a+b)k+5k^2=0\ \cdots$ ㉠

점 A는 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$ 위의 점이므로

$a^2-2a(a+k)+2(a+k)^2=15$

$\Rightarrow a^2+2k^2+2ak=15\ \cdots$ ㉡

점 B는 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$ 위의 점이므로

$b^2-2b(b+k)+2(b+k)^2=15$

$\Rightarrow b^2+2k^2+2bk=15\ \cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하면

$a^2+2k^2+2ak=b^2+2k^2+2bk$

$\Rightarrow (a-b)(a+b)+2k(a-b)=0$

$\Rightarrow a+b=-2k\ (\because\ a\neq b)\ \cdots$ ㉣

㉠, ㉣을 연립하면

$ab+2(a+b)k+5k^2=0$

$\Rightarrow ab-4k^2+5k^2=0 \Rightarrow k^2=-ab\ \cdots$ ㉤

㉡에서 ㉣, ㉤을 대입하면

$a^2+2k^2+2ak=15$

$\Rightarrow a^2-2ab+a(-a-b)=15$

$\Rightarrow ab=-5$

따라서 $k^2=-ab=-(-5)=5$이다.

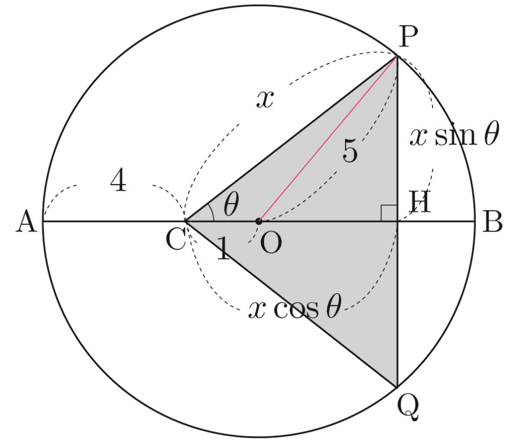
답 5

101

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원의 중심을 O라 하자.

$\overline{\mathrm{CP}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=x\sin\theta,\ \overline{\mathrm{CH}}=x\cos\theta,\ \overline{\mathrm{CO}}=1,\ \overline{\mathrm{OP}}=5$



삼각형 OPC에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\theta=\dfrac{x^2+1-25}{2x}$

$\Rightarrow 2x\cos\theta=x^2-24\ \cdots$ ㉠

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times x\cos\theta\times 2x\sin\theta=x^2\cos\theta\sin\theta$

$=x^2\frac{\sin 2\theta}{2}$ ($\because$ $\sin(\theta+\theta)=2\sin\theta\cos\theta$)

$S(\theta)$의 양변을 θ에 대해 미분하면

$S'(\theta)=2x\times\frac{dx}{d\theta}\times\frac{\sin 2\theta}{2}+x^2\cos 2\theta$

$=\frac{dx}{d\theta}\times x\sin 2\theta+x^2\cos 2\theta$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, x를 구하기 위해서

㉠에 $\theta=\frac{\pi}{4}$을 대입하면

$2x\times\frac{\sqrt{2}}{2}=x^2-24$

$\Rightarrow x^2-\sqrt{2}x-24=0$

$\Rightarrow (x+3\sqrt{2})(x-4\sqrt{2})=0$

$\Rightarrow x=4\sqrt{2}$ ($\because$ $x>0$)

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$를 구하기 위해서

㉠을 θ에 대해 미분하고, $x=4\sqrt{2}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$2x\cos\theta=x^2-24$

$\Rightarrow 2\left\{\frac{dx}{d\theta}\cos\theta+x(-\sin\theta)\right\}=2x\frac{dx}{d\theta}$

$\Rightarrow 2\left\{\frac{dx}{d\theta}\frac{\sqrt{2}}{2}+4\sqrt{2}\times-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}=8\sqrt{2}\frac{dx}{d\theta}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\frac{dx}{d\theta}-8=8\sqrt{2}\frac{dx}{d\theta}$

$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=-\frac{8}{7\sqrt{2}}$

$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{dx}{d\theta}\times x\sin 2\theta+x^2\cos 2\theta$

$=\left(-\frac{8}{7\sqrt{2}}\right)\times 4\sqrt{2}\times 1=-\frac{32}{7}$

따라서 $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-7\times\left(-\frac{32}{7}\right)=32$이다.

답 32

102

$F(x)=\ln|f(x)|$, $G(x)=\ln|g(x)\sin x|$

$F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $G'(x)=\frac{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}{g(x)\sin x}$

$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=3 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=3$

분자가 0으로 가는데 극한값이 3이므로

분모는 0으로 가야 한다.

$\lim_{x\to 1}f(x)=0 \Rightarrow f(1)=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)$라 하면

$f'(x)=Q(x)+(x-1)Q'(x)$이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{Q(x)+(x-1)Q'(x)\}}{(x-1)Q(x)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{Q(x)+(x-1)Q'(x)}{Q(x)}=3$

만약 $Q(1)\neq 0$이면

$\lim_{x\to 1}\frac{Q(x)+(x-1)Q'(x)}{Q(x)}=\frac{Q(1)}{Q(1)}=1\neq 3$

이므로 $Q(1)=0$이다.

$Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$Q(x)=(x-1)h(x)$라 하면

$Q'(x)=h(x)+(x-1)h'(x)$이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{Q(x)+(x-1)Q'(x)}{Q(x)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)h(x)+(x-1)h(x)+(x-1)^2h'(x)}{(x-1)h(x)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2h(x)+(x-1)h'(x)}{h(x)}=3$

만약 $h(1)\neq 0$이면

$\lim_{x\to 1}\frac{2h(x)+(x-1)h'(x)}{h(x)}=\frac{2h(1)}{h(1)}=2\neq 3$

이므로 $h(1)=0$이다.

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)=(x-1)(x-a)$라 하면

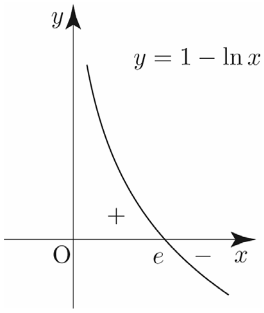
$h'(x)=x-a+x-1$이다.

② 대칭성과 주기성은 없다.

③ $f(1)=0$이므로 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

④ $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$이므로 Semi 도함수 $f'(x)=1-\ln x$

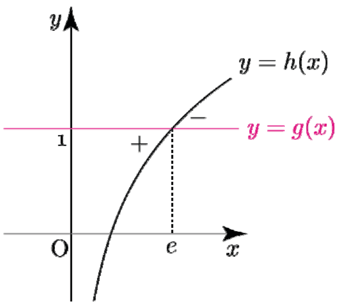
$f(e)=e^{-1}$ ($x=e$에서 극대)



Tip

〈빼기함수 Technique〉

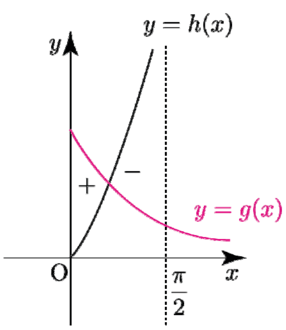
$f'(x)=g(x)-h(x)$
Semi 도함수 $f'(x)=1-\ln x$를 그려서 부호를
판단할 수 있지만 $g(x)=1,\ h(x)=\ln x$라 하고
빼기함수 Technique을 적용시켜 부호를 판단할 수도 있다.



$f'(x)$가 복잡해지면 빼기함수 Technique을 사용하는 것이
훨씬 유리하다.

ex $f'(x)=e^{-x}-\tan x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$g(x)=e^{-x},\ \ h(x)=\tan x$라 하면
$f'(x)=g(x)-h(x)$



Q. $f'(x)=1+\ln x$이면 빼기함수 Technique을
적용시킬 수 있을까?
$f'(x)=1-(-\ln x)$
$g(x)=1,\ \ h(x)=-\ln x$라 하면
빼기함수 Technique을 적용시킬 수 있다.
$f'(x)=g(x)-h(x)$

⑤ $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$이고 $x>0 \Rightarrow x^3>0$이므로

Semi 이계도함수 $f''(x)=2\ln x-3$

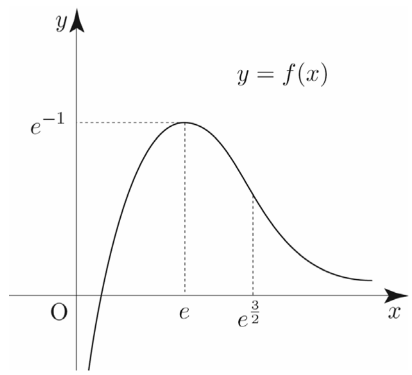
변곡점은 $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

⑥ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\left(\ln x\times\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\times\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선은

y축과 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



Tip

요즘은 (단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)와 같이 점근선을

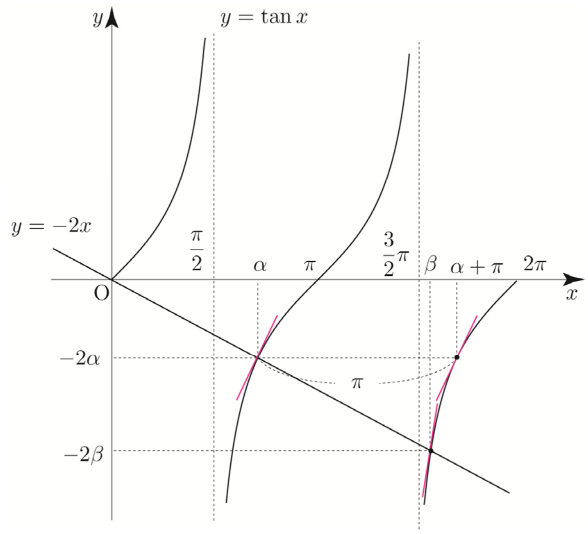
문제에서 직접 제시해주는 추세이지만

지수함수 > 다항함수 > 로그함수 순으로
크기를 결정하면 극한값을 손쉽게 계산할 수 있다.

ex1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$

ex2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{2x}=0$

$\tan x$는 주기가 π이므로 $\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$



$x=\beta$에서의 접선의 기울기가 $x=\alpha+\pi$에서의 접선의 기울기보다 크다.
즉, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$
따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}<\sec^2\alpha$

ㄴ에서 $g(x)=\tan x$라 하였고 이를 미분하면
$g'(x)=\sec^2 x$이므로 $\sec^2\alpha=g'(\alpha)$
즉, 우변을 함수 $g(x)$에서 $x=\alpha$에서의 접선의 기울기로 해석할 수 있다.
이때 우변이 기울기를 나타내는 식이므로
좌변도 기울기의 관점에서 생각해보면 아래와 같다.
(참고로 라이트 N제 수2 해설편 정적분의 활용 084번 tip에서 학습한 바 있다.)

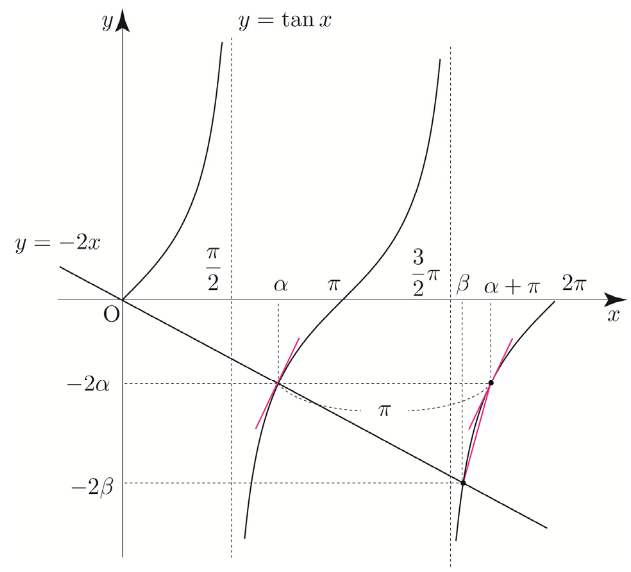
$$\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}=\frac{-2\alpha-(-2\beta)}{\alpha+\pi-\beta}=\frac{\tan(\alpha+\pi)-\tan\beta}{\alpha+\pi-\beta}$$

즉, 좌변은 점 $(\alpha+\pi,\ \tan(\alpha+\pi))$와 점 $(\beta,\ \tan\beta)$ 사이의 평균변화율로 해석할 수 있다.

$\tan x$는 주기가 π이므로 $g'(\alpha)=g'(\alpha+\pi)$이고,
$\tan x$는 열린구간 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 위로 볼록이므로

$$\frac{\tan(\alpha+\pi)-\tan\beta}{\alpha+\pi-\beta}>g'(\alpha+\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$



따라서 ㄷ은 거짓이다.

답 ③

103

2 이상의 자연수 n
$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$

$f(x)$가 역함수를 가지려면 증가 또는 감소함수이어야 하므로
$f'(x)\ge 0$ or $f'(x)\le 0$

$$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+e^{x+1}(2x+n-2)+a$$
$$=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$$

이므로 모든 x에 대하여
$e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\ge 0$ or $e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\le 0$
가 성립해야 한다.

이때, $\lim_{x\to\infty}\{e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\}=\infty$이므로
모든 실수 x에 대하여 $e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\le 0$ 일 수 없다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\ge 0$가 성립해야 한다.

$e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\ge 0 \Rightarrow a\ge e^{x+1}(-x^2-nx-1)$
$h(x)=e^{x+1}(-x^2-nx-1)$라 하면
$$h'(x)=e^{x+1}(-x^2-nx-1)+e^{x+1}(-2x-n)$$
$$=-e^{x+1}(x^2+(n+2)x+n+1)$$
$$=-(x+n+1)(x+1)e^{x+1}$$

이때 대칭성에 의해서

$a=\dfrac{b+(b+6)}{2} \Rightarrow 2a=2b+6 \Rightarrow b-a=-3$

이므로 $k=-1$이다.

$f(x)=-(x-a)^2+6$이므로

$f(x)=0 \Rightarrow -(x-a)^2+6=0 \Rightarrow (x-a)^2=6$

$\Rightarrow x=a+\sqrt{6}$ or $x=a-\sqrt{6}$

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\beta=a+\sqrt{6},\ \alpha=a-\sqrt{6}$이다.

따라서 $(\alpha-\beta)^2=\left(a-\sqrt{6}-a-\sqrt{6}\right)^2=\left(-2\sqrt{6}\right)^2=24$이다.
(참고로 $\alpha>\beta$라 해도 $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하는 것이므로 답은 동일하다.)

답 24

<여기서 잠깐!>

$k=-1$일 때, 정말 $g(x)$가 $x=b,\ x=b+6$에서 최솟값을 갖는지 확인해보자.

$g(x)=\{-(x-a)^2+8\}e^{-(x-a)^2+6}$

모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(2a-x)$이 성립하므로

함수 $g(x)=\{-(x-a)^2+8\}e^{-(x-a)^2+6}$는 $x=a$에 대하여 대칭이다.

$g'(x)=-2(x-a)\{-(x-a)^2+9\}e^{-(x-a)^2+6}$에서

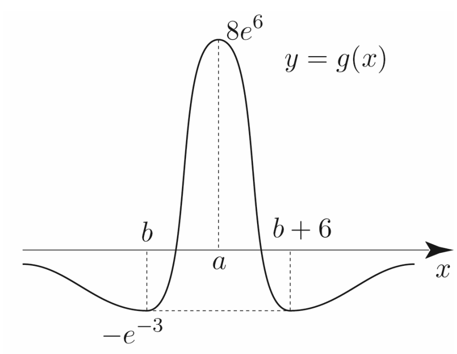
$-(x-a)\{-(x-a)^2+9\}=(x-a)(x-b)(x-b-6)$이므로

Semi 도함수 $g'(x)=(x-a)(x-b)(x-b-6)$

$\lim_{x\to\infty}g(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}g(x)=0$

$g(a)=8e^6,\ g(b)=-e^{-3}$

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.



따라서 $g(x)$는 $x=b,\ x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

105

$f(x)=6\pi(x-1)^2$

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$

$g'(x)=3f'(x)-4f'(x)\sin f(x)$

$\quad=4f'(x)\left\{\dfrac{3}{4}-\sin f(x)\right\}$

$\quad=48\pi(x-1)\left\{\dfrac{3}{4}-\sin\left(6\pi(x-1)^2\right)\right\}$

$g'(x)=0 \Rightarrow x=1$ or $\sin\left(6\pi(x-1)^2\right)=\dfrac{3}{4}$

즉, $g(x)$가 극소가 되는 x의 후보는 $x=1$ 이거나

방정식 $\sin\left(6\pi(x-1)^2\right)=\dfrac{3}{4}\ (0<x<2)$의 해이다.

$0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수를 구하는 것이므로 다음과 같이 $x=1$을 경계로 범위를 나누어 접근해보자.

① $x=1$일 때

Semi 도함수 $g'(x)=(x-1)\left\{\dfrac{3}{4}-\sin\left(6\pi(x-1)^2\right)\right\}$

$x=1$의 좌우에서 $x-1$의 부호가 $-$ $+$로 변하고,

$x=1$의 좌우에서 $\dfrac{3}{4}-\sin\left(6\pi(x-1)^2\right)$의 부호는 모두 $+$이다.

$x=1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 $-$ $+$로 변하므로

$g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

② $1<x<2$일 때

Semi 도함수 $g'(x)=(x-1)\left\{\dfrac{3}{4}-\sin\left(6\pi(x-1)^2\right)\right\}$에서

$1<x<2$일 때, $x-1>0$이므로 $\dfrac{3}{4}-\sin\left(6\pi(x-1)^2\right)$의 부호변화만 고려하면 된다.

이제 방정식 $\sin\left(6\pi(x-1)^2\right)=\dfrac{3}{4}$의 해에서 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수를 찾아보자.

$f(x)=6\pi(x-1)^2$는 $1<x<2$에서 증가하고,
$0<f(x)<6\pi$이다.

$f(x)=6\pi(x-1)^2=t\ (0<t<6\pi)$라 하자.

방정식 $\sin t=\dfrac{3}{4}\ (0<t<6\pi)$의 서로 다른 실근을

도함수의 활용 | Master step

109	①	123	30
110	⑤	124	30
111	49	125	16
112	⑤	126	43
113	②	127	331
114	72	128	29
115	15	129	②
116	64	130	5
117	25	131	6
118	64	132	71
119	72	133	④
120	15	134	31
121	39	135	27
122	48	136	④

109

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.

(나) 조건에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭(기함수)이고, (가) 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq 1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린구간에서 감소한다.

(나) 조건과 (다) 조건에 의하여

$$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$$
$$=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$$
$$=1-\{f(x)\}^2$$

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 조건에 의하여 $f(0)+f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$
$y=f(x)$의 그래프는 원점을 지나면서 원점 대칭이고,
(가) 조건에서 $f(x) \neq 1$와 ㄱ에서 $f(x) \neq -1$이므로
$-1<f(x)<1$이다.

$f'(x)=1-\{f(x)\}^2>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
따라서 ㄴ은 거짓이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

$f'(x)=1-\{f(x)\}^2$
$f''(x)=-2f'(x)f(x)$
$f'(x)>0$이므로 Semi 이계도함수 $f''(x)=-2f(x)$
$f(0)=0$이고, $f(x)$는 증가함수이므로 $x=0$의 좌우에서만 $f''(x)$의 부호가 변한다.
즉, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 점 $(0,\ 0)$ 뿐이다.
따라서 ㄷ은 거짓이다.

답 ①

110

$x>0$에서

$$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$$

ㄱ. 점 $(2,\ 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$$f'(x)=\frac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$$
$$f''(x)=\frac{1}{27}(12x^2-36x+24)$$
$$=\frac{4}{9}(x-1)(x-2)$$

$x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하고,
$f(2)=2$이므로 곡선 $y=f(x)$는 변곡점 $(2,\ 2)$을 갖는다.
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.

$$\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)=x$$
$$\Rightarrow x^4-6x^3+12x^2+19x=27x$$
$$\Rightarrow x(x^3-6x^2+12x-8)=0$$
$$\Rightarrow x(x-2)^3=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ or } x=2$$

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.

Tip

〈함수 $|h(x)|$의 미분가능성〉

Q. 미분가능한 함수 $h(x)$에 대하여 함수 $|h(x)|$가 $x=k$에서 미분이 가능한지 가능하지 않은지 확인하려면 어떻게 해야 할까?

$h(k)$의 함숫값에 따라 크게 2가지 case가 존재한다.

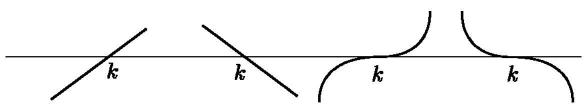
① $h(k)\neq 0$

$h(k)\neq 0$인 경우에는 미분가능한 함수를 x축 아래 부분을 접어 올리기만 하는 것이므로 실수 전체에서 미분가능하면 $h'(k)$도 당연히 존재한다.

② $h(k)=0$

문제는 ② case인데 $h(k)=0$일 때에는 case분류를 해줘야한다.

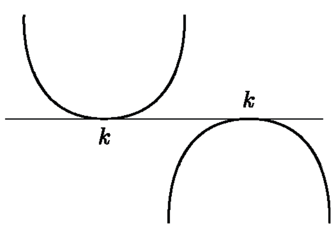
i) $x=k$를 경계로 부호가 바뀔 때는 총 4가지의 개형이 가능하다.



첫 번째와 두 번째 개형은 $h'(k)\neq 0$이므로 접어 올렸을 때 좌미분계수와 우미분계수가 같아질 수 없다. ($h'(k) = -h'(k) \Rightarrow h'(k)=0$ 모순!)

결국 미분가능하려면 세 번째와 네 번째 개형과 같이 $h'(k)=0$이어야 한다.
즉, $x=k$에서 뚫는 접선이 나와야 한다.

ii) $x=k$를 경계로 부호가 바뀌지 않을 때는 총 2가지 개형이 가능하다.



(애초에 $h(x)$가 실수 전체에서 미분가능하다고 했기 때문에 첨점(뾰족점)은 나올 수가 없다.)
결국 ② case에서 미분 가능하려면
i), ii) 모두 $h'(k)=0$ 이어야 한다.

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$가 성립한다.
$f(2)=2$이므로 $g(2)=2$이다.
$$f'(2)=\frac{1}{27}(32-72+48+19)=1$$

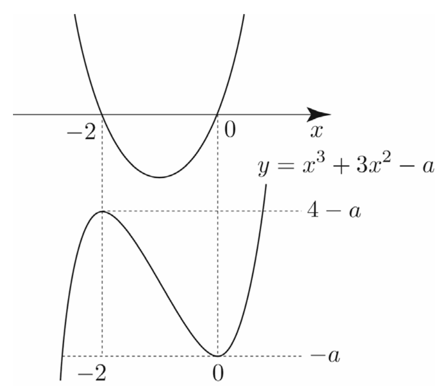
$f(g(x))=x$의 양변을 x에 대해 미분하면
$$g'(x)f'(g(x))=1$$
$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$
$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(2)}=1$$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(2)=f(2)-g(2)=0$
$h'(2)=f'(2)-g'(2)=0$
이므로 앞서 배운 tip의 논리에 따라서 함수 $|h(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.
따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

111

$f(x)=(x^3-a)e^x$
$f'(x)=(x^3+3x^2-a)e^x$
Semi 도함수 $f'(x)=x^3+3x^2-a$
$g(x)=x^3+3x^2-a$라 하면
$g'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$



a는 10 이하의 자연수이므로
$g(x)$가 x축과 만나는 점의 개수에 따라 case분류하면

① $1\leq a\leq 3$

$f(x)=(x^3-a)e^x \Rightarrow f\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=0$
Semi 도함수 $f'(x)=x^3+3x^2-a$

Tip

적분은 미분의 역연산임을 이용하면 굳이 치환적분을 하지 않아도 바로 적분가능하다.

$\int f(x)dx$를 어떻게 설정해야 미분하여 $f(x)$가 될까? 라는 사고가 핵심이다.

아래 식들은 잘 나오니 기억해 두자.

① $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$

$$\int \{f(x)+xf'(x)\}dx=xf(x)+C$$

② $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$\int \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx=f(x)g(x)+C$$

③ $\{\ln|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

④ $\{f(x)^2\}'=2f(x)f'(x)$

$$\int 2f(x)f'(x)dx=\{f(x)\}^2+C$$

⑤ $\{f(x)^3\}'=3\{f(x)\}^2f'(x)$

$$\int 3\{f(x)\}^2f'(x)dx=\{f(x)\}^3+C$$

⑥ $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

$$\int f'(g(x))g'(x)dx=f(g(x))+C$$

⑦ $\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$$\int \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx=\frac{f(x)}{x}+C$$

여러 가지 적분법 | Training – 2 step

46	①	73	325
47	⑤	74	④
48	①	75	②
49	②	76	④
50	②	77	④
51	⑤	78	⑤
52	2	79	④
53	3	80	①
54	②	81	②
55	③	82	④
56	②	83	④
57	③	84	①
58	④	85	12
59	8	86	⑤
60	②	87	⑤
61	④	88	①
62	④	89	14
63	⑤	90	19
64	①	91	④
65	②	92	①
66	④	93	26
67	12	94	③
68	②	95	①
69	⑤	96	④
70	72	97	⑤
71	④	98	①
72	④	99	②

이때, $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\left\{\ln\left(\frac{17}{16}\right)\right\}^{20}<1$

$\left(\because\ 0<\ln\frac{17}{16}<1\right)$

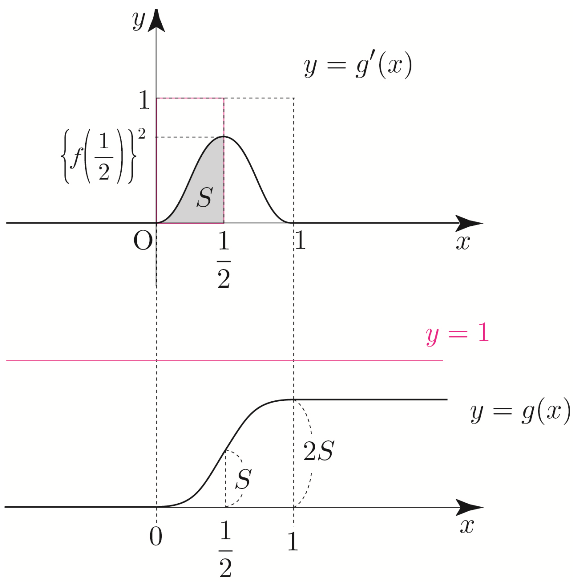
이고, $\int_0^{\frac{1}{2}}g'(x)dx=S$라 하면

S는 가로가 $\frac{1}{2}$이고, 세로가 1인 직사각형의 넓이보다

작으므로 $S<\frac{1}{2}$

또한 $g(0)=0$이므로 x축을 설정할 수 있다.

이를 바탕으로 $g(x)$를 그리면 다음과 같다.
($g'(x)$의 넓이는 $g(x)$의 함숫값의 차이와 같다.
2025 규토 라이트 수2 문제편 정적분의 활용
Guide step 참고)



ㄴ에 의하여 $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)=2S$이고,

$S<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 2S<1$이므로 $g(a)\geq 1$을 만족시키는

실수 a는 존재하지 않는다.
따라서 ㄷ은 거짓이다.

답 ②

Tip

$g'(x)=f(x)f(1-x)$
$g'(1-x)=f(1-x)f(x)$
즉, $g'(x)=g'(1-x)$가 성립하므로

$y=f(x)f(1-x)$의 그래프는 $x=\frac{1}{2}$에 대하여

대칭인 것이 자명하다.

082

$0\leq a\leq 8$

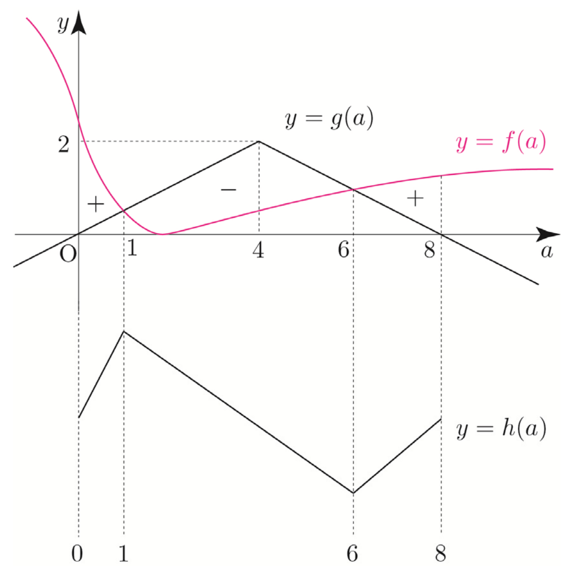
$h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$라 하자.

(New 함수 Technique)

$h(a)=F(a)-F(0)+G(8)-G(a)$

$h'(a)=f(a)-g(a)$

두 함수 $y=f(a)$, $y=g(a)$의 그래프를 이용하여
빼기함수 Technique으로 $h'(a)$의 부호를 처리해 보자.



$h(a)$는 $x=6$에서 극소를 갖는다.

$h(0)=\int_0^8 g(x)dx=8$

$h(6)=\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx$

$=\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+1$

$=\left[\frac{5}{2}x-5\ln|x^2+4|\right]_0^6+1$

$=15-5\ln 40+5\ln 4+1$

$=16-5\ln 10$

$10=5\ln e^2<5\ln 10$이므로 $h(6)<h(0)$

따라서 최솟값은 $h(6)=16-5\ln 10$이다.

답 ④

이번에는 a의 범위에 따라 case분류하여 $h(a)$를 직접 구해보자.

① $0 \le a \le 4$일 때

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4}\right)dx + \int_a^4 \frac{x}{2}dx + \int_4^8 \frac{-x+8}{2}dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x - 5\ln|x^2+4|\right]_0^a + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_a^4 + \left[-\frac{1}{4}x^2+4x\right]_4^8$$

$$= \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln 4 + 4 - \frac{1}{4}a^2 + 4$$

$h(a) = \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln 4 + 4 - \frac{1}{4}a^2 + 4$라 하면

$$h'(a) = \frac{5}{2} - \frac{10a}{a^2+4} - \frac{a}{2} = \frac{-(a-1)(a^2-4a+20)}{2(a^2+4)}$$

$h(a)$는 $a=1$에서 극대이고,

$h(0)=8,\ h(1) = \frac{41}{4} - 5\ln 5 + 5\ln 4,\ h(4) = 14 - 5\ln 5$

② $4 < a \le 8$일 때

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4}\right)dx + \int_a^8 \frac{-x+8}{2}dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x - 5\ln|x^2+4|\right]_0^a + \left[-\frac{1}{4}x^2+4x\right]_a^8$$

$$= \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln 4 + 16 + \frac{1}{4}a^2 - 4a$$

$h(a) = \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln 4 + 16 + \frac{1}{4}a^2 - 4a$라 하면

$$h'(a) = \frac{5}{2} - \frac{10a}{a^2+4} + \frac{a}{2} - 4 = \frac{(a-6)(a+1)(a+2)}{2(a^2+4)}$$

$h(a)$는 $a=6$에서 극소이고,

$h(6) = 16 - 5\ln 10$

따라서 최솟값은 $h(6) = 16 - 5\ln 10$이다.

083

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 1$$

$\cos x \int_0^x f(t)dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ (단, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$)

$\cos x\,\{F(x) - F(0)\} = \sin x \left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(x)\right\}$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin x\,\{F(x) - F(0)\} + (\cos x)f(x)$$

$$= \cos x \left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(x)\right\} - (\sin x)f(x)$$

양변에 $x = \frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)\right\} + \frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} - \frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because\ (가))$$

따라서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$이다.

답 ④

다르게 풀어보자.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 1$$

$$\Rightarrow \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 1 - \int_0^x f(t)dt$$

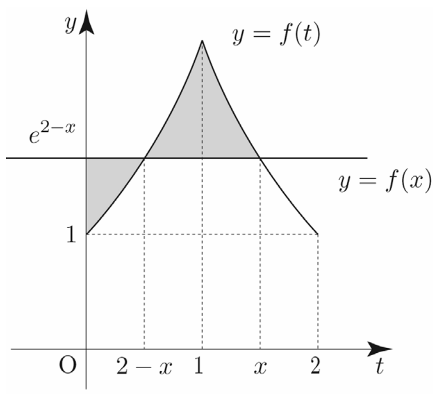
이므로 이를 (나) 조건에 대입하면

$$\cos x \int_0^x f(t)dt = \sin x \left(1 - \int_0^x f(t)dt\right)$$

$$\Rightarrow (\cos x + \sin x)\int_0^x f(t)dt = \sin x$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

② $1 < x < 2$일 때



$0 < t < 2-x$일 때, $f(x) \geq f(t)$
$2-x \leq t < x$일 때, $f(x) \leq f(t)$이므로

$$g(x)=\int_{0}^{x}|f(x)-f(t)|dt$$
$$=\int_{0}^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt+\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt$$

①에 의하여

$$\int_{0}^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt=(2-x-1)e^{2-x}+1$$
$$=(1-x)e^{2-x}+1$$

함수 $y=e^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=e^{x}$의 그래프와
직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{2-x}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt=2\int_{1}^{x}\{f(t)-f(x)\}dt$$
$$=2\int_{1}^{x}(e^{2-t}-e^{2-x})dt$$
$$=2\Big[-e^{2-t}-te^{2-x}\Big]_{1}^{x}$$
$$=2\{(-e^{2-x}-xe^{2-x})-(-e-e^{2-x})\}$$
$$=2e-2xe^{2-x}$$

$$\therefore\ g(x)=(1-x)e^{2-x}+1+2e-2xe^{2-x}$$
$$=(1-3x)e^{2-x}+2e+1$$

①, ②에 의하여

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)e^{x}+1 & (0 < x \leq 1)\\ (1-3x)e^{2-x}+2e+1 & (1 < x < 2)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}xe^{x} & (0 < x < 1)\\ (3x-4)e^{2-x} & (1 < x < 2)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $g(1)=1$을 갖고,

$x=\frac{4}{3}$에서 극솟값 $g\left(\frac{4}{3}\right)=2e-3e^{\frac{2}{3}}+1$을 갖는다.

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$$1-\left(2e-3e^{\frac{2}{3}}+1\right)=-2e+3e^{\frac{2}{3}}=-2e+3\sqrt[3]{e^{2}}=ae+b\sqrt[3]{e^{2}}$$

따라서 $(ab)^{2}=a^{2}b^{2}=(-2)^{2}\times 3^{2}=36$

답 36

109

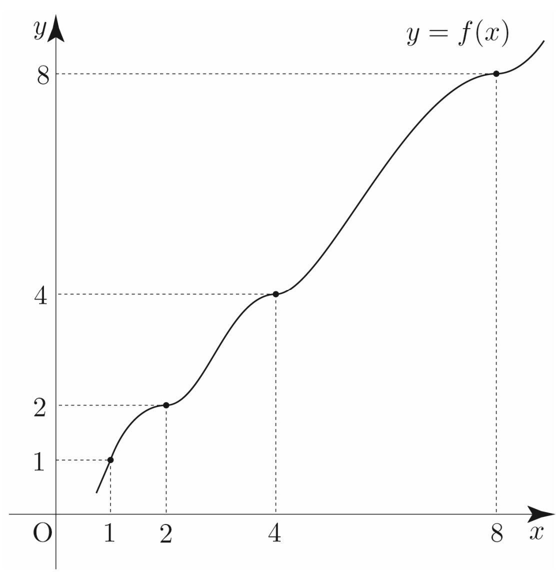
실수 전체의 집합에서 증가하고
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

(가) $f(1)=1,\ \int_{1}^{2}f(x)dx=\frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$f(g(x))=x$

$f(1)=1$이므로 (나) 조건에 의해서
$g(2)=2f(1)=2 \Rightarrow f(2)=2$
$g(4)=2f(2)=4 \Rightarrow f(4)=4$
$g(8)=2f(4)=8 \Rightarrow f(8)=8$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.



$$\int_1^8 xf'(x)dx = [xf(x)]_1^8 - \int_1^8 f(x)dx$$
$$= 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x)dx$$
$$= 63 - \int_1^8 f(x)dx \quad \cdots \text{ ㉠}$$

이므로 $\int_1^8 f(x)dx$의 값만 구하면 된다.

$\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4}$와 $g(2x) = 2f(x)$ $(x \geq 1)$를 바탕으로 $\int_1^8 f(x)dx$의 값을 구해보자.

$$\int_1^2 g(2x)dx = 2\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{2}$$

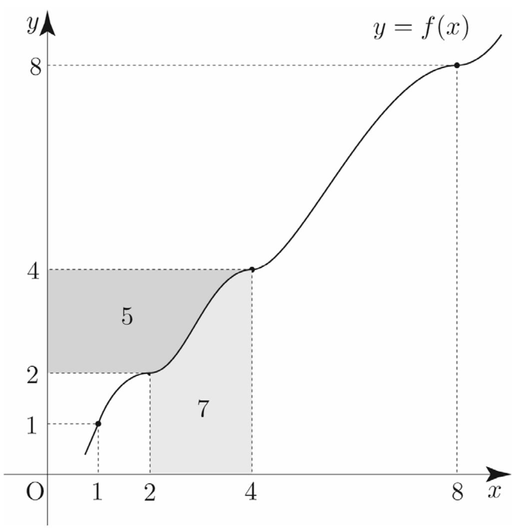
$2x = t$라 하면 $2 = \frac{dt}{dx}$

$x = 1$일 때, $t = 2$, $x = 2$일 때, $t = 4$

$$\int_1^2 g(2x)dx = \frac{1}{2}\int_2^4 g(t)dt = \frac{5}{2} \Rightarrow \int_2^4 g(x)dx = 5$$

2025 규토 라이트 N제 수2 정적분의 활용 Guide step에서 함수 $y = f(x)$의 그래프로 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프를 해석하는 방법을 학습하였다.

이를 이용하여 $\int_2^4 f(x)dx$의 값을 구해보자.



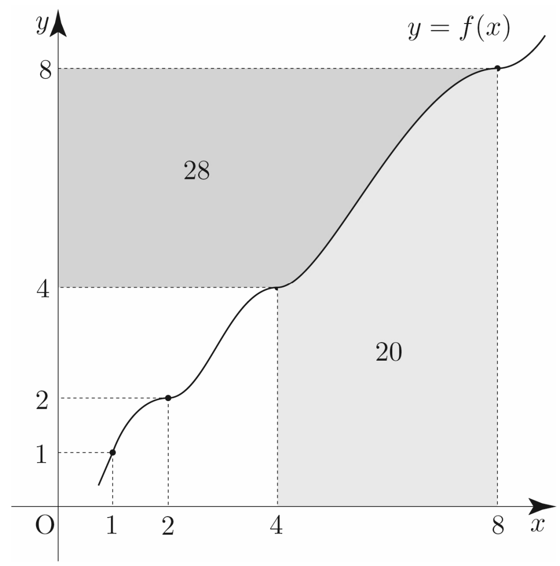
$$\int_2^4 f(x)dx = 16 - \left(4 + \int_2^4 g(x)dx\right) = 16 - 9 = 7$$

$$\int_2^4 g(2x)dx = 2\int_2^4 f(x)dx = 14$$

$2x = t$라 하면 $2 = \frac{dt}{dx}$

$x = 2$일 때, $t = 4$, $x = 4$일 때, $t = 8$

$$\int_2^4 g(2x)dx = \frac{1}{2}\int_4^8 g(t)dt = 14 \Rightarrow \int_4^8 g(x)dx = 28$$



$$\int_4^8 f(x)dx = 64 - \left(16 + \int_4^8 g(x)dx\right) = 64 - 44 = 20$$

$$\therefore \int_1^8 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx$$
$$= \frac{5}{4} + 7 + 20 = \frac{113}{4}$$

㉠에 의해서

$\int_1^8 xf'(x)dx = 63 - \int_1^8 f(x)dx = 63 - \frac{113}{4} = \frac{139}{4}$이다.

따라서 $p + q = 143$이다.

답 143

110

모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4 - 2f(t)}\,dt$

$f(0) = 0$, $f'(x) = \sqrt{4 - 2f(x)}$

$f'(x) \geq 0$이므로 $f(x)$는 감소하지 않는다.

$\sqrt{4 - 2f(x)}$에서 $4 - 2f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq 2$

$g(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ 라 하면

$g(t+1)-g(t)=-\dfrac{2}{t^2}$

양변을 t에 대하여 적분하면

$G(t+1)-G(t)=\dfrac{2}{t}+C$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2 g(x)dx=G(2)-G(1)=2$이므로

$G(t+1)-G(t)=\dfrac{2}{t}+C$의 양변에 $t=1$을 대입하면

$2=2+C \Rightarrow C=0$

$\therefore\ G(t+1)-G(t)=\dfrac{2}{t} \cdots$ ㉠

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=G\left(\frac{11}{2}\right)-G\left(\frac{7}{2}\right)$이므로

㉠의 양변에 $t=\dfrac{9}{2}$, $t=\dfrac{7}{2}$을 각각 대입하면

$G\left(\dfrac{11}{2}\right)-G\left(\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{4}{9}$

$G\left(\dfrac{9}{2}\right)-G\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{4}{7}$

두 식을 각 변끼리 더하여 정리하면 다음과 같다.

$G\left(\dfrac{11}{2}\right)-G\left(\dfrac{9}{2}\right)+G\left(\dfrac{9}{2}\right)-G\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{7}$

$\Rightarrow\ G\left(\dfrac{11}{2}\right)-G\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{64}{63}$

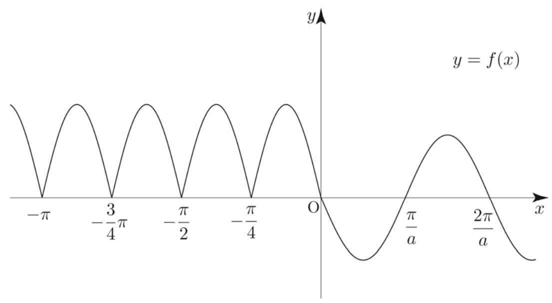
$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=G\left(\frac{11}{2}\right)-G\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{64}{63}=\frac{q}{p}$

따라서 $p+q=63+64=127$이다.

답 127

116

$$f(x)=\begin{cases} 2|\sin 4x| & (x<0) \\ -\sin ax & (x\ge 0)\end{cases}$$



$h(x)=\displaystyle\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$라 하면 $h'(x)=f(x)$, $h(-a\pi)=0$

$g(x)=\left|\displaystyle\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|=|h(x)|$

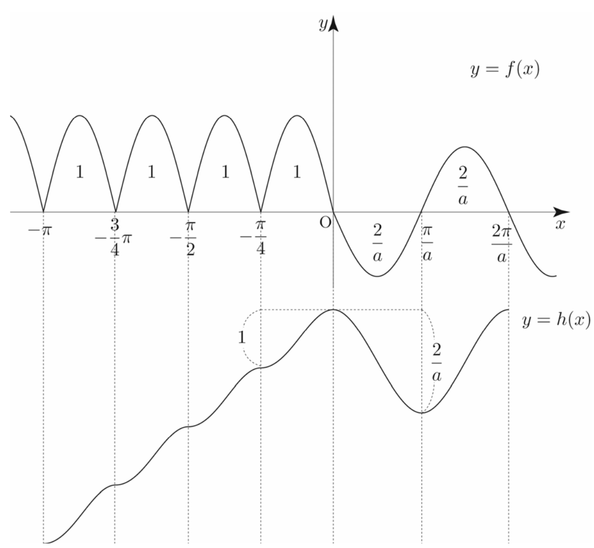
대략적인 판단을 위해 $f(x)$를 바탕으로 $h(x)$을 그려보자.
대략적인 $h(x)$를 그리기 위해서는 $f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 알아야 한다. (얼마만큼 증가하나? 넓이만큼 증가한다. t2 95번과 맥이 같은 문제이다.)

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} -2\sin 4x dx$

$\displaystyle=\left[\frac{\cos 4x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=1$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{a}} -f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin ax\, dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{\cos ax}{a}\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a}$

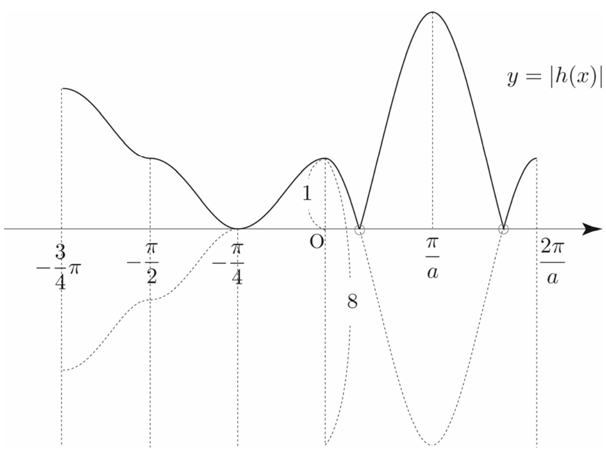


$|h(x)|$의 그래프를 그리려면 x축이 중요한데
$|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$h(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 $h'(k)=0$이어야 한다.

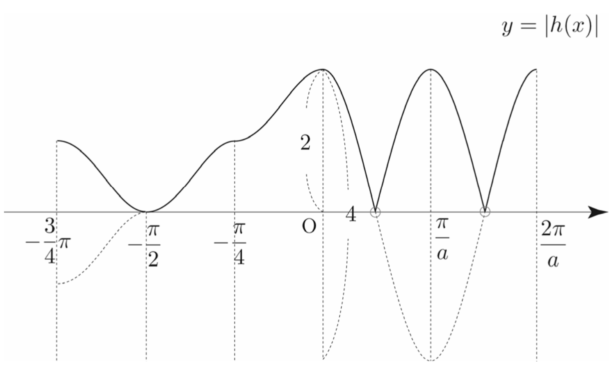
이때, $h(-a\pi)=0$ $(0<a<2)$이므로 우선적으로
$h'(-a\pi)=0$ $(0<a<2)$을 만족시켜야 한다.
즉, $a=\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \cdots$

문제에서 a의 최솟값을 구하라고 했으므로 가능한 a의
후보 중에서 작은 수부터 차례대로 case분류해보자.

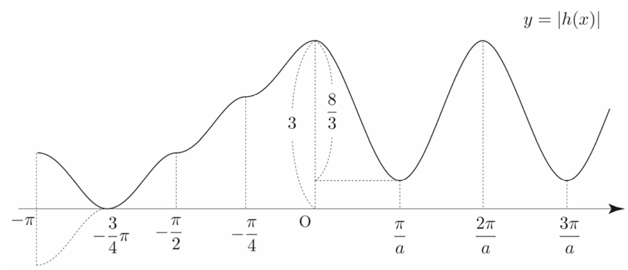
① $a=\frac{1}{4}$인 경우
$h\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$이고, $\frac{2}{a}=8$이므로 정의역이 양수인 부분에서
첨점이 발생하여 함수 $|h(x)|$는 실수 전체의 집합에서
미분가능하지 않아 조건을 만족시키지 않는다.



② $a=\frac{1}{2}$인 경우
$h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$이고, $\frac{2}{a}=4$이므로 정의역이 양수인 부분에서
첨점이 발생하여 함수 $|h(x)|$는 실수 전체의 집합에서
미분가능하지 않아 조건을 만족시키지 않는다.



③ $a=\frac{3}{4}$
$h\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=0$이고, $\frac{2}{a}=\frac{8}{3}<3$이므로 $x>0$에서 $h(x)>0$
이므로 함수 $|h(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



따라서 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

답 ②

117

$x<0$일 때, $f(x)=-4xe^{4x^2}$
$x<0$일 때, $f'(x)=-\left(4e^{4x^2}+32x^2e^{4x^2}\right)<0$
이므로 $x<0$에서 $f(x)$는 감소한다.

t의 값이 증가할수록 $g(t)$의 값은 감소하고,
모든 양수 t에 대하여 $2g(t)+h(t)=k \Rightarrow h(t)=k-2g(t)$
이므로 t의 값이 증가할수록 $h(t)$의 값은 증가한다.
이때, $\lim_{t\to0+}g(t)=0 \Rightarrow \lim_{t\to0+}h(t)=k$이므로 $f(k)=0$이고,
모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이므로
$0\leq x\leq k$일 때, 함수 $f(x)=0$이고,
$x>k$에서 함수 $f(x)$는 증가해야 한다.