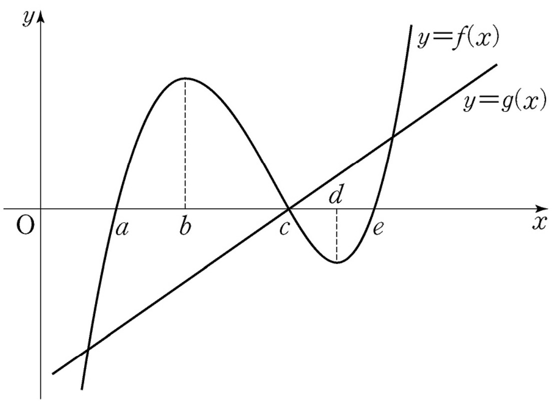
수학 II

[미분법 | 함수의 증감]

★

삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$이다.

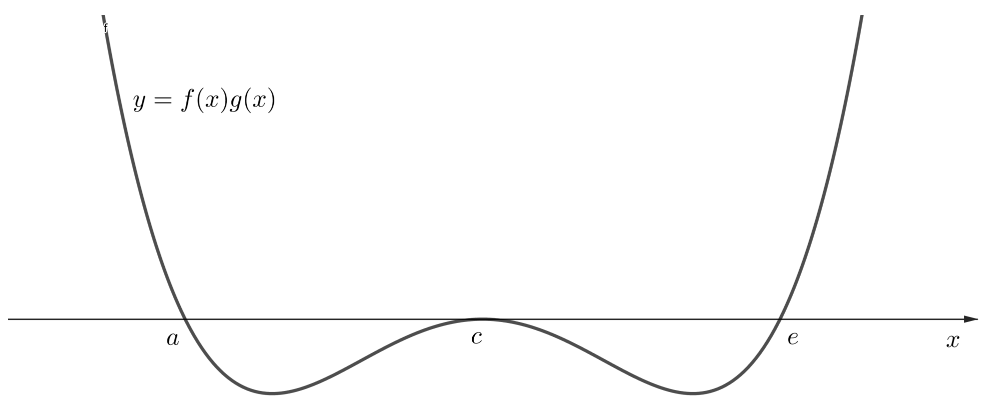


함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$와 $x=q$에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p<q$)

① $a<p<b$이고 $c<q<d$
② $a<p<b$이고 $d<q<e$
③ $b<p<c$이고 $c<q<d$
④ $b<p<c$이고 $d<q<e$
⑤ $c<p<d$이고 $d<q<e$

먼저 $y=f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수일 것이다.
또한 a, c, e에서 실근을 갖고 그 중 c에서 중근을 갖는다.

그렇다면, 사차함수 $y=f(x)g(x)$의 대략적인 개형은 다음과 같을 것이다.



그러나, 아래의 선지들을 보면 극소$(p,\ q)$가 각각 $x=b$, $x=d$**보다 왼쪽에 있는지 오른쪽에 있는지 묻고 있는 것**이 출제 의도임을 알 수 있다.

"이를 알기 위해서는 $y=f(x)g(x)$를 미분해봐야겠다."

$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이다. … ㉠

1) 여기서 $x=b$, d는 각각 $f(x)$의 극대, 극소이므로, <u>$f'(b)=f'(d)=0$**이다.**</u>

2) 또한, $y=g(x)$는 우상향하는 직선이므로 $g'(x)$는 양수인 상수일 것이다.
<u>따라서 $g'(x)=m$이라고 하자.</u> $(m>0)$

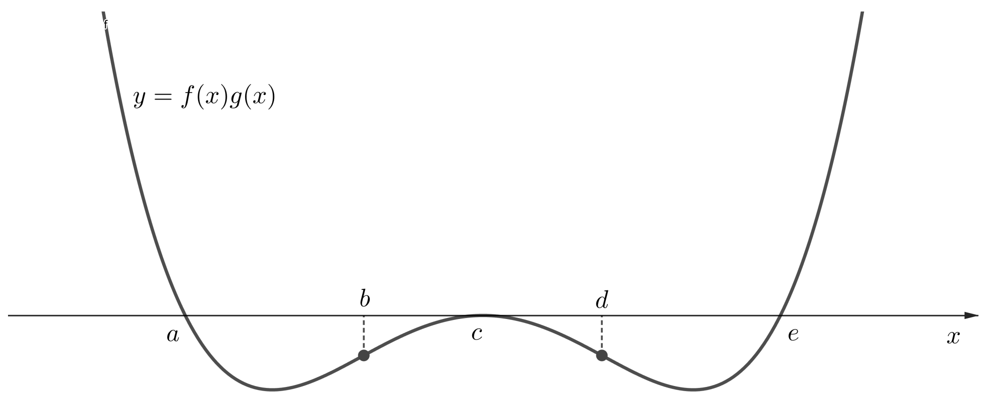
이 두 가지를 고려하면 ㉠에 $x=b$와 $x=d$를 대입했을 때 각각
$\frac{dy}{dx}=mf(b)$, $\frac{dy}{dx}=mf(d)$를 만족할 것이다.

$f(b)>0$, $f(d)<0$이므로

$\frac{dy}{dx}=mf(b)>0$, $\frac{dy}{dx}=mf(d)<0$

즉, $y=f(x)g(x)$는 <u>$x=b$**에서 증가하고,** $x=d$**에서 감소한다**</u>.

이를 그래프에 표시하면 다음과 같다.



이를 통해 극소의 x좌표 p, q의 위치를 추정할 수 있다.

$\therefore\ a<p<b$, $d<q<e$

답: ②

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 함수의 증감을 통해 극솟점의 위치를 추론할 수 있다.

| NOTES

- 객관식 문제이므로 선지를 통해 결국 p, q가 $a<p<c$, $c<q<e$가 중요한 것이 아니라
b, d보다 **<u>왼쪽에 있는지 오른쪽에 있는지를 묻고 있음</u>**을 알고 푸는 것이 방향성을 잡기에 보다 용이하다.

이 사실을 안 채로 문제를 풀다보면 자연스럽게 <u>$y=f(x)g(x)$**를 미분하려는 시도**</u>로 이어질 것이다.

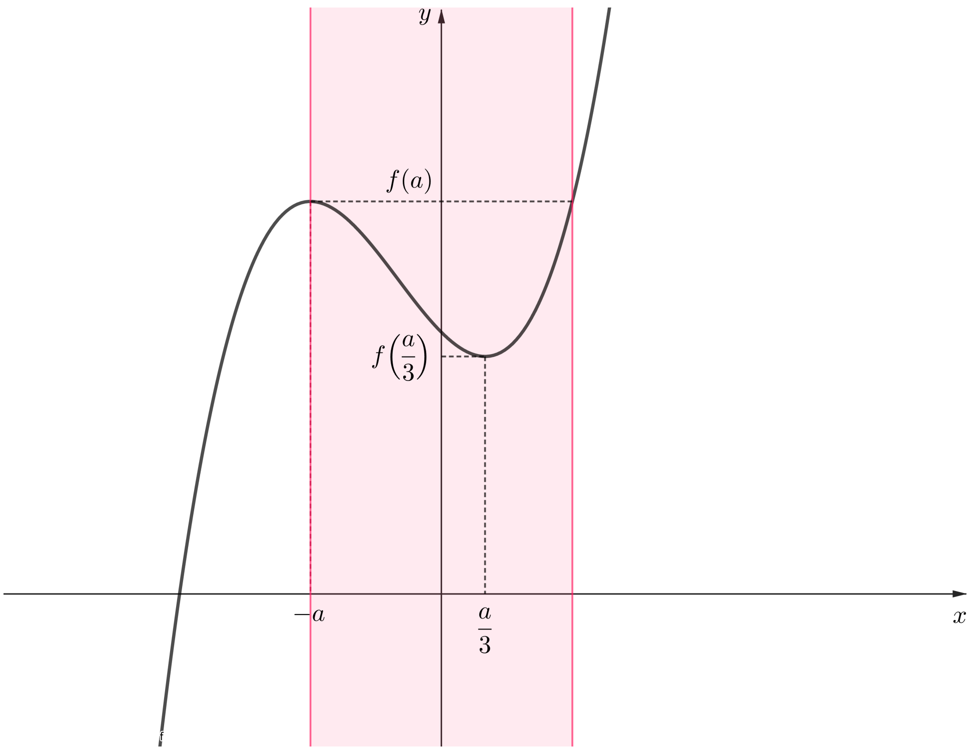
★★

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오.

$f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$를 미분하면

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(3x-a)(x+a)$

삼각함수의 비율관계에 의해 $f(-a)=f(a)$이고, 그래프를 그려보면 다음과 같다.



여기서 a는 양수이므로, 분홍색으로 칠해진 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서

최댓값 $f(a)=a^3+2=M$, 최솟값 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}\ \Rightarrow\ a=2$

$\therefore\ f(a)=a^3+2=10=M$

따라서 $a+M=12$

답: 12

| NOTES

- 이러한 유형의 문제에서 **삼각함수의 비율관계**는 풀이 시간을 비약적으로 단축시켜준다.
  실전에서 사용할 수 있도록 꼭 미리 알아두도록 하자.

03

★★

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다. (나) $f'(-3)=f'(3)$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(가) $x=-2$ 에서 극댓값을 갖는다.

"삼차함수인 $f(x)$가 극댓값을 갖는다는 것은 $f'(x)$ **가 서로 다른 두 실근**을 갖는다고 해석할 수 있겠군."

(나) $f'(-3)=f'(3)$

"$f'(x)$는 이차함수이고, $f'(-3)=f'(3)$이므로 $f'(x)$의 **대칭축은 $x=0$ 이구나**."

$\therefore\ f'(x)=f'(-x)$

그렇다면 (가)에서 $f'(-2)=0$이므로 $f'(-2)=f'(2)=0$ 임을 알 수 있다.

즉, $f(x)$는 **$x=-2$에서 극대, $x=2$에서 극소를 가진다**는 것이다.

또한, $x=-2$에서 극대를 가져야 하므로 **최고차항의 계수는 양수**이다.

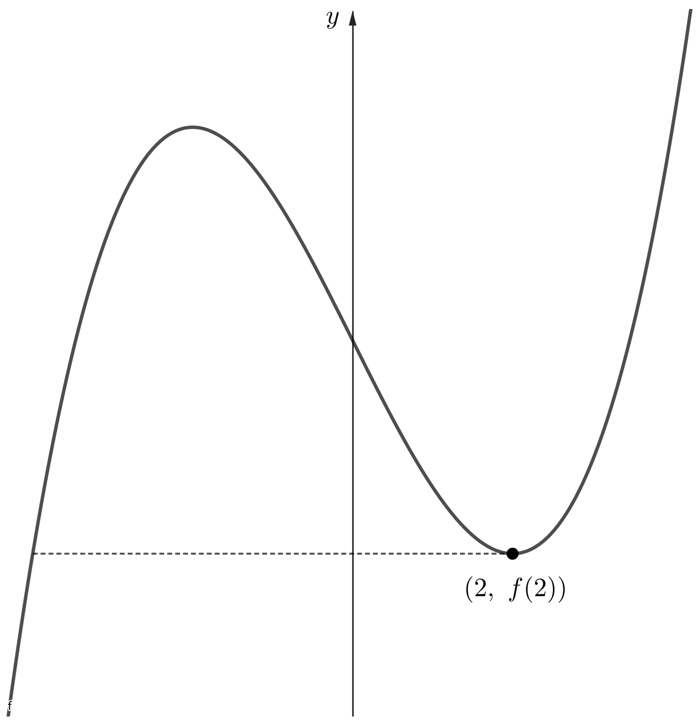
따라서, $f'(x)=3h(x^2-4)$ $(h>0)$라고 할 수 있다. (단, h는 $f(x)$의 최고차항 계수이다.)

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

최고차항의 계수가 양수인 이차함수인 $f'(x)$는 $x=0$이 대칭축이므로,
$x=0$에서 최솟값을 갖는다. ⋯ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x) = f(2)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 $f(2)$ 를 가지므로 $f(x) = f(2)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\cdots$ (참)

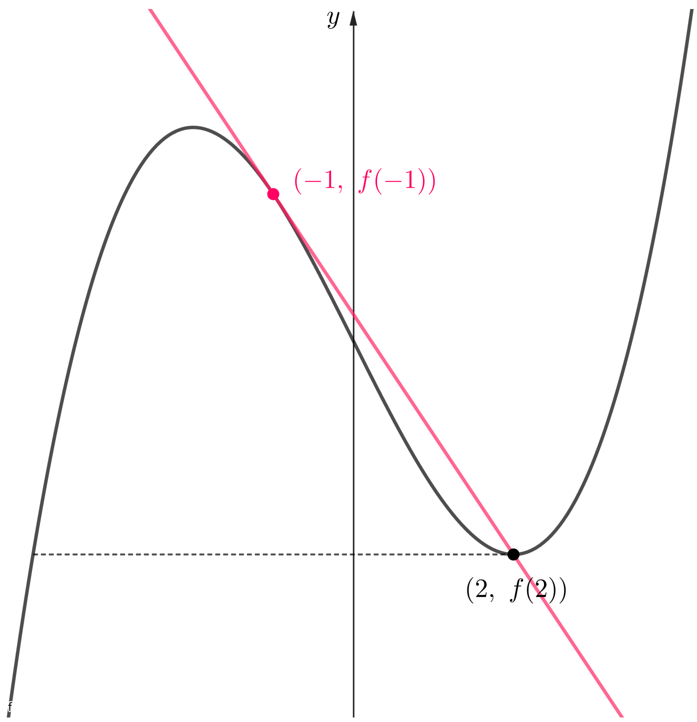


ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

여기서, 두 가지 방법으로 ㄷ이 참임을 밝힐 수 있다.

$SOL1)$ 접선과 직선의 기울기를 이용할 경우

"만약 ㄷ이 참이라면, 점 $(-1,\ f(-1))$과 점 $(2,\ f(2))$을 지나는 **직선의 기울기**가
점 $(-1,\ f(-1))$ 에서의 **접선의 기울기와 일치**할 것이다."



$f'(x)=3h(x^2-4)$ 이므로 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-9h$ 이고,

점 $(-1,\ f(-1))$과 점 $(2,\ f(2))$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{\int_{-1}^{2} f'(x)dx}{3}=\dfrac{-27h}{3}=-9h$ 이다.

두 기울기가 일치하므로, ㄷ은 참이다. ⋯ (참)

$SOL2)$ 삼차함수의 비율관계를 이용할 경우 (NOTES 참고)

접점 $(-1,\ f(-1))$에서 접선을 그을 때, 삼차함수 $f(x)$와 만나는 나머지 한 점을 $(a,\ f(a))$라고 해보자.

삼차함수의 비율관계를 떠올려보면,
x좌표만 놓고 볼 때 변곡점의 x좌표는 $x=-1$과 $x=a$를 $1:2$로 내분한다.

변곡점의 x좌표는 0이므로, 이를 통해 a를 추정해보면 $a=2$이다. ⋯ (참)

답: ⑤

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 주어진 조건을 이용하여 **도함수의 정보**를 얻고 이를 통해 **원함수의 그래프 개형을 추론**할 수 있는가?

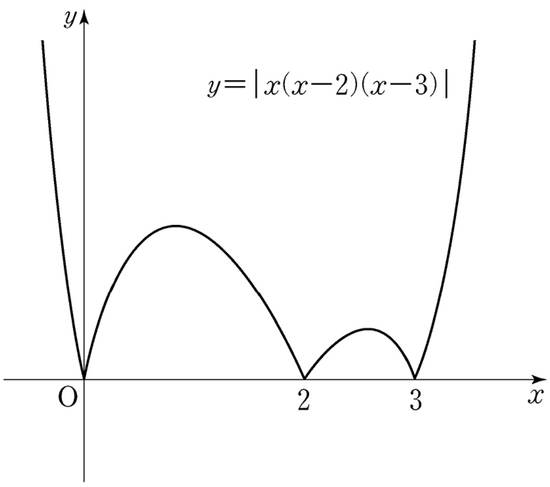
| NOTES

- **삼차함수와 직선이 접하는** 모든 경우, 접하는 점을 P, 접하지 않고 통과하는 점을 Q라고 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$를 $1:2$로 내분하는 점이 **삼차함수의 변곡점과 x좌표가 같다**는 사실을 경험적으로 알고 있다면 ㄷ의 참 여부를 쉽게 알 수 있다.

★★★

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $0,\ 2,\ 3$뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

문제를 들어가기 앞서 $h(x)=x(x-2)(x-3)$이라 하자.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $0,\ 2,\ 3$뿐이다.

"$f(x)$는 사차함수니까 세 개의 실근 중 하나는 **중근을 가지겠네**."

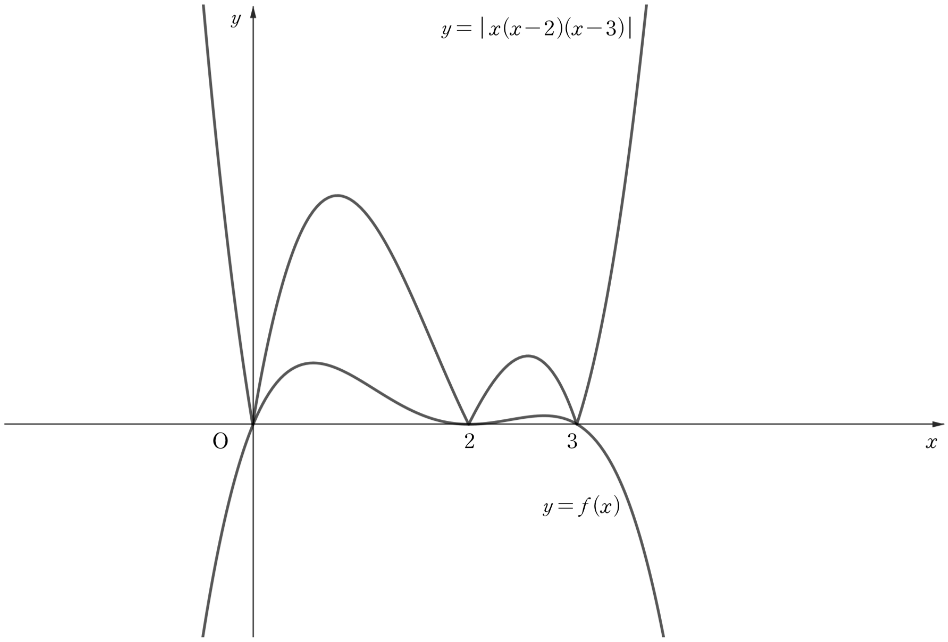
그럼 다음과 같이 세 가지의 케이스로 나누어 생각해볼 수 있다. $(a<0)$
$f(x)=ax^2(x-2)(x-3)$, $f(x)=ax(x-2)^2(x-3)$, $f(x)=ax(x-2)(x-3)^2$

그러나, 선지의 모든 답이 양수이므로 $f(1)<0$인 $f(x)=ax^2(x-2)(x-3)$는 고려 대상에서 제외하도록 하자.
(뒤에 증명과정이 있으니 필요 시 참고)

(나) $f(x)$와 $|h(x)|$중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

"$g(x)$의 **미분가능성을 파악**하기 위해 $f(x)$와 $|h(x)|$의 그래프를 그려보자."

$i)$ $f(x) = ax(x-2)^2(x-3)$ 인 경우



모든 실수 x에 대해 $f(x) \leq |h(x)|$ 이므로 $g(x) = f(x)$이다.

$x=0$에서 두 함수의 **우미분계수를 비교**해보면 $f'(0)=-12a$, $h'(0)=6$이고,

$-12a \leq 6$가 성립되어야 하므로 $a \geq -\dfrac{1}{2}$이다. ⋯ ㉠

이후 $x=3$에서 두 함수의 **좌미분계수를 비교**해보면

$f'(3)=3a$, $-h'(3)=-3$이고,

$3a \geq -3$가 성립되어야 하므로 $a \geq -1$이다. ⋯ ㉡

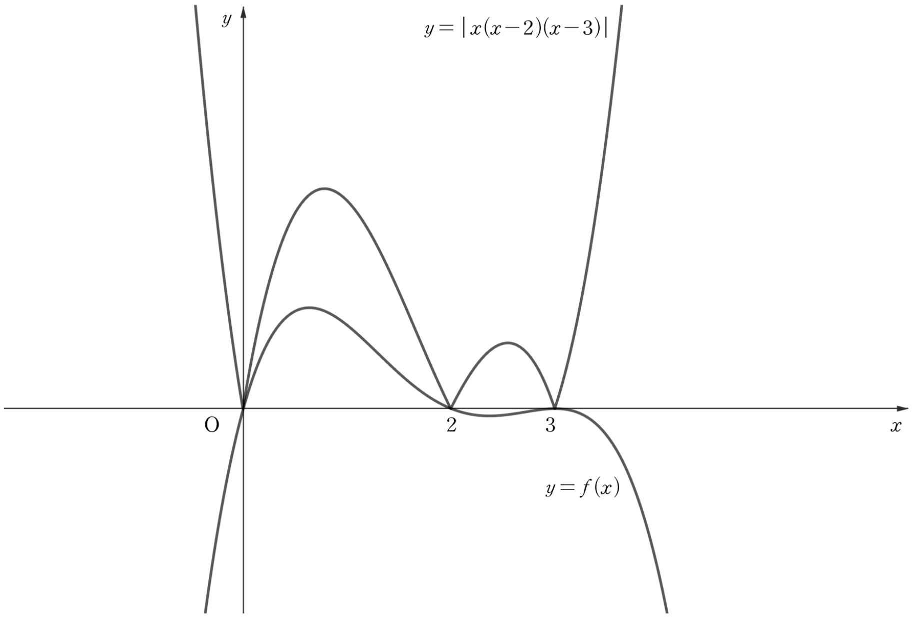
(미분계수를 비교하여 그래프의 대소관계를 찾는 내용은 하단의 NOTES를 참고하자)

㉠과 ㉡을 고려하면 $a \geq -\dfrac{1}{2}$, $a \geq -1$, $a<0$ (최고차항의 계수가 음수)가 모두 성립해야 하므로

$-\dfrac{1}{2} \leq a < 0$.

$\therefore$ $f(1) = -2a$ 이므로 $f(1)$의 최댓값은 1이다.

$ii)$ $f(x) = ax(x-2)(x-3)^2$ 인 경우



마찬가지로 모든 실수 x에 대해 $f(x) \leq |h(x)|$이므로 $g(x)=f(x)$이다.

$x=0$에서 두 함수의 **우미분계수를 비교**해보면,
$f'(0)=-18a$, $h'(0)=6$이고
$-18a \leq 6$가 성립되어야 하므로 $a \geq -\frac{1}{3}$이다. ⋯ ⓒ

이후 $x=2$에서 두 함수의 **좌미분계수를 비교**해보면,
$f'(2)=2a$, $h'(2)=-2$이고
$2a \geq -2$가 성립되어야 하므로 $a \geq -1$이다. ⋯ ⓓ

ⓒ과 ⓓ를 고려하면 $a \geq -\frac{1}{3}$, $a \geq -1$, $a<0$가 모두 성립해야 하므로 $-\frac{1}{3} \leq a < 0$.

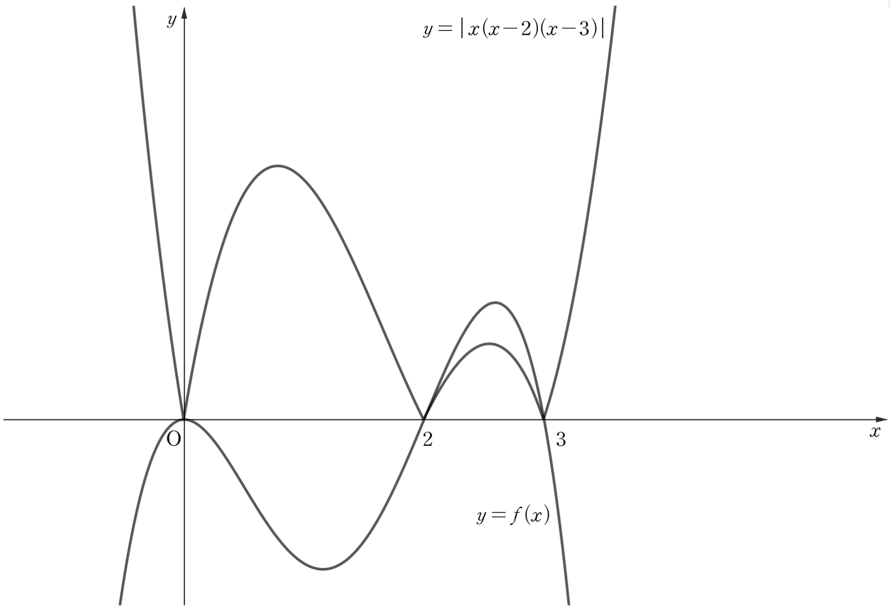
$\therefore$ $f(1)=-4a$이므로 $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

$i)$, $ii)$ 중 $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

답: ②

$ADD)$ $f(x)=ax^2(x-2)(x-3)$일 때를 생각해보자.

개형 (ㄱ)



(ㄱ)의 경우,

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<2,\ x>3) \\ |h(x)| & (2\le x\le 3) \end{cases}$$

구간에 따라 함수가 바뀌므로, **<u>구간이 바뀌는 지점에서의 미분가능성</u>**을 판단해야한다.

$\lim_{x\to 2-} g'(x)=f'(2)=-4a$이고, $\lim_{x\to 2+} f'(x)=-h'(2)=2$이므로

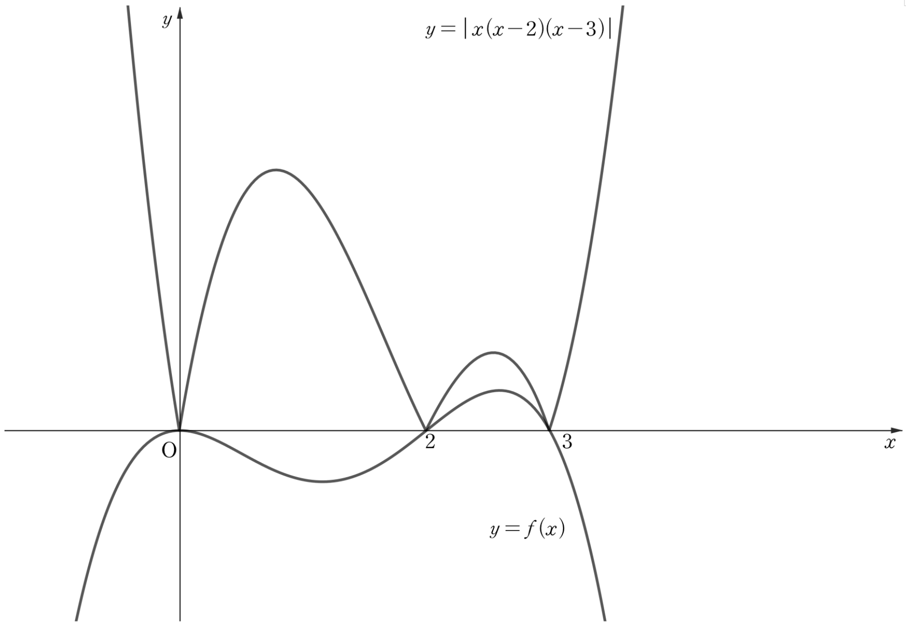
$x=2$에서 $g(x)$가 미분가능하기 위해 $-4a=2$가 되어야 한다. 따라서 $a=-\frac{1}{2}$이다.

이후 $x=3$에서의 좌미분계수와 우미분계수를 살펴보면

$\lim_{x\to 3-} f(x)=-h'(3)=-3$, $\lim_{x\to 3+} f(x)=f'(3)=9a=-\frac{9}{2}$로 서로 다르다.

$\therefore$ 따라서 (ㄱ)은 성립할 수 없다.

개형 (ㄴ)



(ㄴ)의 경우

$g(x)=f(x)$이다.

$x=2$에서 두 함수의 **우미분계수를 비교**해보면
$f'(2)=-4a$, $-h'(2)=2$이다.
$-4a \le 2$가 성립되어야하므로 $a \ge -\dfrac{1}{2}$이다.

이후 $x=3$에서 두 함수의 **좌미분계수를 비교**해보면
$x=3$에서 $f(x)$의 미분계수는 $f'(3)=9a$이고, $-h'(3)=-3$이고
$f'(3) \ge -h'(3)$ 즉, $9a \ge -3$가 성립되어야하므로 $a \ge -\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 $a \ge -\dfrac{1}{2}$, $a \ge -\dfrac{1}{3}$, $a<0$가 모두 성립해야하므로 $-\dfrac{1}{3} \le a < 0$.

$f(1)=2a<0$이므로 (ㄴ)에서 $f(x)$ 자체는 성립하지만, **고려하는 것 자체가 무의미**하다.

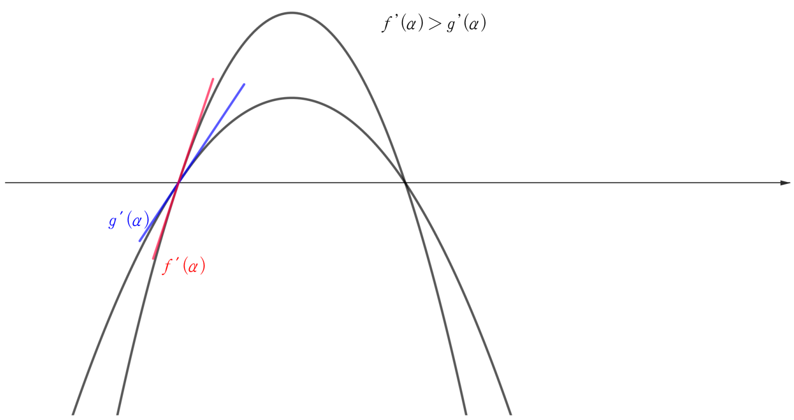
| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. $f(x)$ 와 $|h(x)|$ 의 **대소비교**를 통하여 $g(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있는가?

2. 중근에 따라 케이스를 나누어 $f(1)$ **의 최댓값**을 찾을 수 있는가?

| NOTES

- **미분계수**를 이용한 그래프의 대소비교



두 함수가 $x=\alpha$ 에서 교점을 가질 때, $x=\alpha$ **의 미분계수를 비교**하여 그래프의 대소비교를 추측할 수 있다.

- 현장에서 문제를 풀 때 모든 경우를 일일이 고려할 필요가 없다.
  때로는 객관식에서는 **선지**로, 주관식에서는 **답이 자연수**임을 이용해 불가능한 경우를 사전에 제거하는 것이 시간 단축에 효율적일 수 있다.

05

★★

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

우선 $f(x)$와 $g(x)$가 전부 삼차함수이며, 두 함수의 곱이 주어져 있다.

"6개의 일차식들을 각각 $f(x)$와 $g(x)$의 인수로 분배하는 문제구나."

'$g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가진다.'

"그렇다면 $g(x)$는 **$x=2$에서 중근을 갖거나**, **$g(2)\neq 0$이지만 $g'(2)=0$**이겠네."

그러나, $g(2)\neq 0$인 동시에 $g'(2)=0$라면

$g(x)=3(x-1)^2(x-3)$ 또는 $g(x)=3(x-1)(x-3)^2$이고,

삼각함수의 비율관계에 따르면 각각의 경우 $x=1$, $x=\frac{5}{3}$에서 극댓값을 가진다.

따라서 이는 모순이다.

그렇다면 $g(x)$는 **$x=2$에서 중근을 갖는** 동시에 극댓값을 가져야 하므로,

$g(x)=3(x-2)^2(x-3)$이다.

$g(x)$의 최고차항의 계수가 3, $f(x)g(x)$의 최고차항의 계수가 1임을 통해

$f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

남은 세 일차식을 $f(x)$에 분배하면

$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$이다.

이를 미분하면 $f'(x)=\frac{1}{3}\{2(x-1)(x-3)+(x-1)^2\}$

$\therefore\ f'(0)=\frac{7}{3}$

답: 10

06

★★

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로,

1) $g(0)=f(0)=\frac{1}{2}$ (연속성), $\cdots$ ㉠

2) $g'(0)=f'(0)=0$ (미분가능성) $\cdots$ ㉡

이 두 가지 조건을 도출해 낼 수 있다.

㉡에 따르면 $f(x)$는 $x=0$에서 **극대 또는 극소**를 가진다.

그러나, $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작으므로, $f(x)$는 $x\geq 0$에서 **감소 구간**을 가져야한다.

따라서, $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

"지금까지의 조건들을 토대로 $f(x)$의 식을 세우고, 선지를 판단해보자."

$$f(x)=x^2(x-a)+\frac{1}{2}\quad (a>0)$$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

㉠, ㉡에 의해 $g(0)=\frac{1}{2}$, $g'(0)=0$이므로, $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$이다. $\cdots$ (참)

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

$g(1)=f(1)=\frac{3}{2}-a$이고, $a>0$이므로, $g(1)<\frac{3}{2}$이다. $\cdots$ (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작으므로, 함수 $g(x)$의 최솟값은 곧 $f(x)$의 최솟값이다.
또한, $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로, **$f(x)$의 극솟값**이 곧 최솟값이다.

이를 과정을 거쳐 ㄷ을 다시 살펴보면 $f(x)$의 극솟값이 0이 되어야하므로,
$f(x)$가 **x축에 접할 때**를 떠올려보자.

$f(x)=x^2(x-a)+\frac{1}{2}\quad(a>0)$이므로,

삼차함수의 비율관계에 의해 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}a$에서 극소를 가지고, 이때 극솟값이 0이 된다..

따라서, $f\left(\frac{2}{3}a\right)=-\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$이다.

$\therefore\ f(x)=x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}$

이에 따라 $g(2)=f(2)=\frac{5}{2}$이다. $\cdots$ (참)

답: ⑤

07

★

함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

일단 $f(x)$를 깔끔하게 정리해보자.

$f(x)=x^3-3ax^2+3a^2x-3x=(x-a)^3+a^3-3x$

함수 $f(x)$의 극댓값이 4라고 했으므로, $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=3(x-a)^2-3=3\{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\}$이다.

$f'(x)=0$의 실근은 $x=a-1$, $x=a+1$이므로, $f(x)$는 $x=a-1$에서 극대를 갖는다.

$f(a-1)=-1+a^3-3(a-1)=a^3-3a+2$이므로, 극댓값이 4가 되도록 하는 a를 구해보자.

$a^3-3a+2=4 \Rightarrow (a-2)(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

문제에서 주어진 또 다른 조건은 $f(-2)>0$이다.

$f(-2)=-6a^2-12a-2>0 \Rightarrow 3a^2+6a+1<0$

$a=2$일 때 부등식을 만족하지 않고, $a=-1$일 때 부등식을 만족시키므로 $a=-1$이다.

$\therefore\ f(-1)=2$

답: ②

★★★

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고,
삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때,
$h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오.

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
(나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대를 갖는다.

"$f(x)$는 최고차항의 계수가 음수이면서 $x=-1$을 축으로 하는 포물선이구나."

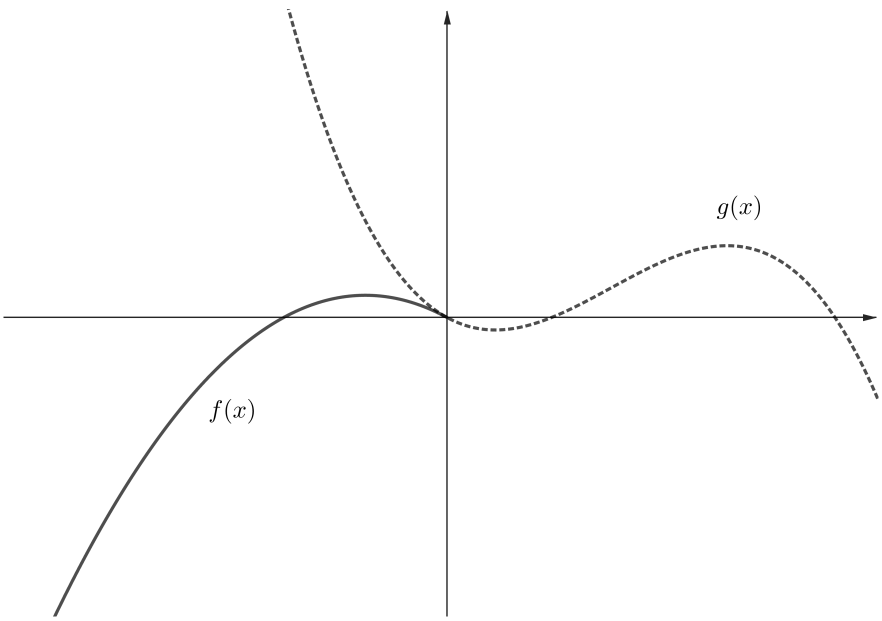
삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다.

"이차항의 계수가 0이라는 것은 근과 계수의 관계에 의해 **세 근의 합이 0임**을 의미하겠네."

$h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서의 미분가능성만 판단하면 된다.

$f(x)$는 $x=-1$에서 극대를 가지므로 $f(x)$는 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 감소한다. 즉 미분계수가 음수이다.
$x=0$에서의 우미분계수도 음수가 되도록 그래프를 그려보자.

i) $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때



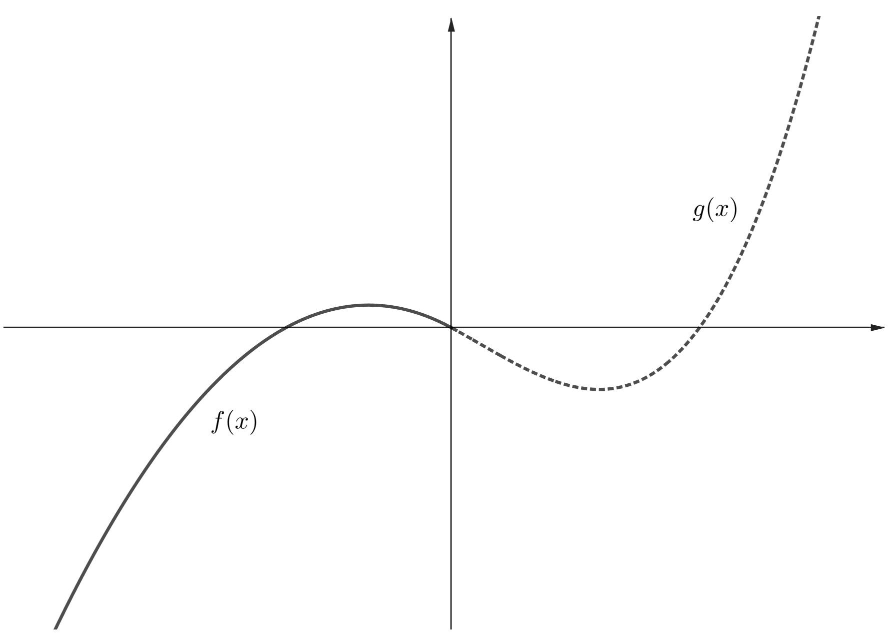
(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.

$y=h(0)$이 $x=0$을 지나므로 다음과 같이 그래프를 그릴 수 있다.

다음 그림을 보면 $g(x)$의 세 실근의 합이 양수임을 알 수 있다.

하지만 문제 조건에서 세 실근의 합이 0이라 했으므로 이 케이스는 모순임을 알 수 있다.

$ii)$ $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때



조건 (가)를 만족하기 위해 $h(x)=h(0)$의 실근은 각각 $-2,\ 0,\ 3$이면 된다.

$f(0)=g(0)=h(0)=a$라 하면

$g(x)=a$를 만족하는 x의 값이 $-3,\ 0,\ 3$이어야 한다.
(※ 이차항의 계수가 0이므로 세 근의 합이 0이어야 한다.)

$f(x)=a$의 실근은 $x=0$과 $x=-2$이고, $g(x)=a$의 실근은 $x=-3$, $x=0$, $x=3$이다.
$f(x)=px(x+2)+a$, $g(x)=qx(x+3)(x-3)+a$라 하자.

$h(x)$는 미분가능하므로 $x=0$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같음을 이용하여 관계식을 세우면
$f'(0)=2p$이고 $g'(0)=-9q$이므로 $2p=-9q$ ⋯㉠

(나) 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $f(x)$의 극댓값과 $g(x)$의 극솟값이므로
각각 구해보면 $f(-1)=-p+a$, $g(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}q+a$이다.

두 값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이므로 $-p+6\sqrt{3}q=3+4\sqrt{3} \Rightarrow p=-3,\ q=\frac{2}{3}$이다.

$\therefore\ f(x)=-3x(x+2)+a,\ g(x)=\frac{2}{3}x(x+3)(x-3)$

$h'(-3)=f'(-3)=12$
$h'(4)=g'(4)=26$

답: 38

| 무엇으로 학생들을 변별했는가?

- $h(x)$가 $x=0$에서의 좌미분계수는 음수이므로, $x=0$에서의 우미분계수도 음수임을 이용하여 그래프 개형을 추론할 수 있는가?

- 조건 (가)를 통해 $f(x)$와 $g(x)$의 식을 작성할 수 있는가?

| NOTES

- $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로 $g(x)=0$의 세 실근의 합은 0이다. 하지만 $g(x)=i(x)$에서 $i(x)$가 일차 이하의 식이라면 이차항의 계수에 영향을 미치지 않으므로 $g(x)=i(x)$의 세 실근의 합 또한 0이다.

★★★

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x|x\geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

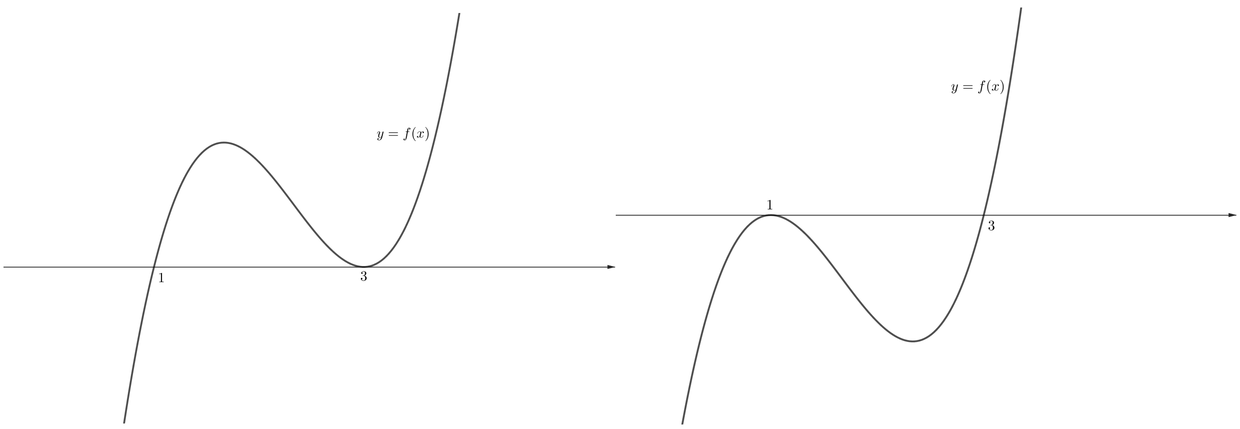
상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오.

(가) $f(1)=f(3)=0$

"$f(x)$가 적어도 두 실근을 가진다는 의미이니 실근 1개, 중근 1개이거나 실근 3개겠군."

(나) 집합 $\{x|x\geq 1$ 이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

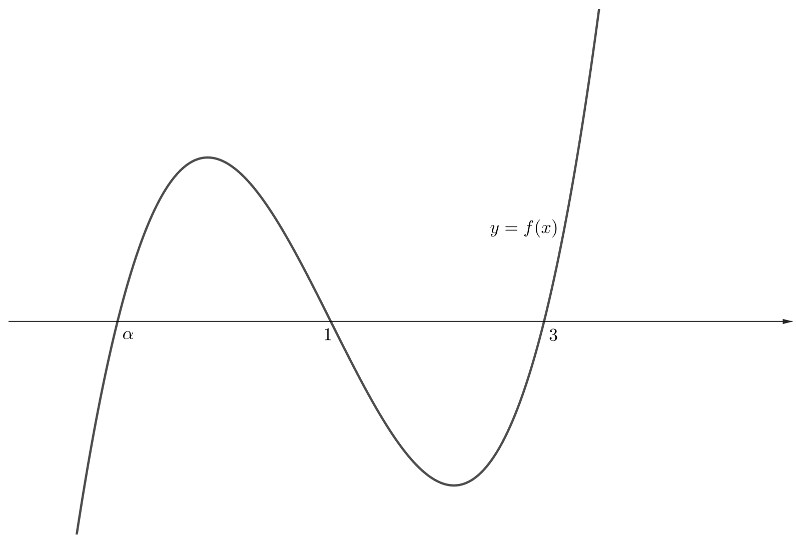
중근을 갖는 케이스부터 (나) 조건과 맞는 것이 있는지 확인해볼까?



최고차항의 계수가 양수라면
$x\geq 1$일 때 $f'(x)=0$이 되는 x의 개수(극값의 개수)가 2개이므로 (나) 조건을 만족하지 못한다.

최고차항의 계수가 음수일 때도 마찬가지다.

그렇다면 $f(x)$가 서로 다른 3개의 실근을 가질 때라고 생각해보자.
(가)에서 $f(1)=f(3)=0$이라고 했으므로 (나) 조건에 맞게 그래프를 그리면 다음과 같다.



여기서 $\alpha<1<3$이고 최고차항의 계수가 음수일 때는 조건을 만족시키는 것이 없으므로 아직은 판단하지 말자.

이제 문제에서 요구하는 $g(x)$를 보면 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체에서 미분가능하다고 하였다.

$g(x)$는 절댓값을 포함한 함수이기에 $f(x)f(a-x)$가 실근을 갖는다면 미분불가능한 점이 발생할 것이다.

"$f(x)$가 실근을 갖는 지점을 $f(a-x)$ **또한 실근을 가짐으로써 중근을 만들어버리면** 미분가능하지 않을까?"

$f(a-x)$는 $f(x)$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프이다.

이 때 $f(x)$의 실근이 $\alpha,\ 1,\ 3$이므로 $f(a-x)$의 실근은 $a-3,\ a-1,\ a-\alpha$이다.
※ 다음 실근들은 크기 순으로 나열한 것이다.
(y축 대칭을 통해 실근의 위치들이 일부 변경되었다.)

이 실근들이 모두 일치해야 중근을 가지므로 $\alpha=a-3,\ 1=a-1,\ 3=a-\alpha$이다.

계산하면 $a=2$이고 $\alpha=1$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=p(x+1)(x-1)(x+3)$이라 하면

$$\therefore\ \frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\frac{|f(8)\times f(-6)|}{f(0)\times f(8)}=105$$

답: 105

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 조건 (가)와 (나)를 통해 $f(x)$가 서로 다른 세 실근을 갖는다는 것을 판별할 수 있는가?

2. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해 $f(x)$와 $f(a-x)$의 실근이 서로 같음을 파악할 수 있는가?

3. $f(x)$의 최고차항의 계수와 상관없이 $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값이 나올 수 있음을 알 수 있는가?

| NOTES

- $g(x)$가 절댓값을 포함한 함수이고 실수 전체의 집합에서 미분가능하다는 것은 매우 특수한 상황이다.
이는 실근이 아닌, 중근 혹은 삼중근을 가져야 미분가능하다는 것을 의미한다.

$f(x)$가 서로 다른 세 실근을 갖는다는 것은 $f(a-x)$ 또한 같은 세 실근을 가진다는 것이고, $g(x)$가 서로 다른 3개의 중근을 가짐으로써 비로소 미분가능이 된다. 시험장에서 바로 생각할 수 있어야 한다.

★★★

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

"구간함수가 실수 전체에서 미분가능하네. **경계 지점에서 연속**이고, 동시에 **도함수 값이 같다**는 두 식을 세워야지."

$|f(1)-g(1)|=f(1)+g(1)$

"절댓값이 들어가 있으니 케이스를 나눠야겠다."

$i)$ $f(1)\geq g(1)$일 때,

$f(1)-g(1)=f(1)+g(1) \Rightarrow g(1)=0$

도함수 값도 같아야 하므로,
$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1) \Rightarrow g'(1)=0$

이러면 $g(x)$**가 일차함수가 아닌 상수함수**가 되어버리므로, 성립할 수 없다.

"그렇다면 남은 경우는 하나네."

$ii)$ $f(1)<g(1)$일 때,

$g(1)-f(1)=f(1)+g(1) \Rightarrow f(1)=0$

역시 **도함수 값**이 같아야 한다.
$g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1) \Rightarrow f'(1)=0$

$f(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수이므로, 다음과 같이 식을 세울 수 있다.

$f(x)=(x-1)^2(x-k)$ ⋯ ㉠

"벌써 $f(x)$에 대한 정보를 거의 다 알아냈다. 문제에서 준 정보를 더 활용해보자."

$h(0)=f(0)-g(0)=0$
$h(2)=f(2)+g(2)=5$

"어? 그런데 $h(x)$는 $x<1$에서 $f(x)-g(x)$에 **절댓값을 씌운** 함수인데, $f(x)$와 $g(x)$가 $x=0$에서 만나네?
그럼에도 $h(x)$가 미분가능함수가 되려면 $x=0$에서 $f(x)$**와** $g(x)$**가 접하듯이 만나야겠네**."

(여기서 접하듯이 만나야한다는 것은, 접하는 경우와 두 함수의 차함수가 삼중근을 갖는 경우를 전부 포함한 뜻이다.)

따라서,
$f(0)=g(0)$
$f'(0)=g'(0)$이다.

이 두 식을 이용해 직선 $g(x)$에 대한 식을 세워보자.

$f(x)=x^3-(2+k)x^2+(2k+1)x-k$
$f'(0)=2k+1=g'(0)$
$f(0)=-k=g(0)$

$\therefore\ g(x)=(2k+1)x-k$

마지막으로, $f(2)+g(2)=5$를 써서 답을 내자.

$f(2)=2-k$
$g(2)=4k+2-k=3k+2$

$f(2)+g(2)=2k+4=5$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

따라서, $f(x)=(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$이고,

$g(x)=2x-\dfrac{1}{2}$ 이다.

$\therefore\ h(4)=f(4)+g(4)=(9)\left(\dfrac{7}{2}\right)+8-\dfrac{1}{2}=\dfrac{63}{2}-\dfrac{1}{2}+8=39$

답: 39

무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. **구간함수의 경계**에서 미분가능성을 조사할 수 있는가?

2. 절댓값이 포함된 **차함수가 미분가능하다**는 사실로부터 단서를 뽑아낼 수 있는가?

NOTES

- 직선과 삼차함수 간 차의 절댓값 함수가 미분가능하다는 뜻은 '**접하듯이 만난다**'는 뜻이다.
  즉, 직선을 접하면서 뚫고 지나갈 수도 있고, 접하면서 위치 관계를 유지할 수도 있다.

  $y=x^3$이 삼중근을 가지고 $y=x^2(x-a)$는 중근을 갖지만,
  둘 다 x축과 접하듯이 만난다고 생각하면 쉽다.

★★★

함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구하시오.

(가) 함수 $\lvert f(x)\rvert$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다. (나) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $\lvert f(x)\rvert$의 최댓값은 같다.

'(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.'

여기서 절댓값을 벗겨내고 나면, 가능한 a는 두 경우로 나누어질 수 있다.
(직관적으로 $f(x)$가 극값을 가지지 않는 경우는 배제하고 생각하자.)

i) $f(x)$가 $x=a$에서 **극값을 갖는 경우**

기본적으로 삼차함수가 가질 수 있는 극점은 2개로,
2개의 a에 대해 $f'(a)=0$일 것이다.

ii) $f(x)$가 $x=a$에서 **중근이 아닌 실근(첨점)을 갖는 경우**

삼차함수가 가질 수 있는 실근은 최대 3개이므로,
남은 3개의 a에 대해 $f(a)=0$일 것이다.

결론적으로 **a의 개수가 5개**가 되기 위해서 삼차함수 $f(x)$가 **3개의 실근**과 **2개의 극점**을 갖는 수 밖에 없다.
(실근이 3개이므로 극점과 첨점이 겹칠 일은 없다.)

$f(x)$를 미분하면 $f(x)$의 두 극점을 구할 수 있다.

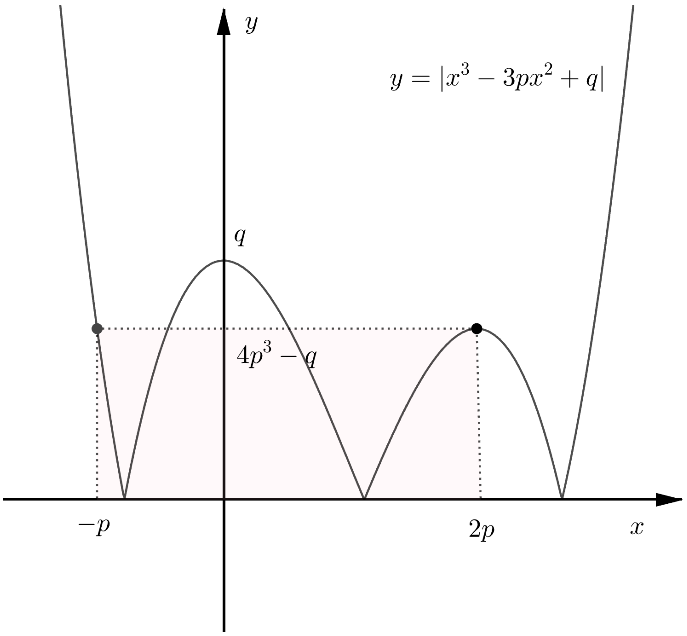
$f(x)=x^3-3px^2+q$
$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)=0$

이를 통해 구한 두 극점은 $(0,\ q)$, $(2p,\ -4p^3+q)$이다.

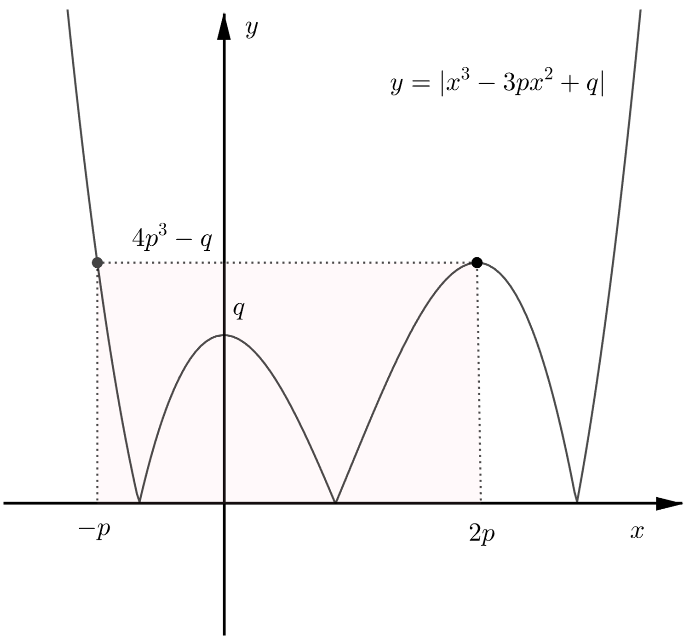
물론 이 때 $f(x)=0$이 세 실근을 갖기 위해서 극댓값은 양수, 극솟값은 음수여야한다.
즉, $-4p^3+q<0 \Rightarrow q<4p^3$이다. … ㉠

여기서 $|f(x)|$의 개형은 아래 중 하나와 같이 확정지을 수 있다.

1) $2p^3 \le q$ $(4p^3 - q \le q)$인 경우



2) $2p^3 > q$ $(4p^3 - q > q)$인 경우



이제 (나)를 살펴보면, **두 극점 중 하나 이상이 최댓값이 되는 경우**가 자연스럽게 떠오른다.

이제, p의 값에 따라
$x=-2,\ x=-1,\ x=1,\ x=2$**와 모든 극점 중 어디서 최댓값을 갖는지**를 살펴보아야한다.

먼저 나타낼 수 있는 점들을 살펴보면, $(0,\ q)$와
오른쪽 극점은 $(2p,\ 4p^3-q)$를 나타낼 수 있고, 삼각함수의 비율 관계에 의해 $(-p,\ 4p^3-q)$이다.

$p \ge 2$인 모든 p에 대해 구간 $[-2,\ 2]$가 구간 $[-p,\ 2p]$ 속에 존재하므로, 이 경우를 먼저 생각해보자.

i) $p \geq 2$일 때

1)의 개형($2p^3 \leq q$)에서는 무조건 $x=0$에서 최댓값을 갖는다.

2)의 개형($2p^3 > q$)에서는 $x=0$에서 최댓값을 갖을 수도, 갖지 않을 수도 있다.
후자의 경우 최댓값은 $|f(0)|=q$보다 크기에, 최댓값을 가지는 x는 y축 양 옆에 존재하는 첨점 밖에 있으며
따라서 구간 $[-2, 2]$의 양 끝점 중 더 큰 값을 가지는 $x=-2$에서 최댓값 $|f(-2)|=8+12p-q$을 가질 것이다.

그러나, 이 경우 **개형상 구간 $[-1, 1]$과 $[-2, 2]$의 최댓값은 같을 수 없다.**

따라서 $1), 2)$**의 경우 모두 $x=0$에서 최댓값 q**를 가져야만 한다.

따라서, $p \geq 2$인 모든 자연수 p에 대해 $|f(0)| \geq |f(-2)| \Rightarrow q \geq 6p+4$를 만족시켜야 한다. $\cdots$ ㉡

ii) $p=1$일 때

1)의 개형($2p^3 \leq q$)에서는 $|f(-2)| > |f(-1)| = |f(2)|$이므로 $x=0$ 또는 $x=-2$에서 최댓값을 가진다.
$x=-2$에서 최댓값을 가질 경우 이전과 마찬가지로 구간 $[-1, 1]$과 $[-2, 2]$의 최댓값은 같을 수 없으므로,

$|f(0)| \geq |f(-2)| \Rightarrow q \geq 10$을 만족한다. $\cdots$ ㉢

2)의 개형($2p^3 > q$)에서는 $|f(-2)| > |f(-1)| = |f(2)| \geq |f(0)|$이므로, $x=-2$에서 최댓값을 가진다.
이 경우 이전과 같이 구간 $[-1, 1]$과 $[-2, 2]$의 최댓값이 달라지므로, $p=1$일 때 2)의 개형은 성립 불가능하다.

종합해보면, 모든 경우에서 $|f(x)|$는 오직 $x=0$ 또는 $x=-2$에서 최댓값을 가지고,
그 중 **$x=0$에서 최댓값을 갖게 하는 순서쌍 (p, q)만이 (나)를 만족시킨다.**

이제 각 경우의 가능한 순서쌍들을 살펴보자.

먼저, 모든 p에 대해 ㉠ ($q < 4p^3$)를 만족해야하므로,

$p=1$일 때 ㉠, ㉢ ($10 \leq q < 4p^3$)을,
$2 \leq p \leq 25$일 때 ㉠, ㉡ ($6p+4 \leq q < 4p^3$)를 만족하는

25 이하의 자연수 q를 살펴보면 된다.

$p=1$일 때, $10 \leq q < 4p^3 \Rightarrow 10 \leq q < 4$이므로 모순이다.

$p=2$일 때, $16 \leq q \leq 25$이므로 가능한 q는 10개,
$p=3$일 때, $22 \leq q \leq 25$이므로 가능한 q는 4개,

$4 \leq p \leq 25$일 때 $6p+4 > 25$이므로 q는 존재할 수 없다.

따라서 가능한 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 총 14개다.

답: 14

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. (가)를 통해 $|f(x)|$의 개형을 구체화할 수 있는가?

2. (나)를 만족하는 경우를 찾는 과정에서, 발생할 수 있는 수많은 케이스들을 p의 값과
그래프의 개형에 따라 최댓값이 될 수 있는 후보군을 좁혀 정리할 수 있는가?
(매번 $x=-2,\ x=-1,\ x=1,\ x=2$, 극값을 전부 비교하여 최댓값을 결정하는 것은 매우 비효율적이다.)

| NOTES

- 이 문제에서는 **그래프의 개형을 통해서, 또는 논리적인 과정을 통해서** 최댓값이 될 수 있는 후보군을 최대한 좁혀나가고, 빠지지 않은 경우는 없는지 꼼꼼히 살펴보는 것이 정말 중요하다.

이를 위해 $|f(x)|$의 개형을 두 가지로 특정시켜놓고, $[-p,\ 2p]$라는 가상의 구간을 설정하고, 개형에 따라
$x=-2,\ x=-1,\ x=1,\ x=2$, 극값 중 최댓값이 될 수 없는 것들을 사전에 발견하여
불가능한 경우들을 걷어내고, 고려해야 할 상황들과 최댓값의 후보군들을 최대한 간소화시켜놓은 것이다.

- 항상 강조하던 **'직관을 통해 가장 유력한 경우를 찾아 답만 구하면 끝난다.'**와 같은 접근법은 아쉽게도 모든 경우의 수를 구해야하는 이 문제에서는 적용할 수 없다.

★★★

두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx \rvert$이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

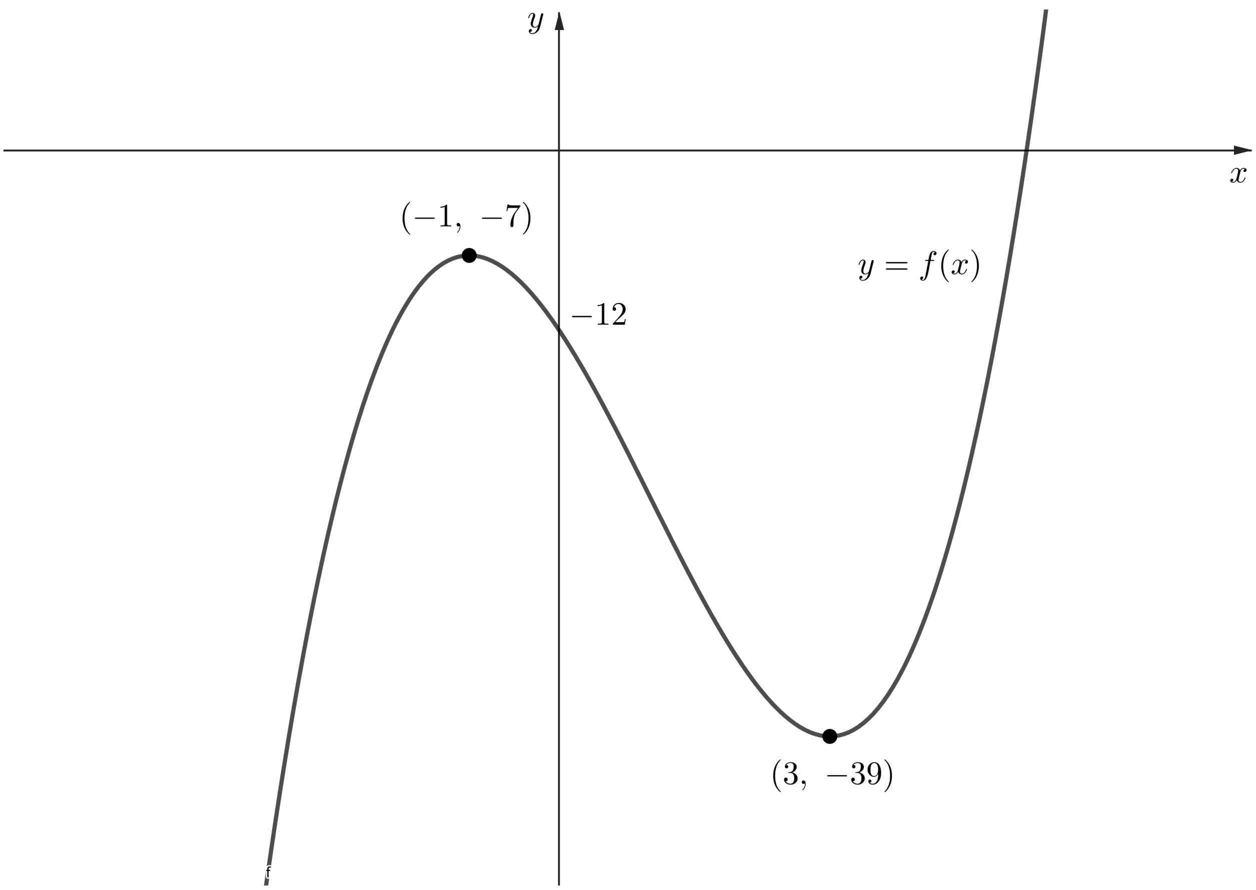
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f(x-p)+q$는 $f(x)$를 **평행이동한 함수**이므로 $f(x)$와 같은 개형을 갖고 있다.
따라서 $f(x)$를 먼저 살펴보면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$이고,
$f(-1)=-7$, $f(3)=-39$로,

극점 $(-1,\ -7)$, $(3,\ -39)$를 갖는다. ⋯ ㉠

$f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx \rvert$이다.

$xg(x) = |x(f(x-p)+q)| = |x||f(x-p)+q|$ 이므로 $x=0$ 을 기준으로 $g(x)$를 파악해보자.

$g(x) = \begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$ 이다.

만약 $g(x)$에 대해 '$x=0$에서 $|f(x-p)+q| = a$라면'

$\lim_{x \to 0-} g(x) = -a$, $\lim_{x \to 0+} g(x) = a$로
$a \neq 0$이라면 $g(x)$가 연속이라는 조건에 위배된다.

따라서 $f(x-p)+q$는 $f(x)$가 $x=0$ 에서 실근을 갖도록 **적절하게 평행이동한 함수**가 될 것이다.

(나) $g(x)$는 삼차함수 $f(x-p)+q$의 절댓값을 포함한 함수이므로,
$f(x-p)+q$가 **$x \neq 0$에서** 중근이 아닌 실근을 가질 때 미분불가능한 점이 생긴다.

그와 반대로, **$x=0$에서**는 $f(x-p)+q=0$일 때에만 미분가능해진다.

그렇다면, $g(x)$가 오직 한 점에서 미분가능하지 않을 수 있는 경우는 다음과 같다.

i) **$x=0$에서** $f(x-p)+q=0$이고, **$x \neq 0$에서** $f(x-p)+q=0$는 오직 한 개의 중근이 아닌 실근을 갖는다

삼차함수가 오직 두 근을 갖는다면, 반드시 한 근은 중근이어야한다.
그러나, $x \neq 0$에서는 중근이 아닌 실근을 가지므로 $x=0$에서 $f(x-p)+q=0$는 중근을 가져야 한다.

따라서, ㉠의 극점을 통해
$y=f(x-p)+q$는 극점 $(-1+p,\ -7+q)$, $(3+p,\ -39+q)$를 갖음을 알 수 있다.

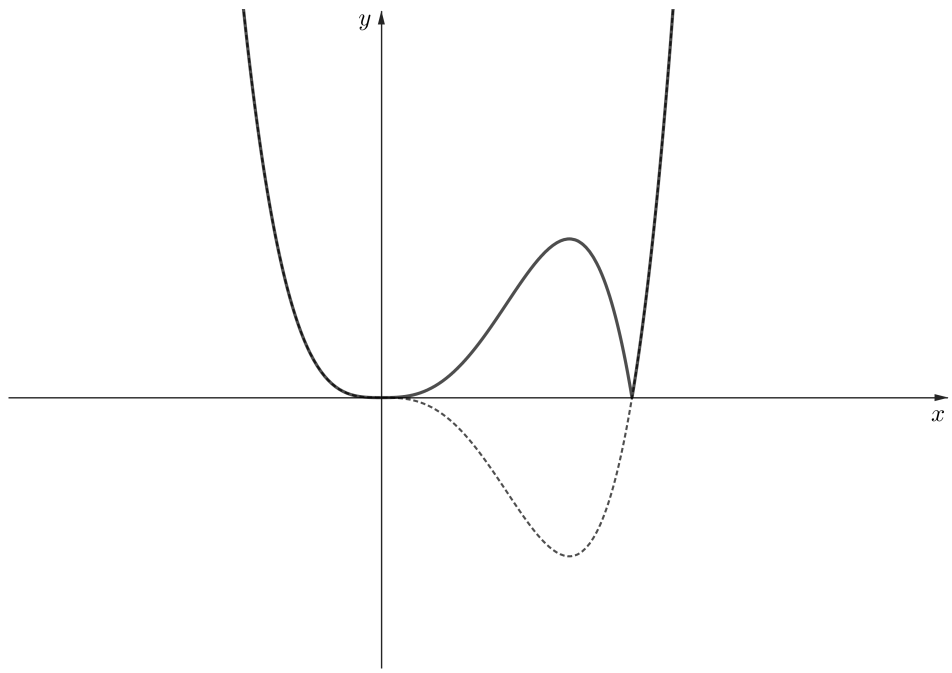
$p>0$이므로 $x=0$에서 중근을 갖기 위해서는 $p=1$, $q=7$이 되어
극점 $(-1+p,\ -7+q)$이 원점에 위치할 수 있도록 하는 방법밖에 없다.

따라서 $p=1$ 이고 $q=7$ 이다.

$\therefore p+q=8$

답 : ③

이후, 조건을 만족하는 $g(x)$ 의 그래프는 그려보면 다음과 같다.



$ii)$ <u>$x=0$**에서**</u> $f(x-p)+q\neq 0$이고, <u>$x\neq 0$**에서**</u> $f(x-p)+q=0$는 어떠한 근도 갖지 않는 경우를 생각해볼 수도 있지만, $y=f(x-p)+q$가 삼차함수임을 생각해보면 불가능하다.

| 무엇으로 학생들을 변별했는가?

1. (가)에서 절댓값 함수를 두 개의 절댓값의 곱으로 나누어

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$ 로 해석할 수 있는가?

2. (나)에서 미분불가능한 점이 1개 뿐이라는 단서를 통해 $f(x)$가 중근을 갖도록 평행이동시킬 수 있는가?

| NOTES

- 문제에서 요구하는 것은 <u>**이미 정해져 있는 상수**</u>이다.

이는 문제에 조건을 만족시키는 $g(x)$가 단 한 개 뿐이라는 것을 의미하므로,
정답이 되는 상황은 특수한 상황일 것임을 예측하고 들어가는 것이 좋다.

그렇다면 직관적으로 극값을 평행이동 시켜야한다는 생각이 들 것이다.

★★★

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

"$g(x)$를 해석하는 것이 중요할 것 같다. $f(x-3)$은 알겠고, $\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$**에 대해 생각해 보자.**"

$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$는 기본적으로는 $2|f(x)|$의 도함수와 같다.

"하지만 $f(x)=0$**이 되는 지점**에서 문제가 생기겠군.
x축과 접하는 경우에는 별 문제 없이 0으로 수렴하겠지만, **중근이 아닌 실근을 가진 경우**는 따져 봐야 될 것 같은데?"

$$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}=\begin{cases}2f'(x) & (f(x)>0)\\ -2f'(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$

임은 쉽게 알 수 있다. **문제는 $f(x)$의 부호가 바뀌는 경우**(중근이 아닌 실근을 갖는 경우)이다.

$f(x)$가 중근이 아닌 실근을 갖는 경우, $|f(x)|$가 해당 근에서 **첨점을 갖게 된다.**
이때 $\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$는 순간적으로 $2f'(x)\to-2f'(x)$ 또는 그 반대 방향으로 변한다.
그러나 첨점의 특성상, 첨점에서 $f'(x)\neq0$이다.

따라서, **첨점에서 위 식은 불연속이 된다.**

그러나 발문에 따르면 $g(x)$**는 실수 전체의 집합에서 연속이어야한다.**

"그렇다면 이렇게 생기는 $\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$의 불연속점을,
$f(x-3)=0$**이 되게 함으로써** $g(x)$ 자체는 연속이 되도록 만들어 주면 되겠군."

따라서 $f(x)=0$**이 중근이 아닌 실근을 갖는** x**에 대해** $f(x-3)=0$**이어야 한다.** ⋯ ㉠

이제, (나)를 살펴보면 $g(x)$의 근의 개수가 4개가 되어야 한다.
$g(x)$의 근은 다음과 같은 세 가지로 나눠볼 수 있다.

1) $f(x-3)=0$의 실근
2) $f(x)=0$의 중근이 아닌 실근
3) $f'(x)=0$의 실근

여기서 ㉠에 의해 $2)$는 $1)$에 포함된다.

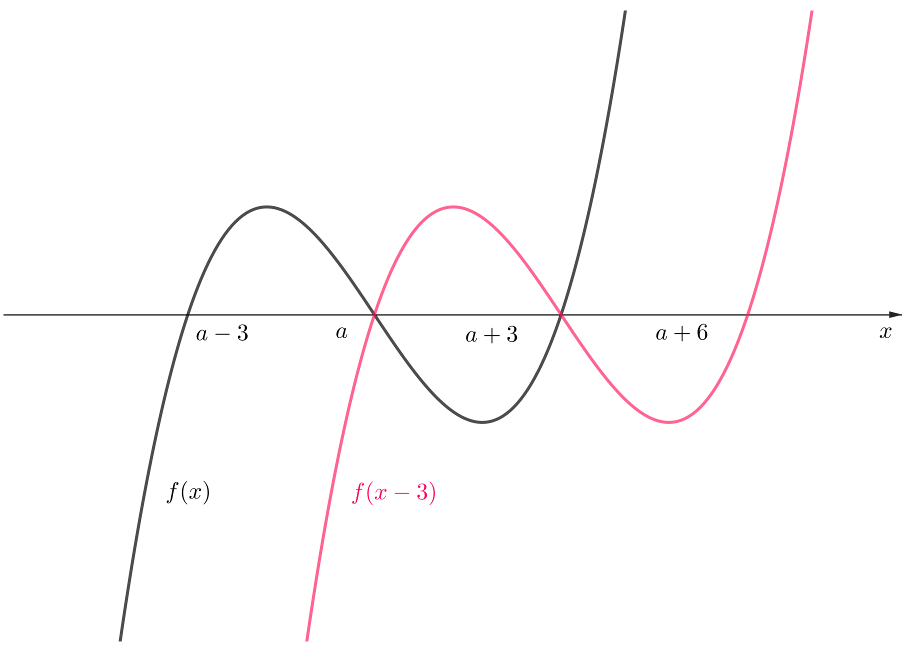
$f(x)$가 삼중근을 갖는 아주 예외적인 경우를 제외하면, **적어도 하나의 중근이 아닌 실근을 가진다.** (NOTES 참고)
(삼중근일 경우, $f(x)$와 $f(x-3)$가 가지는 모든 실근은 오직 삼중근 뿐이므로 $g(x)$의 실근의 개수는 고작 2개다.)

따라서 이 중근이 아닌 실근을 α라고 하면, ㉠에 의해 $f(\alpha)=f(\alpha-3)=0$인 것이다.

이를 통해 $f(x)$**는 이미 두 개 이상의 실근을 갖고 있음**을 알 수 있고, (삼중근을 갖는 경우 제외)

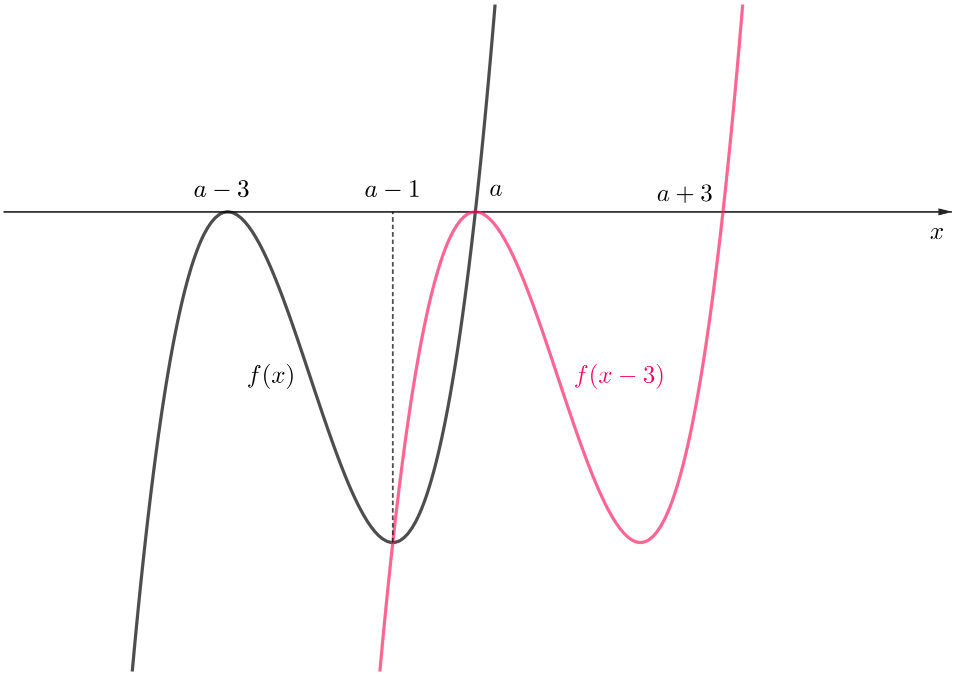
만약 $x=\alpha-3$에서 갖는 실근이 **중근이 아닌 실근일 경우**
$f(x)$는 그 어떠한 중근도 없이 세 개의 중근이 아닌 실근을 갖게 된다.

여기서 $f(x-3)$는 $f(x)$가 평행이동한 형태이므로,
세 개의 실근에 대해 전부 ㉠($f(x)=f(x-3)=0$)을 만족시킬 수는 없다.



따라서, $f(x)$**가** $x=\alpha-3$**에서는 중근을 가질 것이다.**

이때 $f(x)=0$의 실근은 $\alpha-3$, α이고,
삼각함수의 비율관계에 의해 $f'(\alpha-1)=0$이다.



그렇다면 $f(x-3)=0$의 실근은 α, $\alpha+3$이 되므로,

$\alpha_1=\alpha-3$
$\alpha_2=\alpha-1$
$\alpha_3=\alpha$
$\alpha_4=\alpha+3$

$g(x)$의 실근은 정확히 네 개가 된다.

$\therefore\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=4\alpha-1=7$이므로 $\alpha=2$이다.

이제 마지막으로 $f(x)$의 식을 구해보면,
$f(x)=(x-\alpha)(x-\alpha+3)^2=(x-2)(x+1)^2$이다.

$\therefore\ f(5)=108$

답: 108

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 도함수의 정의$\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\right)$를 이용하여 절댓값이 포함된 극한식을 해석할 수 있다.

2. 함수의 특정 부분에 의해 **불연속이 될 수 있는 점**에서 연속성을 가지게 하기 위해 **나머지 부분을 조작**할 수 있다.
(주로 0이 되도록 조작한다.)

3. 삼차함수의 극점이 가지는 상대적인 위치 관계를 파악할 수 있다.

| NOTES

- 삼차함수의 비율 관계 파악은 이러한 문제를 빠르게 풀어내는 데 매우 효과적이다.

- 함수의 연속을 만드는 방법은 이렇게 기억하면 편하다. **"0을 곱해서 불연속 점을 제거하자."**
  다항함수가 주어지고 이를 추론하는 과정에서는 함수가 가지는 실근을 토대로 $(x-\alpha)(x-\beta)\cdots$꼴로 식을 잡는 것이 계산을 줄여 준다.

- **삼차함수가 가지는 근의 특징**을 미리 파악해놓는 것이 좋다.
  근이 2개인 경우는 항상 중근 1개와 나머지 실근 1개가 있는 경우이다. 즉, x축에 그래프가 접한다는 의미이다.

- 어느정도 이상의 변별력을 갖춘 문제에서, 삼중근을 갖는 삼차함수가 정답이 되기는 상당히 힘들다.
  삼중근을 갖는 삼차함수는 변별력을 갖출 수 있는 요소가 **삼중근 그 자체 외에는** 거의 없고, **고려해야 할 요소 또한 굉장히 적기 때문이다.**

  따라서, 고난이도의 문제일 경우 상황에 따라 다르겠지만 **특별한 근거나 이유가 없다면** 삼중근을 갖는 삼차함수는 마지막에 고려하는 것을 권한다.

★★★

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\le x\le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+}g(x+t)\times\lim_{t\to 2+}g(x+t)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $h(1)=3$
ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면
함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

"구간별로 정의된 함수네. $f(x)$에 대해 주어진 정보가 있나? 일단 $f(x)$는 다항함수라고 주어져있으니, 연속이겠다.
이외에 $f(x)$에 대한 별다른 조건은 없는 것 같다."

$h(x)=\lim_{t\to 0+}g(x+t)\times\lim_{t\to 2+}g(x+t)$

ㄱ. $h(1)=3$

$h(1)=\lim_{t\to 0+}(1+t)\lim_{t\to 2+}(1+t)=3$이므로, 옳다. … (참)

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$h(x)$의 연속성을 묻고 있다.

여러 연속함수들이 구간별로 정의된 함수의 경우 **불연속 의심점**은 당연히 **경계 지점**이다.
$h(x)$도 $g(x)$로부터 파생되어 나온 함수이므로 **경계 지점을 먼저 의심해 보자**.

극한으로 인해 달라지는 경우만 제외하면, $h(x)$는 $g(x)g(x+2)$와 동일한 값을 가질 것이다.
따라서 $x=-3$, $x=-1$, $x=1$일 때가 불연속 의심점임을 알 수 있다. … ㉠

"먼저 $x=-3$일 때의 연속성을 살펴보자."

$\lim_{x\to -3-}h(x)=\lim_{t\to 0+}g((-3-)+t)\times\lim_{t\to 2+}g((-3-)+t)=(-3)(-1)=3$ (단, $-3-$는 -3의 좌극한이다. NOTES 참고)

$h(-3)=-3f(-1)$

만약 $x=-3$일 때 $h(x)$가 연속이라면, $\lim_{x\to-3-}h(x)=h(-3) \Rightarrow f(-1)=-1$이어야한다.

그러나 <u>$f(-1)=-1$**이라는 조건은 어디에도 없으므로**</u>, $h(x)$가 실수 전체에서 연속이라는 조건은 옳지 않다. ⋯ (거짓)

(함수 $f(x)$는 특정된 식이 아닌 불특정한 <u>**임의의 다항함수**</u>이므로, 어떤 선지가 참이 되려면 '<u>**임의의 $f(x)$에 대해**</u>'
성립하도록 일반화되어야한다.)

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

$g(x)$가 $g(-1)=-2$이고, $[-1,\ 1]$에서 감소한다는 추가 조건이 붙어있다.
$[-1,\ 1]$에서 $g(x)=f(x)$이므로,

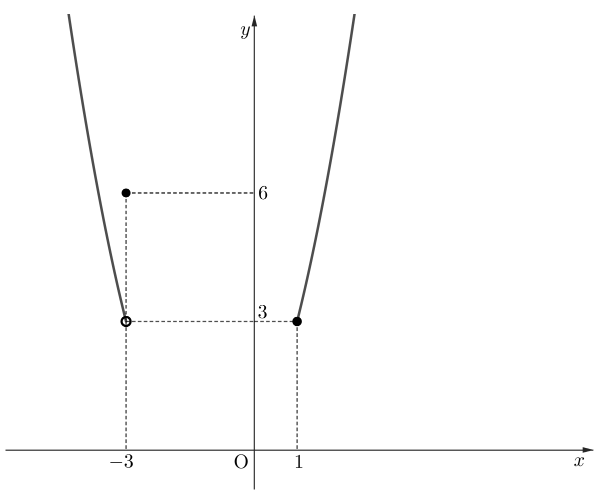
1) $g(-1)=-2 \Rightarrow f(-1)=-2$
2) $[-1,\ 1]$에서 $g(x)<0 \Rightarrow f(x)<0$임을 알 수 있다. ⋯ ㉡

그리고, 선지는 $h(x)=\lim_{t\to0+}g(x+t)\times\lim_{t\to2+}g(x+t)$의 **최솟값 존재 유무**를 묻고 있다.

"잘 모르겠다. 일단 <u>**그릴 수 있는 구간에 대한 그림**</u>부터 그려 보자.
㉠에서 나왔던 불연속 의심점들을 주의하며 그려야겠다."

1) $x<-3,\ x>1$일 때, $h(x)=x(x+2)$
2) $h(-3)=(-3)g(-1+)=(-3)f(-1)=6$
3) $h(1)=g(1+)\times3=3$

$f(x)$ 때문에 알 수 없는 구간인 $-3<x<1$를 제외하고 그래프를 그리면 다음과 같다.



일단 우리가 아는 그래프의 영역 중 최소는 $h(1)=3$이다.
따라서 $h(x)$가 최솟값을 가지는 가장 단순한 방법은 점 $(1,3)$에서 $h(x)$가 최솟값 3을 갖는 것이다.

하지만 이는 $-1<x<1$일 때 $h(x)=(x+2)f(x)=(\text{양수})(\text{음수})<0$이기 때문에 간단하게 부정된다.
(ⓛ에 의해 $f(x)<0$이 성립한다.)
(또한, 이를 통해 **$h(x)$의 최솟값은 음수**임을 알 수 있다.) $\cdots$ ⓒ

따라서 **나머지 구간**$(-3<x<1)$에서 최솟값을 갖는 경우를 생각해보자.

i) $-3<x<-1$일 때, $h(x)=xf(x+2)=(\text{음수})(\text{음수})>0$이므로 ⓒ에 의해 최솟값이 될 수 없다. 무시하자.
(ⓛ에 의해 $f(x+2)<0$이 성립한다.)

ii) $x=-1$일 때, $h(-1)=g(-1+)g(1+)=f(-1)=-2$이다.

iii) $-1<x<1$일 때, $h(x)<0$이다.

결국, **-2가 최솟값**이 되거나, **iii)에서 최솟값**을 가져야 $h(x)$가 최솟값을 가진다고 할 수 있다.

이 구간을 해석해 보자.

$h(x)=(x+2)f(x)$이다. $(-1\le x<1)$
$(x+2)>0$이고 **증가**한다.
$f(x)<0$이고 **감소**한다.

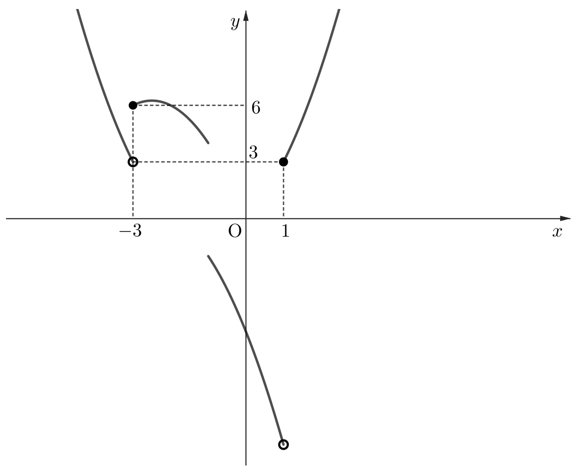
양수가 증가하고, **음수가 감소**할 때 **그 곱이 감소한다**는 것은 자명한 사실이다.
따라서, $-1<x<1$에서 **1에 가까이 다가갈수록** $h(x)$가 **감소한다**는 것을 알 수 있다.

따라서 $h(-1)=-2$는 최솟값이 될 수 없다.

그런데, 문제는 $-1<x<1$에서 $h(x)$는 감소하지만, 막상 $h(1)=g(1+)\times 3=3$이 된다는 점이다.
(즉, $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.)

그렇다고, $\lim_{x\to 1-}h(x)$를 최솟값이라고 할 수도 없다.
말 그대로 무한히 가까이 다가가는 값일 뿐, 실제 함숫값이 아니기 때문이다.
($\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이지만, 양수 구간에서 $\frac{1}{x}$가 최솟값이 없는 것을 생각하면 쉽다.)

그림을 그려보면 그래프는 다음과 같다.



따라서, ㄷ의 상황에서 $h(x)$가 **최솟값을 가지지 않음**을 알 수 있다. … (거짓)

옳은 선지는 ㄱ 뿐이다.

답: ①

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 구간별로 정의된 함수의 **연속성을 조사**할 수 있는가?

2 **함수의 극한**과 **구간**에 대한 부등식을 적절히 해석하여 함숫값을 구할 수 있는가?

3. 연속이 아닌 지점에서 **극한값이 최댓값 / 최솟값이 될 수 없다**는 사실을 알고 문제 풀이에 이용할 수 있는가?

| NOTES

- 문제 풀이의 실마리가 보이지 않을 경우, 위와 같은 상황에서는 **조건을 만족시키는 간단한 함수**를 넣어 본 다음 답을 도출할 수 있다. ㄷ의 경우, 다항함수 $f(x)=-x-3$을 대입해 보면 틀리다는 것을 쉽게 알 수 있다.
  반례가 나오면 답이 결정되고, 반례가 아니더라도 상황 이해에 도움을 줄 수 있다.

- $\lim\limits_{x\to-3-}h(x)=\lim\limits_{t\to0+}g((-3-)+t)\times\lim\limits_{t\to2+}g((-3-)+t)=(-3)(-1)=3$ (단, $-3-$는 -3의 좌극한이다.)

  여기서, $\lim\limits_{t\to2+}g((-3-)+t)$ 부분이 헷갈린다면, $x=-3-$ (좌극한)을 생각하지 말고 2.99 등을 대입해보자.
  결과적으로 3보다 아주 작은 x에, $\lim\limits_{t\to2+}g(x+t)$가 대입되는 것이라고 보면 된다.

  혹시라도 $t\to2+$ (우극한)와 $x\to-3-$ (좌극한)가 상쇄되어 $x+t=5$가 될 것이라고 착각해서는 안된다.

- 어떤 두 함수의 곱함수를 그래프로 그려야 될 때는 **양수 / 음수**인지, **증가 / 감소**하는지에 집중해서 해석해 보면 **곱함수의 부호 및 증감**을 쉽게 알아낼 수 있다.

- 준킬러 이상의 변별력을 지닌 ㄱ, ㄴ, ㄷ 선지형 문제에서 답이 ①이 되는 것은 최근 들어 매우 드문 일이었다. 따라서, 기존에 이 유형의 기출 문제를 풀 때 **①을 고려선상에서 배제하고 푼 사람**이라면 꽤나 혼란스러웠을 수 있다.

  다만, 평가원도 **선지를 평소와 다르게 줌**으로써 (⑤번 선지가 평소와 같은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 아닌 ㄴ, ㄷ으로 출제됨.) 이러한 변화구에 대한 떡밥을 넌지시 주었다.

★★★

정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

얼핏보면 이런 생각이 든다.

"평균변화율을 살펴보아야하나..?"

그러나, 너무 많은 경우의 수가 떠오른다. 과연 **우리는 x_1, x_2, x_3를 모두 고려해야하는 것일까**..?

발문에 따르면 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하기만 하면 된다.

x_2에 초점을 맞춰 생각해보면, 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서

$(x,\ f(x))$와 $(x_2,\ f(x_2))$를 잇는 직선의 기울기가 음수가 되는 x와 양수가 되는 x가 공존하면 되는 것이다.

극단적인 경우, $x=x_2-$(음극한)와 $x=x_2+$(양극한)도 생각해볼 수 있다.

또한, x_2도 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$ 내의 어떠한 실수이든 상관이 없다.

"그렇다면... 아..! **순간변화율의 부호가 바뀌는지,**

즉 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서 극대 또는 극소를 갖는지를 묻는 것이구나."

이 과정을 끝냈다면 문제의 절반을 푼 것이다.

(위의 모든 과정은 충분한 문제를 풀며 경험을 쌓아두었다면, 직관을 통해 바로 파악할 수도 있다.)

이제, 정수 k에 대해 삼차함수 $f(x)=x^3-2ax^2$이 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서 극값을 가지면 된다.

$f'(x)=3x^2-4ax=3x\left(x-\frac{4}{3}a\right)=0$이므로,

$k=-1$일 때 확정적으로 열린 구간 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에서 극값을 가진다.

그리고, $\frac{4}{3}a$가 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 포함되어 있다면 해당 k에 대해 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서 극값을 가질 것이다.

만약 $\frac{4}{3}a$가 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{1}{2}\right)$안에 있다면, k와 $k+1$의 열린 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$, $\left(k-1,\ k+\frac{1}{2}\right)$ 안에
공통적으로 존재하게 된다.

이를 알아보기 위해 $\frac{4}{3}a$에서 a를 $3p-2$, $3p-1$, $3p$인 경우로 나누어볼 필요가 있다. (p는 정수)

i) $a=3p-2$인 경우,

$\frac{4}{3}a=4p-\frac{8}{3}=(4p-3)+\frac{1}{3}$이므로, $4p-3=m$이라고 하면
$\frac{4}{3}a=m+\frac{1}{3}$이므로 열린 구간 $\left(m,\ m+\frac{3}{2}\right)$과 $\left(m-1,\ m+\frac{1}{2}\right)$ 안에 공통적으로 존재한다.

이 경우, $k=-1,\ 4p-3,\ 4p-4$로,

$p=0$일 때 $k=-1,\ -3,\ -4$이므로 모든 정수 k의 곱이 -12가 된다.

$\therefore\ a=-2$

이제, $f(x)=x^3+4x^2$을 미분하면 $f'(x)=3x^2+8x$이고, $x=10$을 대입하면

$f'(10)=380$

답: 380

이제 답을 구했으니, 나머지 경우도 살펴보자.

ii) $a=3p-1$인 경우,

$\frac{4}{3}a=4p-\frac{4}{3}=(4p-2)+\frac{2}{3}$이므로, $4p-2=m$이라고 하면
$\frac{4}{3}a=m+\frac{2}{3}$으로, 오직 열린 구간 $\left(m,\ m+\frac{3}{2}\right)$ 안에만 존재한다.
이 경우 $k=-1,\ 4p-2$로, 어떠한 정수 p에 대해서도 모든 정수 k의 곱이 -12가 될 수 없다.

iii) $a=3p$인 경우,

$\frac{4}{3}a=4p$이므로 오직 열린 구간 $(4p-1,\ 4p+\frac{1}{2})$ 안에만 존재한다.

이 경우 $k=-1,\ 4p-1$로, 어떠한 정수 p에 대해서도 모든 정수 k의 곱이 -12가 될 수 없다.

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 주어진 조건을 해석하여 해당 조건이 열린 구간 내에서의 **극값의 존재여부를 묻고 있음**을 파악할 수 있다.

2. a가 정수임을 이용해 $\frac{4}{3}a$가 두 개의 열린 구간에 속해있는 경우와, 오직 하나의 열린 구간에 속해있는 경우로 나누어 그에 따른 가능한 정수 k를 구할 수 있다.

| NOTES

- 어떠한 기울기 조건과 임의의 실수 $x_1,\ x_2$라는 조건을 줬다면, **곧바로 순간변화율을 의심할 필요가 있다.**
  여러 기출들을 살펴보면, 임의의 실수 $x_1,\ x_2$라는 표현과 기울기 조건이 주어졌을 때 대부분
  평균변화율의 의미가 퇴색된 채 순간변화율로써 사용됨을 볼 수 있다.

★★

두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은?

① $\dfrac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$ ④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}+3\sqrt{2}$

$f(x)$가 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다고 했으므로,

$f(x)$는 $x=-1$에서 **유일한 극점**(극소)을 갖는 것 같다.

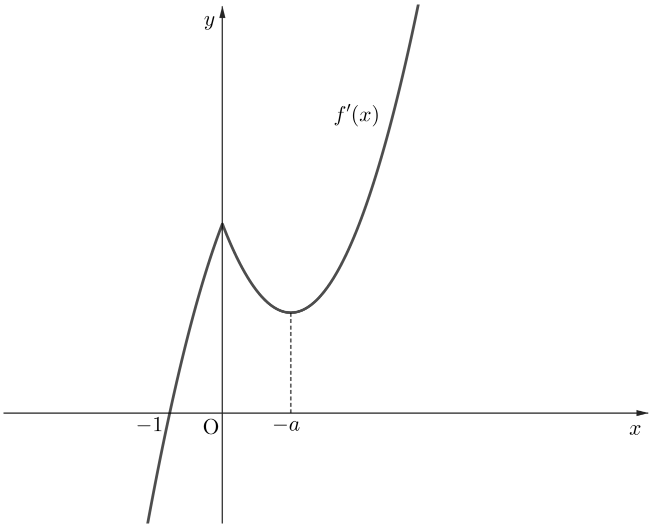
$f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x<0) \\ x^2+2ax-b & (x\geq 0) \end{cases}$ 이므로, $f'(-1)=-1+2a-b=0 \Rightarrow b=2a-1 \cdots$ ㉠

이에 따라, $f'(x)$를 해석하면 이차함수 $y=x^2+2ax$가 $-b$만큼 **평행이동한 뒤**,
$x<0$에서 $y=-b$를 기준으로 **뒤집혀 만들어진 함수**라고 생각할 수 있다.
(이러한 해석을 통해 개형을 그리는 것이 직관적이다.)

따라서, 이차함수 x^2+2ax의 **축이 되는 $x=-a$의 위치**를 기준으로 개형을 나눠보자.

$i)$ $a<0$일 때,

다음과 같이 그래프가 그려지면 조건이 성립된다.



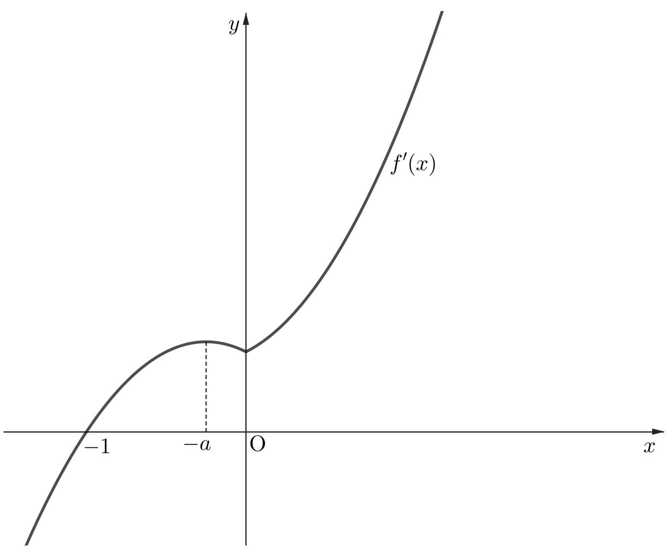
그래프를 해석하면, 극소를 갖는 $x=-a$에서 **극솟값이 음수가 아니면** 된다.
식으로 표현하면, $f'(-a)=-a^2-b\geq 0$

b에 ㉠($b=2a-1$)을 대입하면 $-a^2-2a+1\geq 0 \Rightarrow a^2+2a-1\geq 0$이므로,
근의 공식을 사용하여 $-1-\sqrt{2}\leq a \leq -1+\sqrt{2}$

$\therefore\ -1-\sqrt{2}\leq a<0$

$ii)$ $a>0$일 때,

다음과 같이 그래프가 그려지면 조건이 성립된다.



그래프를 해석하면, 극대를 갖는 $x=-a$에서 **극댓값이 양수**이고, **y절편이 음수가 아니면** 된다.

식으로 표현하면, $f(-a)=a^2-b>0$, $-b \geq 0$

b에 ㉠$(b=2a-1)$을 대입하면, $(a-1)^2>0$, $a \leq \frac{1}{2}$

$\therefore\ 0<a \leq \frac{1}{2}$

$iii)$ $a=0$일 때,

y축과의 교점이 0보다 크거나 같으면 성립한다.

따라서 $-b \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$

$\therefore\ a=0$

세 경우를 종합하면, a의 범위는 $-1-\sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$이고, $b=2a-1$이므로 $a+b=3a-1$이다.

따라서, $-4-3\sqrt{2} \leq 3a-1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow m=-4-3\sqrt{2}$, $M=\frac{1}{2}$

$\therefore\ M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

답: ③

| 무엇으로 학생들을 변별했는가?

1. **이차함수의 축을 기준**으로 개형을 나누어 a의 범위를 구할 수 있는가?

★★

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① 51　② 52　③ 53　④ 54　⑤ 55

"**<u>자연수 조건</u>**이 나왔네? 일단 **<u>마지막에 케이스 분류</u>** 좀 할 수도 있겠다고 유념해 두자."

직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 $g(t)$다. 일단 개형부터 그려보자.

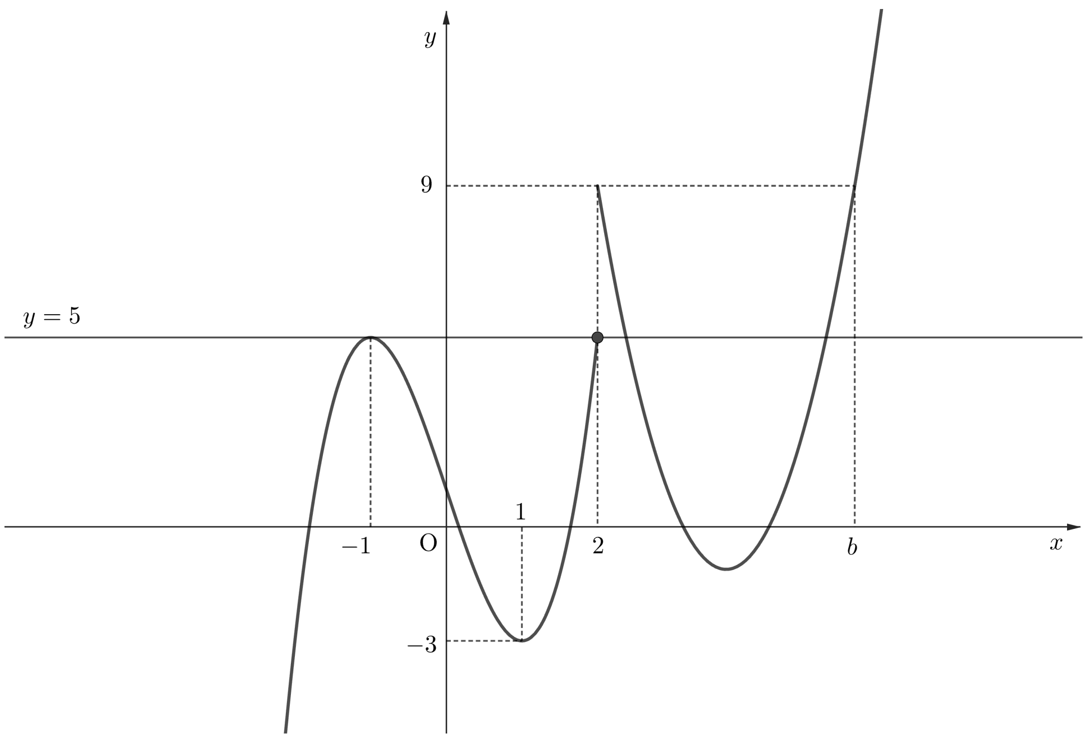
그래프의 왼쪽$(x\le 2)$부터 살펴보면,

$f(x)=2x^3-6x+1$ $(x\le 2)$
$f'(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$ $(x<2)$

극대점은 $(-1, 5)$, 극소점은 $(1, -3)$인 삼차함수이다.
구간의 경계값은 $(2, 5)$로, 이때 y좌표가 극댓값과 같다. (삼차함수의 비율관계를 통해서 바로 알 수도 있다.)

오른쪽$(x>2)$은 $(2, 9)$, $(b, 9)$를 지나는 최고차항이 양수인 이차함수이다.

그러므로 전체 개형은 다음과 같다.



"이제 $g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$가 유일하다는 사실을 따져 보자."

$g(t)$는 **x축에 평행**한 직선($y=t$)과 **그래프**($y=f(x)$)의 교점의 개수이다.

이차함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 대칭축이 $x=2$**보다 왼쪽에 있다면**,
($b<2$일 때와 동일하다.)

이차함수는 $x>2$에서 항상 증가하므로, 삼차함수 구간($x\le 2$)과 이차함수 구간($x>2$)에서의
치역이 서로 겹칠 일이 없다.

삼차함수 **감소 구간**에 해당하는 치역($-3<y<5$)에서 x축과 평행한 직선과의 **교점이 항상 3개**이므로,
이는 $g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$가 유일해야한다는 조건에 어긋난다. ⋯ ㉠

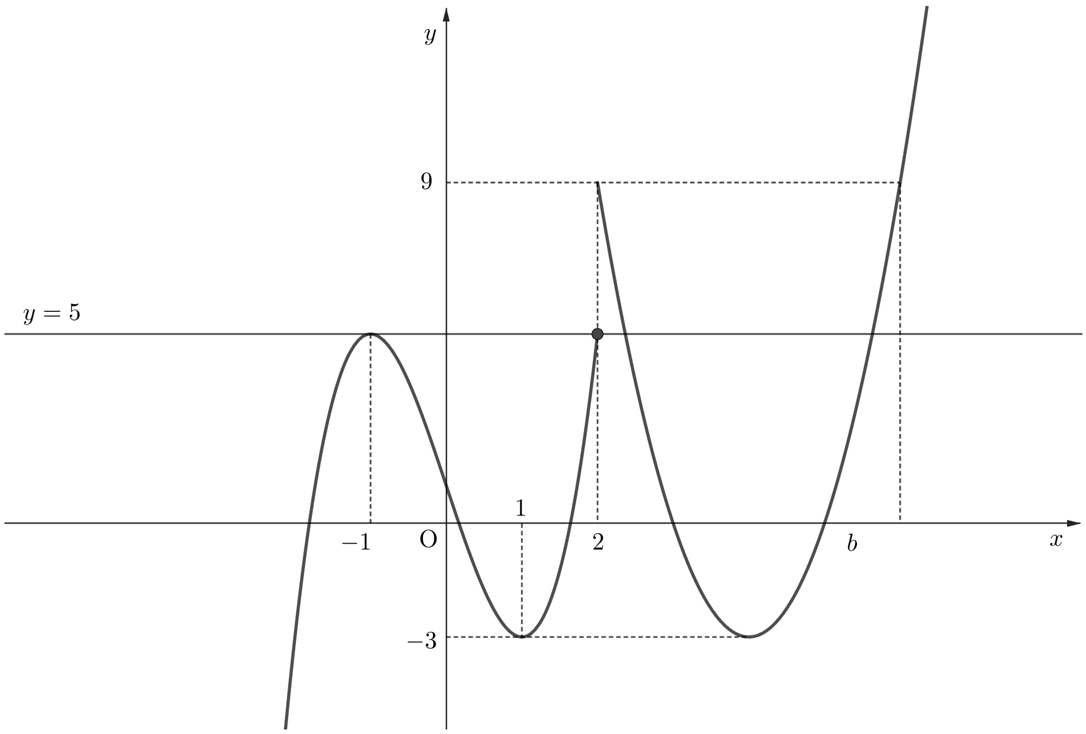
따라서, 이차함수의 대칭축은 $x=2$ 오른쪽에 있다.

$\therefore\ b>2$

"그래프 교점의 개수는 극값 주변에서 변하니까, 좀 **특별한 경우**인
이차함수 구간($x>2$)의 **최솟값**이 삼차함수 구간($x\le 2$)의 **극솟값이나 극댓값**과 **같을 때**,
극댓값이나 극솟값 주변에서 조건을 만족하지 않을까..?"

"그런데 생각해보니 만약 **극댓값**과 최솟값이 일치한다면, 삼차함수의 **감소구간**에 해당하는 치역($-3<y<5$)에서
아까와 같이 전부 교점이 3개가 나오겠네. 역시나 ㉠에 위배되겠다."

"따라서 **극솟값**과 최솟값이 일치하는 경우를 살펴보자."



삼차함수 구간$(x \le 2)$의 극솟값이 $y = -3$이므로, $y = -3$와 $y = -3+$ (살짝 위), $y = -3-$ (살짝 아래)
이렇게 x축과 평행한 세 직선을 그어 각각 교점의 개수를 따져보자.

$g(-3-) = 1$
$g(-3) = 3$
$g(-3+) = 5$

$g(-3) + \lim_{t \to -3-} g(t) + \lim_{t \to -3+} g(t) = 9$가 나온다.

"이게 답일 것 같다."

혹시 모르니 극댓값 주변$(y = 2)$을 살펴보면, $g(5) + \lim_{t \to 5-} g(t) + \lim_{t \to 5+} g(t) = 11$로 조건을 만족하지 않는다.
마지막으로 이차함수 구간의 왼쪽 경계 주변$(y = 9)$을 살펴봐도,
$g(9) + \lim_{t \to 9-} g(t) + \lim_{t \to 9+} g(t) = 4$로 조건을 만족하지 않는다.
(이외의 지점에서는 교점의 개수가 변하지 않는다.)

"이제 가능한 k가 **극솟값으로 유일하다**는 것을 확인했다.
이제 이차함수 최소값이 삼차함수 극소값이랑 일치한다는 식을 세우고, 자연수 조건을 이용해서 잘 찾으면 끝나겠네."

이차함수는 $x = \dfrac{b+2}{2}$에서 최솟값을 가지며, 삼차함수 구간의 극솟값은 -3이다.

$$a\left(\frac{b+2}{2}-2\right)\left(\frac{b+2}{2}-b\right)+9=-a\left(\frac{b-2}{2}\right)^2+9=-3$$

$$a(b-2)^2=48 \quad (b>2)$$

"자연수 조건이 주어진 부정방정식이다.
그럼 가능한 경우의 수는 유한하고, $a+b$가 최대가 되도록 잘 찾아내면되겠군."

"둘 다 자연수고, b가 조금만 커져도 방정식에서는 **제곱이 되어** a는 엄청 작아지네.
그럼 b가 최대한 작아야 $a+b$가 보다 더 커지겠다."

$b=3$이면 $a=48$이다.

$\therefore\ a+b=51$

"선지에 51이 있다. 체크하고 넘어가자."

답 : ①

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 미분을 통해 삼차함수의 개형을 판단할 수 있는가?

2. 이차함수의 최소값, 삼차함수의 극점 등을 통해 **그래프**와 x축과 **평행한 직선**$(y=t)$과의 교점을 따질 수 있는가?

3. 자연수 조건을 이용해 주어진 식에서 **가능한 경우가 유한하다**는 것을 알 수 있는가?

| NOTES

- 이 문제 역시도 극값과 최솟값이 일치하는 특수한 상황이 답으로 나왔다. **교점의 개수**를 따지는 문제에서는 **특수한 경우부터 먼저 따져보자**. 이 문제에선 엄청나게 많은 케이스가 나올 수 있는데, 시험장에서 하나하나 걸러내기보단 가장 그럴듯한 상황을 추측하는 것이 시간 절약에 큰 도움이 된다.

- 삼차함수 극대값과 이차함수 극소값이 일치하는 경우부터 따지지 않은 이유가 있는데, 이차함수에 이해가 깊은 학생은 이차함수 최소값이 작아져야 a, b**의 값이 최대한 커진다는** 사실을 알 것이다. 우리의 목적은 $a+b$를 최대한 키우는 것이므로 이것부터 따질 필요가 없다.

- 삼차함수의 **감소 구간**과 x축과 평행한 직선의 **교점의 개수가 3개**인 건 항상 생각할 필요가 있다.

  이 사실을 머릿속에 넣고 다니는 학생은 해당 문제의 경우, $9=3+3+3$가 보이기 때문에 바로 불필요한 케이스를 배제하고 개형을 찾아냈을 것이다.
- 나머지 경우의 수에 대한 검토는 다른 문제들을 전부 건드려보고 나서 돌아오고 나서 하자.