ALMOOL

알물 : 알 때까지 물어봐!

12

$a_2 = -4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = a_n + a_{n+1}(n \geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

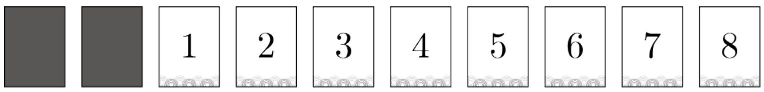
라 하자. $n(A \cap B) = 3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

29

그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



12

a_n의 공차를 d라 하면 b_n은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
$n(A \cap B) = 3$이고, 세 원소는 모두 B의 원소이다.
따라서 세 원소 중 가장 작은 값을 k라 할 때,
나머지 두 원소로 가능한 값은 $k+2d$, $k+4d$, $k+6d$, $k+8d$ 중 두 개이다.
그런데 세 원소는 모두 A의 원소이고, $a_5 - a_1 = 4d$이므로,
$a_1 = k$, $a_3 = k+2d$, $a_5 = k+4d$만이 주어진 조건을 만족시킬 수 있다.
이때 k의 값에 따라 분류하면 다음과 같다.

① $k = b_1$인 경우
$a_1 = b_1$에서 $a_1 = b_1 = a_1 + a_2$이므로 $a_2 = 0$이다.
이는 문제의 조건에 위배된다.

② $k = b_2$인 경우
$a_1 = b_2$를 이용하기 어려우므로 다른 두 항에 관한 식을 조사하면
$a_3 = b_3$, $a_5 = b_4$이다. 둘 중 어느 식을 활용하여도 동일하게 $a_4 = 0$을 얻고,
이때 $a_{20} = 32$이다.

③ $k = b_3$인 경우
$a_1 = b_2$를 이용하기 어려우므로 다른 두 항에 관한 식을 조사하면
$a_3 = b_4$, $a_5 = b_5$이다.
둘 중 $a_5 = b_5$를 활용하면 $a_6 = 0$을 얻고,
이때 $a_{20} = 14$이다.

따라서 $32 + 14 = 46$이다.

정답 : ⑤

29

흰 카드는 문제의 그림에 배열된 대로 둔 뒤,
검은색 카드를 사이사이에 끼워넣는다고 생각할 수 있다.
두 검은색 카드 중 왼쪽에 배치할 카드를
3보다 왼쪽에 놓는 경우와 3와 6 사이에 놓는 경우로 분류할 수 있다.

(1) 3보다 왼쪽에 놓는 경우

왼쪽의 검은색 카드를 1 왼쪽 또는 2 왼쪽에 놓을 경우에는
오른쪽의 검은색 카드를 놓을 수 있는 자리가 6가지이므로
2×6
왼쪽의 검은색 카드를 3 왼쪽에 놓을 경우에는
오른쪽의 검은색 카드를 놓을 수 있는 자리가 5가지이므로
1×5

(2) 3과 6 사이에 검은색 카드가 놓이는 경우

왼쪽의 검은색 카드를 4 왼쪽 또는 5 왼쪽에 놓을 경우에는
오른쪽의 검은색 카드를 놓을 수 있는 자리가 3가지이므로
2×3
왼쪽의 검은색 카드를 6 왼쪽에 놓을 경우에는
오른쪽의 검은색 카드를 놓을 수 있는 자리가 2가지이므로
1×2

종합하면 $2(6+3)+(5+2)=25$이다.

정답 : 25