한권에 정리하는 수1

수열 - ① 함수

② 수의 나열
- 1) Named - 특징/성질 - 계산
- 2) 일반수열 - 직접 써보기 → 규칙성

< 해보자! 써보자! 특이항 주의!>

수열의 합이 복잡 + 규칙성 가질 때,
K항과 K+1, K-1 항과의 관계를 구한다
→ <자체소거꼴의 합!!!>

· $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$

$k\cdot k! = a(k+1)! - ak!$

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + 100\cdot 100!$

$-1! \quad 2! \; -2! \quad 3! \; -3! \quad 4! \quad \cdots \quad -100! \quad 101!$

$= 101! - 1!$

$\boxed{1}$ 등차수열

- ① 서로 다른 두항 → 공차 알기 ex) $a_{12}-a_6=6d$
- ② a_1, 공차
- ③ 기울기가 d인 n에 대한 일차식

· 등차수열의 합 = (평균 $\frac{첫+끝}{2}$) × 항의개수 ∴ $\frac{n(a+l)}{2}$

ex) $a_1+\cdots+a_7 = 7\times\frac{a_1+a_7}{2} = 7\times a_4$

* 등차수열 합의 대칭성

$a_1+a_7=a_2+a_6=a_3+a_5=2a_4$

⇒ 짝수항) $a_1+\cdots+a_6$

$6\times\frac{a_1+a_6}{2}=6\times a_{3.5}$

없는 항 생성해서 풀이 가능!

∴ 합이 "0" = 센터가 "0"이다

$a_1+a_3+a_5+a_7=0$

$|a_1|=|a_7|, \; |a_3|=|a_5|$

} 대칭되는 점끼리 절댓값 =

· 등차수열의 재구성

↳ 등차수열은 지네끼리 +, -, 실수배 해도 등차수열

[a_n+3b_n, a_n+a_{n+1} ⇒ 등차
$a_1+a_2-a_3$, $a_4+a_5-a_6\cdots$ ⇒ 등차

/ S_n의 등차수열 존재

ex) $S_{10}=10$, $S_{20}-S_{10}=20$, $S_{30}-S_{20}=30\cdots$

↳ $a_1+\cdots+a_{10}$, $a_{11}+\cdots+a_{20}$, $a_{21}+\cdots+a_{30}$

등차수열 이룬다

10d 10d 차이

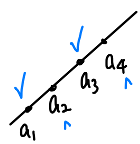
↳ 일차식 합성해도 등차수열

a_n → 공차 : d $n \to pn+q$

∴ 공차 : pd 인 등차수열

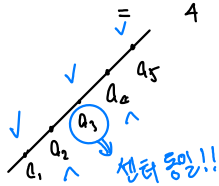
* 등차수열 홀수번째 합, 짝수번째 합

i) 항의개수 = 짝수 -
1st. 합의비 = 평균비
2nd. 차 = 3d, -3d → 공차와 연관
3rd. 합 = 전체 합



check) 내가 무엇을 구해야 하고 필요로하는 요소 구하기!!!

ii) 항의개수 = 홀수 -
1st. 합의비 = 항의개수비 — 센터가 같다
ex) $a_1\cdots a_7$ $(a_1+a_3+a_5+a_7):(a_2+a_4+a_6)$
$= 4 : 3$
2nd 차 = 센터



$a_0 \; a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5$ 같은합 구조
여기서 답을 찾기 어려울 때
새로운항으로 비교

- 등비수열의 곱 = 1, −1

↳ 정중앙 기점, 대칭인 항들의 절댓값이 역수다

- 등비수열의 재구성

↳ 일정한 간격, 개수로 ⊕, ⊖, 실수배 → 새로운 등비수열

- S_n도 등비수열을 이룰 수 있다!

↳ 일정한 간격, 일정한 개수로 → 등비수열 이룸 ⇒ 얘도 간격마다 (개수 × 공비) 만큼 차이!!

- 등차 vs 등비 관계 : $\underbrace{\log_p 등비 = 등차 \;/\; p^{등차}}_{지수로그 함수로 관계 보일수 O} = 등비$

* 등비수열의 합 ① 구조적 파악

② 합공식 → $A - Ar^n$ = 등비수열 이구나!

ex) $S_n = 3 - 3 \cdot 4^n \therefore a_n$ = 등비수열

- 일반적) 등비 ± 등비 ≠ 등비
- 특수적) 등비 ± 등비 = 등비?

↳ 두 등비의 공비가 같다!!

4 여러가지 수열의 합 Σ

- 특이한 Σ 구하기 1) $\sum_{k=4}^{10} (k^2+k)$

$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{k=4}^{10} a_k$

$\sum_{k=4}^{10} (k^2+k) \rightarrow \sum_{k=1}^{7} \{(k+3)^2 + (k+3)\}$ ex) $\sum_{k=6}^{9} n^2+n$

↳ $\sum_{k=1}^{4} (n+5)^2 + (n+5)$

k^2+k를 평행이동시켜

강제로 밑, 윗끝 맞추기!! ⇝ 적분과 유사!!!

2) 홀수의 합 = 거듭제곱 ⇒ $1+3+5+7+\cdots(2n-1) = n^2$

공차 2, 등차수열

⇕

이웃한 제곱수의 차 = 홀수

⇒ $n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$

3) 교대급수 : "스스로 파악 → 계산"

① 이항분리 ⇒ $\Sigma(\underbrace{B - A})$

같은수열, just 평행이동

ex) $\sum_{k=1}^{n} \frac{C}{AB}$ 일시 $\boxed{A - B = C \text{ 에 연관!}}$

Σ 계산의 규칙성

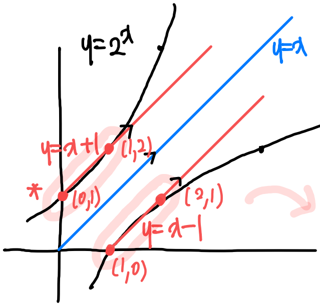
$\sum k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\sum k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$\sum k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

<· 밑이 2인 지수·로그함수> with $y=x$



$\therefore$ $2^x = x+1$
$\log_2 x = x-1$ 의 교점을 바로 알수 OK

<· 좌표의 대칭>

ex) $y=2^x$

- 원점대칭 : $y=-2^{-x}$
  - ⊕ x축 $+m$: $(\frac{m}{2},0)$ 점대칭
  - ⊕ y축 $+n$: $(0,\frac{n}{2})$ 점대칭
  - ⊕ x축 $+m$, y축$+n$: $(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$ 점대칭

<· 지수/로그의 조작>

① 식조작 → ② 밑변환

$y= k\cdot a^x = a^{\log_a k}\cdot a^x = a^{\log_a k + x}$: x축 평이

$y=\log_a kx = \log_a k + \log_a x$: y축 평이

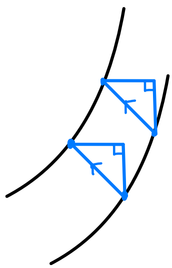
<· 평행이동의 기하적 의미>

직각△

① 기울기 일정
② 거리 일정

역추적도 OK

[기울기가 일정한 직선 ⟷ 거리 일정]



<· 선대칭 + 평행이동>

- y축 대칭 + x축 평이 OK
  + y축 평이(X)

- x축 대칭 + y축 평이 OK
  + x축 평이 (X)

- 대칭의 기준선 ⇒ 1. 수직이등분선
  2. 이등변 △ → 직각 △

<· 지수와 로그의 성질> 10, 11

지수 – 거듭제곱

- $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ $(a<0, b<0)$
- $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ $(a>0, b<0)$

+) 밑통일 / 지수통일 경우에 따라 맞게

ex) $\sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{16} = -2^{\frac{4}{3}} = -2\times 2^{\frac{1}{3}}$

밑 <0 일때 매우 조심히 다뤄야 한다

로그 – 밑변환공식, 상용로그

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

- $\log x = n + \alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$

소수점의 이동

ex) $\log x = \boxed{2} + 0.4924$ → 3.XXX / $\boxed{-2} + 0.4924$ → 0.003.XXX

+ PLUS + < 수열 관계 심화 학습 > + PLUS +

「정의」

수열 : 수의 나열

「유형1」 등차수열 : $a_1 + d(n-1)$

등차중항

등차수열의 합 : $\frac{n(a+l)}{2}$

「유형2」

등비수열 : ar^{n-1}

등비중항

$\sum_{k=1}^{n} a_k \rightarrow a_k = b_{k+1} - b_k$ or $a_k = b_{k+2} - b_k$

등비수열의 합 : $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$: $ar^k = br^{k+1} - br^k$ 자체소거 꼴

$= \frac{a}{r-1} r^{k+1} - \frac{a}{r-1} r^k$

합의 원리 [등차수열, 자체소거 꼴]

ex) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$

$k \cdot k! = a(k+1)! - ak!$

ex) $(k+1)^2 (k+1)! - k^2 k!$

$k! \{(k+1)^3 - k^2\}$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 100 \cdot 100!$

$-1! \quad 2! \quad -2! \quad 3! \quad -3! \quad 4! \quad \cdots \quad -100! \quad 101!$

$= 101! - 1!$

「관계식」

a_n과 S_n의 관계

: $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$, $a_1 = S_1$

• 점화식

1. $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots$

$+f(1) \quad + f(2) \quad + f(3) \quad \cdots$

$a_{n+1} = a_n + f(n)$

보기더 쉽게

$\rightarrow a_n = a_1 + (f(1) + \cdots + f(n-1))$

$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{2}{3^n}$

ex) $a_{n+1} = 3a_n + 6$

** 3. $a_{n+1} = pa_n + q$

$\rightarrow \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{q}{p^{n+1}}$

~의 일반항 = 등차수열 $f(n)$ 일정

4. $a_{n+2} - pa_{n+1} + qa_n = 0$

2. $b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots$

$\times g(1) \quad \times g(2) \quad \times g(3) \quad \cdots$

$\rightarrow b_n = b_1 \times (g(1) \times g(2) \cdots \times g(n-1))$ ~의 일반항 = 등비수열 $g(n)$ 일정

$= b_1 \prod_{k=1}^{n-1} g(k)$

• 수학적 귀납법

$a_1 =$

$n=k$ 일때가 성립한다고 가정할 때,

$n=k+1$ 일때 성립함을 증명하면 a_n일 때도 성립