고등학교 1학년 2학기
수학(하) 중간고사 대비

어수강 수학

들어가며

1) 자료 소개

: 입시에서 대학의 ‘Needs’는 무엇일까? **단언컨대 대학의 유일한 Needs는 ‘우수한 학생을 선발하는 것’이다.** 최상위 대학에 진학하려면 우수한 학생이 되어야 한다.

그렇다면 어떤 학생이 우수한 학생일까? 많은 학생들이 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한다. **하지만 이유도 모른 채 기계적으로 답만 잘 맞히는 학생을 우수하다고 생각하는 대학은 없을 것이다.** 대학은 이와 같이 공부한 학생을 떨어뜨리려고 할 것이다. **때문에 상위권과 최상위권을 변별하기 위한 준킬러와 킬러 문항은 ‘생소한 형태’로 출제된다.**

문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한 학생이 시험에서 ‘생소한 유형’의 문제를 맞닥뜨리면 어떻게 될까? 아마도 제대로 풀지 못할 것이다. 시간만 뺏기고 답을 내지 못하면 멘탈이 무너질 수도 있다. 이렇게 되면 시험을 망칠 가능성이 높다.

그렇다면 어떻게 공부해야 할까? 3년간 공부한 것을 수능에서는 30문제로 평가한다. 때문에 핵심적인 개념과 아이디어 위주로 시험에 출제할 수 밖에 없다. 고난도 문제는 이를 생소한 형태로 출제하는 것일 뿐이다. 면접이나 논술에서도 마찬가지다. **따라서 문제와 그 풀이를 유형화할 것이 아니라, 학습목표에 해당하는 핵심적인 개념과 아이디어에 초점을 맞추고 공부해야 한다.** 핵심 개념과 아이디어를 바탕으로 문제를 분석하고 해결함으로써, 이것들이 언제 어떻게 쓰이는지, 무엇을 주의해야 하는지 등을 신경 써서 공부하면 된다.

본 자료의 목적은 “핵심 개념과 아이디어를 바탕으로 다양한 문제를 체계적, 논리적으로 분석하고 해결함으로써, 이를 공부한 학생들이 ‘생소한 형태의 고난도 문제를 쉽고 정확하게 해결’할 수 있도록 하는 것”이다. 이를 통해 안정적인 1등급 달성하고 최상위권 대학 진학하길 바란다.

2) 누구를 위한 건가요?

□ 치열하게 공부하는데도 성적이 오르지 않는 학생
□ 생소한 형태의 문제가 두려운 학생
□ 안정적인 1등급을 원하는 학생
□ **최상위권 대학 진학이 목표인 학생**

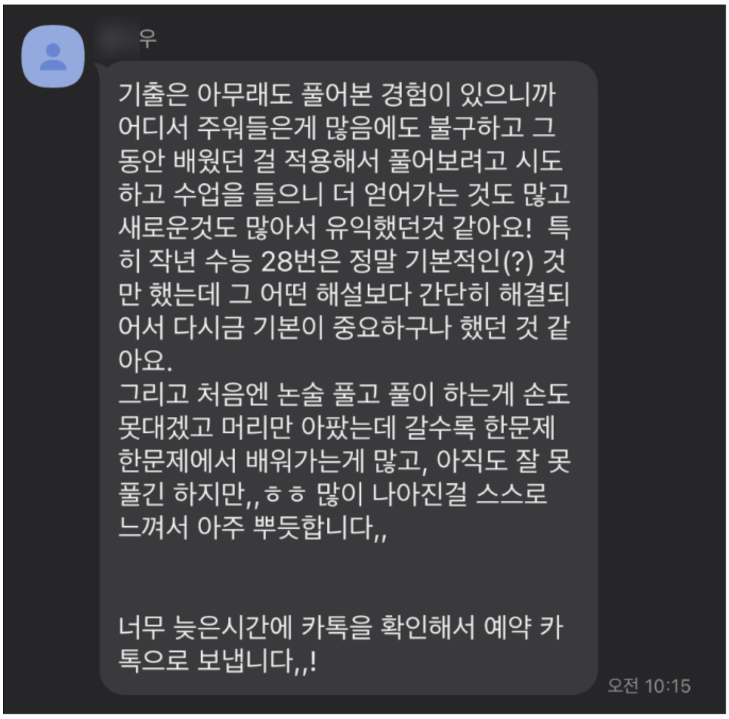
3) 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

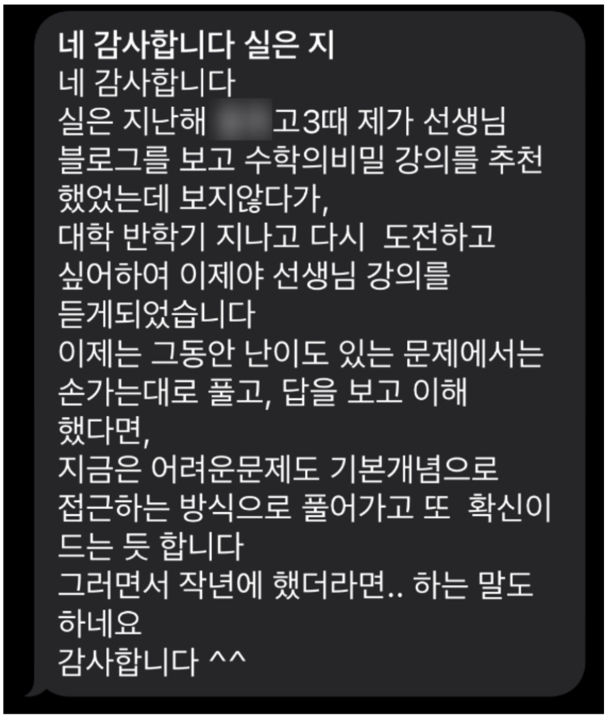
□ 핵심 개념과 아이디어에 대한 이해
□ 문제를 체계적이고 논리적으로 분석하는 방법
□ 생소한 형태의 고난도 문항에 대한 두려움 해소
□ **안정적인 1등급 및 최상위권 대학 진학**

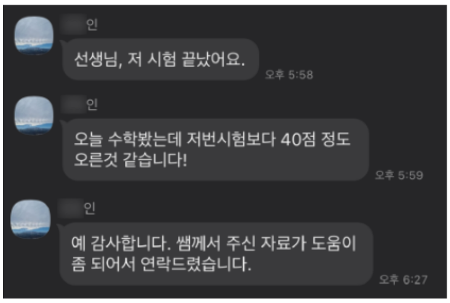
4) 어수강 수학

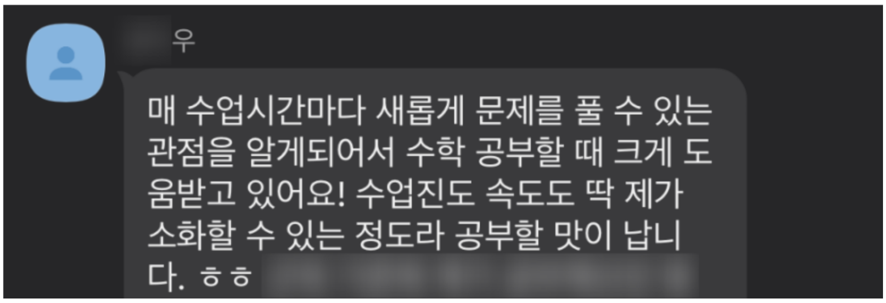
☐ 홈페이지 : www.soogangmath.com
☐ 블로그 : blog.naver.com/math-fish
☐ 유튜브 : www.youtube.com/@soogangmath
☐ 이메일 : mathfish@snu.ac.kr
☐ 전자도서 : 당신이 수학을 망치는 N가지 이유, 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀

5) 후기





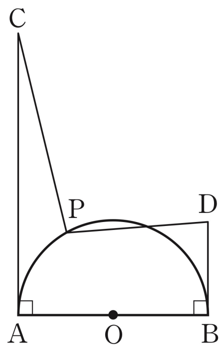




6) 온라인 교육상담 신청 및 온라인 강의 신청하기
: www.soogangmath.com/inquire

[강의록]

[예제1-1] 다음 그림의 반원에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$, $\overline{\mathrm{BD}}=2$이고, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이다. 점 P가 반원의 호 AB 위를 움직일 때, 다각형 ACPDB의 넓이의 최댓값을 구하시오.[1]



[예제1-2] 집합 $A=\{a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4\}$의 모든 부분집합을 $\varnothing$, A_1, A_2, $\ldots$, A_n, A라 하고, 집합 A_i의 모든 원소의 합을 s_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$라 하자. $s_1+s_2+\cdots+s_n=98$일 때, $a+2n$의 값을 구하시오. (단, a는 실수이고, n은 자연수이다.)[2]

[예제1-3] $m^2+n^2 \le 10$을 만족시키는 두 정수 $m,\ n$에 대하여 실수 x에 대한 두 조건 $p,\ q$가

$$p\ :\ x < m+1 \text{ 또는 } x \ge m+2, \quad q\ :\ -|n| < x \le |n|+1$$

일 때, 명제 $q \to p$가 거짓이 되도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오.[3]

[예제1-4] 두 이차함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + 3,\ g(x) = -3x^2 + 6x - 1$에 대하여 부등식 $f(x) > g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 상수 a의 값의 범위를 구하시오.[4]

[예제1-5] 다음 중 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 항상 성립하는 부등식을 모두 고르시오.[5]

㉠ $a^2 + |b| + c^4 \ge 2c^2 + 4a - 5$ ㉡ $a^2 - a - 2 \ge 0$ ㉢ $[2b] < 2[b] + 1$

㉣ $a^2 + b^2 + c^2 \ge \sqrt{2}|a|(|b| - c)$ ㉤ $(c - \pi + \sqrt{233})^2 + c - (\pi - \sqrt{233} - 1) > 0$

[예제1-6] 임의의 실수 b에 대하여 $a^4-4a^2b+b^2+6b\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 범위를 구하시오.[6]

[예제1-7] 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2023)$의 값을 구하시오.[7]

(가) $f(x) = 2 - |x-3|$ $(1 \leq x \leq 5)$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(5x) = 5f(x)$이다.

[예제1-8] 양의 실수 전체의 집합을 각각 정의역과 공역으로 가지는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $h(x) = f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(5)$의 값을 구하시오.[8]

(가) 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.
(나) $f(h(x)) = g(x)$, $g(h(x)) = f(x)$

[내신기출]

[예제1-9] x축과 y축에 모두 접하고 직선 $3x-4y-6=0$에 접하는 원은 a개이고 a개의 원의 반지름의 합을 b일 때, $a \times b$의 값을 구하시오.[9]

[예제1-10] 두 정수 a, b에 대하여, 실수 x에 대한 세 조건

$$p \,:\, x^2-8x+12<0,\ \ q \,:\, x \geq a-4,\ \ r \,:\, x \leq b+1$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최댓값을 구하시오.[10]

(가) p는 q이기 위한 충분조건이다.

(나) 명제 $p \rightarrow r$가 거짓이다.

[예제1-11] 두 이차함수 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4,\ g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 16$에 대하여 함수 $h(x) = \begin{cases} g(x) & (x < a) \\ f(x) & (x \geq a) \end{cases}$가 일대일대응이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.[11]

[예제1-12] 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \leq x \leq 1$인 실수 x에 대하여 $f(x) = |x^2 - 1|$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

함수 $g(x) = x + 2$에 대하여 두 직선 $x = -4,\ x = 4$와 두 함수 $y = (f \circ g)(x),\ (g \circ f)(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.[12]

어수강 수학

① 홈페이지 : www.soogangmath.com

② 유튜브 : www.youtube.com/@soogangmath

③ 블로그 : blog.naver.com/math-fish

④ 이메일 : mathfish@snu.ac.kr

⑤ 전자도서

1. 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀
2. 당신이 수학을 망치는 N가지 이유

⑥ **수업 및 교육상담 문의** : www.soogangmath.com/inquire

정답

[1] $8+4\sqrt{2}$

[2] 29

[3] 25

[4] $-3 \le a < 0$ 또는 $0 < a < 1$

[5] ㉠, ㉣, ㉤

[6] $-\sqrt{3} \le a \le -1$ 또는 $1 \le a \le \sqrt{3}$

[7] 1102

[8] 5

[9] 24

[10] 10

[11] -4

[12] 16