A083

○○○
(2009(7)고3-가형13)

정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [3점]

ㄱ. $x_1+x_2>0$
ㄴ. $x_1y_1+x_2y_2<0$
ㄷ. $|x_1y_2|-|x_2y_1|>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A084

○○○
(2020(10)고3-나형21)

두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

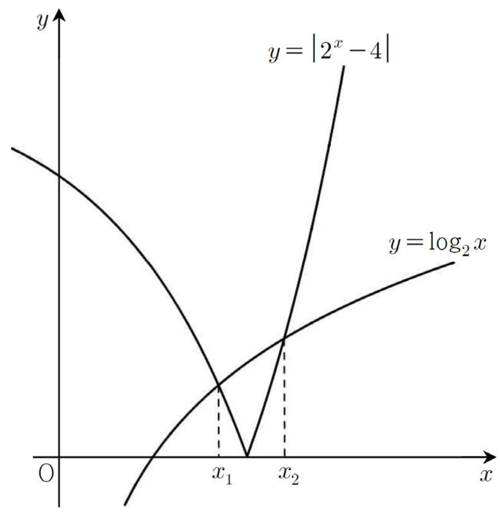
ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$
ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$
ㄷ. $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A085

●●●
(2021사관(1차)-나형21)

두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$
ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$
ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A086

●●●
(2022(5)고2-공통20)

$1<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 $\mathrm{A}(p,\ q)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $pq=1$
ㄴ. $a=2$일 때, $p>\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 원점 O와 점 $\mathrm{B}(p+q,\ 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이를 $S(p)$라 할 때, $S(p)<\frac{a+1}{2a}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A080 | 답 ⑤

[풀이]

네 점 A, B, C, D의 좌표를 구하면

$A(\log_2 a,\ a)$, $B\left(-\frac{1}{2}\log_2 a,\ a\right)$,

$C\left(-\log_2 b,\ \frac{1}{b}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}\log_2 b,\ \frac{1}{b}\right)$

▶ ㄱ. (참)

$\overline{AB}=\frac{3}{2}\log_2 a$, $\overline{CD}=\frac{3}{2}\log_2 b$

이므로 $a=b$이면

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{CD}$

▶ ㄴ. (참)

$$m_1=\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab},\ m_2=\frac{2\left(\frac{1}{b}-a\right)}{\log_2 ab}$$

$\therefore\ 2m_1+m_2=0$

▶ ㄷ. (참)

두 직선 AC와 BD가 서로 수직이므로

$$\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}\times\frac{2\left(\frac{1}{b}-a\right)}{\log_2 ab}=-1$$

즉, $\left(\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}\right)^2=\frac{1}{2}$, $\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⋯㉠

(직선 AD의 기울기)$=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2\frac{a}{\sqrt{b}}}=2\sqrt{2}$ ⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{\log_2 ab}{\log_2\frac{a}{\sqrt{b}}}=4,\ \log_2 a=\log_2 b,\ a=b$$

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$A(\log_2 a,\ a)$, $B\left(-\frac{1}{2}\log_2 a,\ a\right)$,

$C\left(-\log_2 a,\ \frac{1}{a}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}\log_2 a,\ \frac{1}{a}\right)$

두 선분 AC, BD의 중점은 모두

$$\left(0,\ \frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right)$$

이므로 사각형 ABCD는 마름모이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

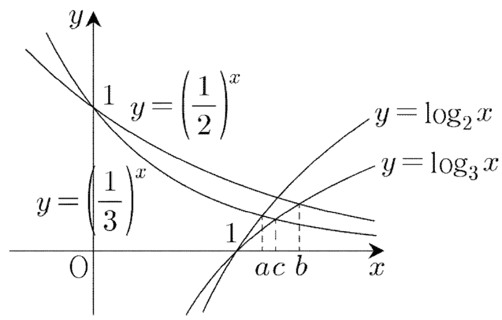
A081 | 답 ②

[풀이]

네 함수

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$

의 그래프를 한 평면 위에 그리면 아래 그림과 같다.



답 ②

A082 | 답 ⑤

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

점 $(d,\ c)$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$c=\left(\frac{1}{2}\right)^d$

▶ ㄴ. (참)

점 $(e,\ d)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있고,

점 $(a,\ e)$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$d=\log_2 e$, $e=\left(\frac{1}{2}\right)^a(\Leftrightarrow a=-\log_2 e)$

$\therefore\ a+d=0$

▶ ㄷ. (참)

$ce=\left(\frac{1}{2}\right)^d\left(\frac{1}{2}\right)^a=2^{-(a+d)}=1$

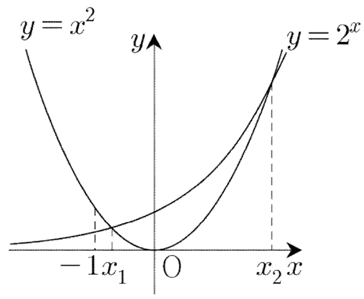
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A083 | 답 ③

[풀이]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$-1<x_1<0$, $x_2=2$이므로

$x_1+x_2>0$

▸ ㄴ. (거짓)

$-1<x_1y_1=x_1^3<0$이고,

$x_2y_2=2\times4=8$이므로

$x_1y_1+x_2y_2>0$

▸ ㄷ. (참)

$|x_1y_2|-|x_2y_1|$

$=|x_1x_2^2|-|x_2x_1^2|$

$=|x_1x_2|(|x_2|-|x_1|)>0$

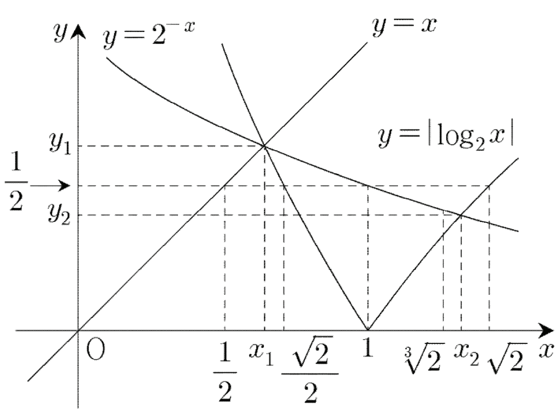
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A084 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 두 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1=\left|\log_2\dfrac{1}{2}\right|$,

$2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}>\dfrac{1}{2}=\left|\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|$

이므로 위의 그림처럼

$\therefore\ \dfrac{1}{2}<x_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

▸ ㄴ. (참)

$2^{-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}>\dfrac{1}{3}=\left|\log_2\sqrt[3]{2}\right|$,

$\left(\because\ 2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3,\text{ 이때 } 2<\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right)$

$2^{-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}<\dfrac{1}{2}=\left|\log_2\sqrt{2}\right|$

$(\because\ 2^1<2^{\sqrt{2}})$

이므로 위의 그림처럼

$\therefore\ \sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$

▸ ㄷ. (참)

$x_1=y_1$이므로 ㄱ에서

$\dfrac{1}{2}<y_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\log_2 x_2$이므로 ㄴ에서

$\dfrac{1}{3}<y_2<\dfrac{1}{2}$

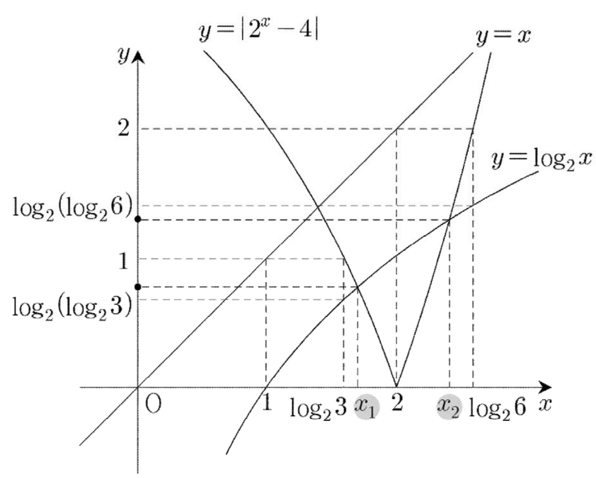
$\therefore\ y_1-y_2<\dfrac{3\sqrt{2}-2}{6}\left(=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A085 | 답 ②

[풀이]



▸ ㄱ. (참)

위의 그림처럼

$x=\log_2 3$일 때, $|2^x-4|>\log_2 x$이고,

$x=2$일 때, $|2^x-4|<\log_2 x$이므로

$\log_2 3<x_1<2$

마찬가지의 방법으로

$2<x_2<\log_2 6$

$\therefore\ \log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서

$x_2 - x_1 < \log_2 6 - \log_2 3 = 1$

한편

$\log_2(\log_2 3) < 4 - 2^{x_1} < 1$, ⋯㉠

$1 < 2^{x_2} - 4 < \log_2(\log_2 6)$ ⋯㉡

위의 두 부등식을 변변히 합하면

$1 + \log_2(\log_2 3) < 2^{x_2} - 2^{x_1} < 1 + \log_2(\log_2 6)$

즉, $2^{x_2} - 2^{x_1} < \log_2(2\log_2 6)$

$(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 1 \times \log_2(2\log_2 6) < 3$

($\because$ $6 < 16$, $\log_2 6 < 4$, $2\log_2 6 < 8$,

$\log_2(2\log_2 6) < 3$)

$\therefore$ $(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 3$

▸ ㄷ. (거짓)

위의 그림에서

㉡$-$㉠:

$2^{x_1} + 2^{x_2} - 8 < \log_2(\log_2 6) - \log_2(\log_2 3)$

즉, $2^{x_1} + 2^{x_2} < 8 + \log_2(\log_3 6)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

A086 | 답 ⑤

[풀이]

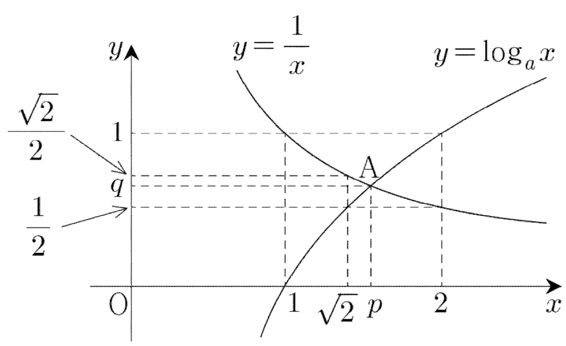
▸ ㄱ. (참)

점 A가 곡선 $y = \dfrac{1}{x}$ 위에 있으므로

$q = \dfrac{1}{p}$ $\therefore$ $pq = 1$

▸ ㄴ. (참)

$a = 2$일 때, 문제에서 주어진 두 곡선을 한 평면에 그리면



위의 그림에서 $p > \sqrt{2}$이다.

▸ ㄷ. (참)

점 A는 곡선 $y = \log_a x$ 위에 있으므로

$q = \log_a p$, $p = a^q$, $p = a^{\frac{1}{p}}$ ($\because$ ㄱ),

$a = p^p < p^2$ ($\because$ $1 < p < 2$)

$S(p) = \dfrac{1}{2}(p+q)q = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}q^2$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p^2} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2a} = \dfrac{a+1}{2a}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A087 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

두 곡선 $y = \log_2(-kx)$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-kx) = \log_2(x+4)$, $-kx = x+4$, $x_1 = -\dfrac{4}{k+1}$

두 곡선 $y = \log_2 kx$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2 kx = \log_2(x+4)$, $kx = x+4$, $x_2 = \dfrac{4}{k-1}$

$x_2 = -2x_1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{k-1} = \dfrac{8}{k+1}$

$\therefore$ $k = 3$

▸ ㄴ. (참)

두 곡선 $y = \log_2(-x+m)$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-x+m) = \log_2(x+4)$, $-x+m = x+4$,

$x_2 = \dfrac{m-4}{2}$

$\dfrac{m-4}{2} = \dfrac{4}{k-1}(= x_2)$에서 $m = \dfrac{4k+4}{k-1}$

두 곡선 $y = \log_2(-kx)$, $y = \log_2(-x+m)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-kx) = \log_2(-x+m)$, $-kx = -x+m$,

$x_3 = \dfrac{m}{1-k} = -\dfrac{4k+4}{(k-1)^2}$

$x_2^2 = \left(\dfrac{4}{k-1}\right)^2$,

$x_1 x_3 = -\dfrac{4}{k+1} \times \dfrac{-(4k+4)}{(k-1)^2} = \left(\dfrac{4}{k-1}\right)^2$

$\therefore$ $x_2^2 = x_1 x_3$

▸ ㄷ. (거짓)

세 수 x_1, x_2, x_3은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

이 등비수열의 공비를 $r(< 0)$이라고 하자.

(직선 AB의 기울기)+(직선 AC의 기울기)

E048

○○○
(2025사관(1차)-확률과통계20/미적분20/기하20)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와
함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=5$에서 미분가능하고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5,\ g(5))$에서의 접선은 곡선 $y=g(x)$와 점 $(0,\ g(0))$에서 접한다.

E049

●●●
(2011(3)고3-가형18)

곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 기울기가 m인 접선을 두 개 그었을 때, 두 접점을 P, Q라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, P, Q는 서로 다른 점이다.) [4점]

ㄱ. 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 2이다.
ㄴ. $m>-1$
ㄷ. 두 접선 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 같아지는 실수 m이 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E. 삼차함수의 그래프

주제:

E050

○○
(2013(10)고3-A형20)

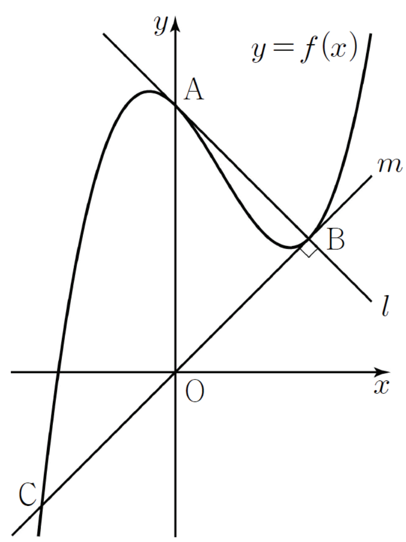
삼차함수 $f(x)=x^3+ax$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1-a)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 다른 한 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 이 곡선과 만나는 다른 한 점을 C라 하자. 두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $f(b)+f(c)=-80$을 만족시킨다. 상수 a의 값은? [4점]

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

E051

●●●
(2016사관(1차)-A형21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.) [4점]



① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 방정식을 연립하면

$x^3+ax=(12+a)x-16$, $x^3-12x+16=0$,

$(x-2)^2(x+4)=0$ 풀면 $x=2$ 또는 $x=-4$

$C(-4,\ -64-4a)$

그러므로

$b=2$, $c=-4$

$\therefore\ f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)$

$=8+2a-64-4a=-2a-56=-80$

$\therefore\ a=12$

답 ③

[풀이2] 시험장

삼차함수의 비율관계를 이용하면 문제를 빠르게 해결할 수 있다.

삼차함수의 비율관계에 의하여

점 B의 x좌표는 $2\times|$점 A의 x좌표$|=2$이고,

점 C의 x좌표는 $-2\times$(점 B의 x좌표)$=-4$이다.

$\therefore\ f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)$

$=8+2a-64-4a=-2a-56=-80$

$\therefore\ a=12$

답 ③

E051 | 답 ②

[풀이1] ★

점 B의 x좌표를 α로 두자.

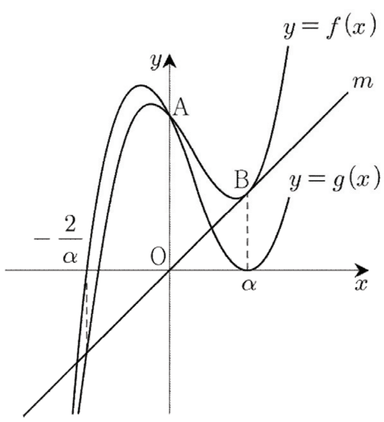
직선 m의 방정식이 $y=x$이므로

직선 l의 방정식은 $y=-x+2\alpha$이다.

그리고 점 A의 좌표는 $(0,\ 2\alpha)$이다.

함수 $g(x)$를 다음과 같이 두자.

$g(x)=f(x)-x$



직선 m이 점 B에서 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\alpha-\alpha=0$,

$g'(\alpha)=f'(\alpha)-1=1-1=0$

즉, $g(\alpha)=g'(\alpha)=0$

인수정리에 의하여

$g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ (단, $\beta<0$)

곡선 $y=f(x)$가 점 A를 지나므로

$f(0)=2\alpha$

$g(0)=f(0)-0$ 즉, $-\alpha^2\beta=2\alpha$

정리하면 $\beta=-\dfrac{2}{\alpha}$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-\alpha)^2\left(x+\dfrac{2}{\alpha}\right)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\alpha)^2\left(x+\dfrac{2}{\alpha}\right)+x$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-\alpha)\left(x+\dfrac{2}{\alpha}\right)+(x-\alpha)^2+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선 l의 기울기가 -1이므로

$f'(0)=-4+\alpha^2+1=-1$

α에 대한 이차방정식을 풀면

$\alpha=\sqrt{2}\,(\because\ \alpha>0)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})+x$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})+(x-\sqrt{2})^2+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $C(-\sqrt{2},\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\therefore\ f'(-\sqrt{2})=9$

답 ②

[풀이2] ※ 아래는 이과생을 위한 풀이입니다. (문과생은 읽지 않아도 좋습니다.)

점 B의 x좌표를 α로 두자.

직선 m의 방정식이 $y=x$이므로

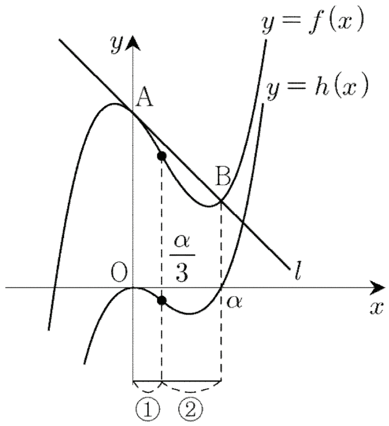
직선 l의 방정식은 $y=-x+2\alpha$이다.

그리고 점 A의 좌표는 $(0,\ 2\alpha)$이다.

두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 다음과 같이 두자.

$g(x)=f(x)-x$,

$h(x)=f(x)-(-x+2\alpha)$



(단, ●는 변곡점이다.)

곡선 $y=f(x)$가 점 A에서 직선 l에 접하므로

곡선 $y=h(x)$는 원점에서 x축에 접한다.

인수정리에 의하여

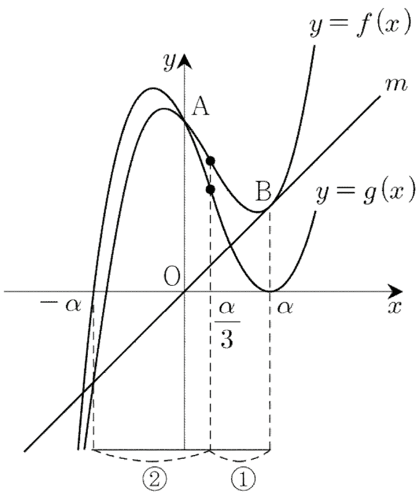
$h(x)=x^2(x-\alpha)$

삼차함수의 그래프의 비율관계에 의하여

(곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표)

$=$(곡선 $y=h(x)$의 변곡점의 x좌표)

$=\dfrac{2\times0+1\times\alpha}{3}=\dfrac{\alpha}{3}$



(단, ●는 변곡점이다.)

곡선 $y=f(x)$가 점 B에서 직선 m에 접하므로

곡선 $y=g(x)$는 점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접한다.

인수정리에 의하여

$g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ (단, $\beta<0$)

삼차함수의 그래프의 비율관계에 의하여

(곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표)

$=$(곡선 $y=g(x)$의 변곡점의 x좌표)

즉, $\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{2\times\alpha+1\times\beta}{3}$

정리하면

$\beta=-\alpha$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-\alpha)^2(x+\alpha)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\alpha)^2(x+\alpha)+x$

곡선 $y=f(x)$가 점 A를 지나므로

$f(0)=\alpha^3=2\alpha$

풀면

$\alpha=\sqrt{2}\,(\because \alpha>0)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})+x$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})+(x-\sqrt{2})^2+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\ 0)$에서의 접선의 기울기는

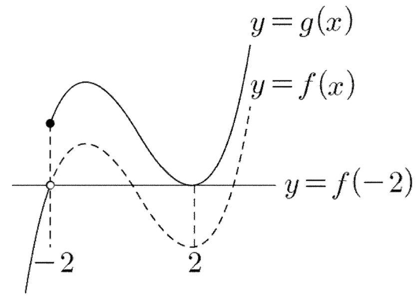
$\therefore\ f'(-\sqrt{2})=9$

답 ②

E052 | 답 ③

[풀이]

아래 그림과 같이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 그려지면 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근은 2뿐이다. 이때, $f'(2)=0$, $g(2)=f(2)+8$(즉, $f(-2)-f(2)=8$)이다.



함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(-2)-f(2)=-16-4b=8,\ b=-6$

$f'(2)=12+4a+b=0,\ a=-\dfrac{3}{2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3x-6=0,\ (x+1)(x-2)=0$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖는다.

답 ③

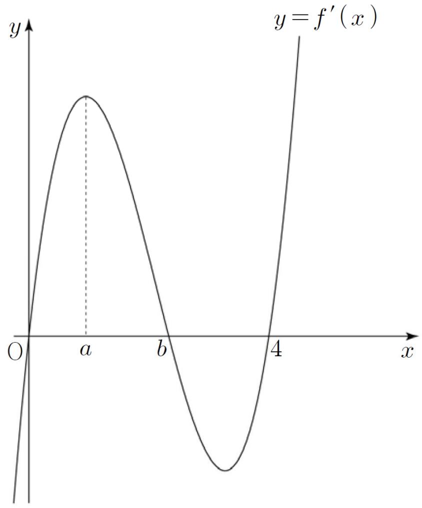
H. 그래프 개형

주제:

H103

○○○
(2015(9)고2-가형21)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=f'(b)=f'(4)=0$이다.) [4점]



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $a<t<b$일 때, $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}>\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}$이다.

ㄷ. $\displaystyle\int_a^4 f'(x)dx=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 그래프 개형

주제:

H104

○○○
(2019(10)고3-가형21)

정수 n에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-n)e^x$에 그은 접선의 개수를 $f(n)$이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=0$일 때, $f(4)=1$이다.

ㄴ. $f(n)=1$인 정수 n의 개수가 1인 정수 a가 존재한다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}f(n)=5$를 만족시키는 정수 a의 값은 -1 또는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

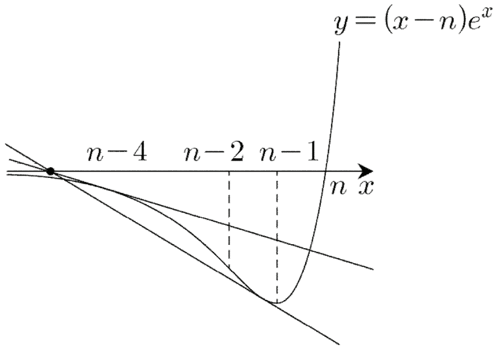
H105

●●●
(2024(10)고3-미적분30)

두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여
함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $60\times(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

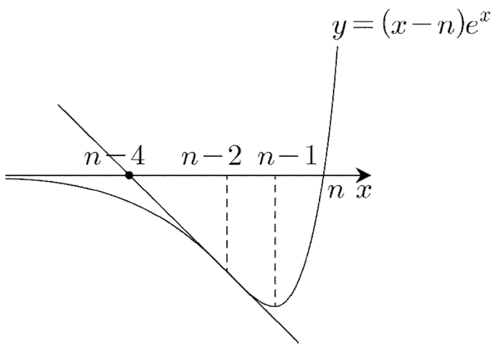
(가) $\{x\,|\,f(x)=f'(t)\times x\}=\{0\}$을 만족시키는 실수 t의 개수가 1이다.

(나) $f(2)=2e^{-2}$



위의 그림처럼 접선의 개수는 2이다.

- $a=n-4$

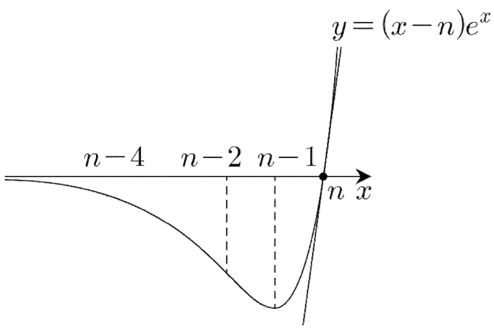


위의 그림처럼 접선의 개수는 1이다.

- $n-4<a<n$

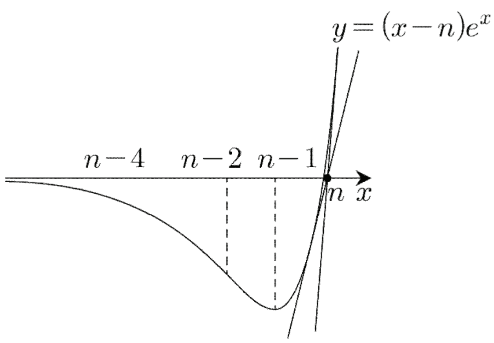
접선을 그을 수 없다.

- $a=n$



위의 그림처럼 접선의 개수는 1이다.

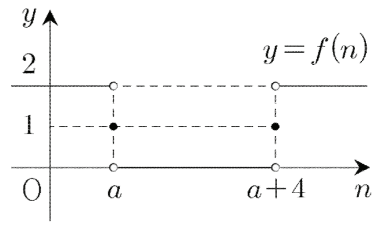
- $a>n$



위의 그림처럼 접선의 개수는 2이다.

이상에서 함수 $f(n)$의 방정식은

$$f(n)=\begin{cases} 2 & (n>a+4) \\ 1 & (n=a+4) \\ 0 & (a<n<a+4) \\ 1 & (n=a) \\ 2 & (n<a) \end{cases}$$



▸ ㄱ. (참)

$a=0$, $n=4$이면 $f(4)=1$

▸ ㄴ. (거짓)

$f(n)=1$인 정수 n은 $a+4$, a이므로 항상 2개다.

▸ ㄷ. (참)

$f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다.

$\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=2$,

$f(5)=2$인 경우는 $3=a+4$, $a=-1$

$f(1)=2$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=0$,

$f(5)=0$인 경우는 $3=a$, $a=3$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

H105 ㅣ답 40

[풀이]

(나): $f(2)=(4a+2b)e^{-2}=2e^{-2}$, $b=1-2a$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-\{ax^2-(4a-1)x+2a-1\}e^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow ax^2-(4a-1)x+2a-1=0$

(판별식)$=(4a-1)^2-4a(2a-1)$

$=(2a-1)^2+(2a)^2>0$

이때, 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

$f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지나고,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{e^x}=0$이므로 x축은 점근선이다.

그리고 함수 $f(x)$의 x절편은 0, $-\frac{b}{a}$이다.

상수 b의 부호에 따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 구분할 수 있다.

한편 직선 $y=f'(t)x$을 l로 두자.

이때, 직선 l은 기울기가 $f'(t)$이고, 원점을 지난다.

그리고 $f'(t)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기이기도 하다.

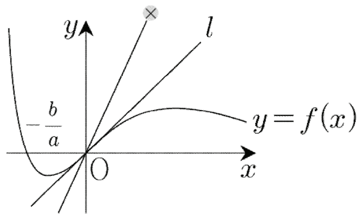
조건 (가)에서 해집합의 원소가 0 뿐이므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 l은 오직 원점에서만 만난다.

(1) $b>0$

• 변곡점이 원점인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그림처럼 직선 l이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선이면 조건 (가)를 만족시킨다.

이유는 다음의 두 가지를 만족시키기 때문이다.

첫째, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 교점의 개수는 1이고, 이 유일한 교점의 x좌표는 0이다.

둘째, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(p,\ f(p))$에서의 접선의 기울기 $f'(p)$에 대하여

'$p\neq 0 \Leftrightarrow f'(p)\neq f'(0)$' 이다.

그리고 (위의 그림에서) 직선 l의 기울기는 $f'(0)$ 보다 클 수 없다. 왜냐하면 직선 l의 기울기는 $f'(t)$인데, 이를 만족시키는 t는 존재하지 않기 때문이다. (변곡점에서의 기울기가 가장 크다.)

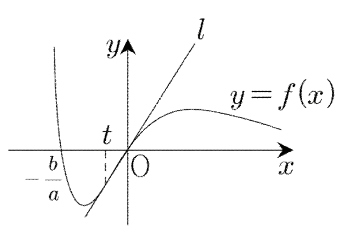
함수 $f(x)$의 이계도함수는

$$f''(x)=\{ax^2-(6a-1)x+6a-2\}e^{-x}$$

$$f''(0)=6a-2=0,\ a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}$$

• 변곡점이 원점이 아닌 경우

아래 그림처럼 직선 l이 곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접하는 경우를 생각해보자. (단, $-\frac{b}{a}<t<0$)

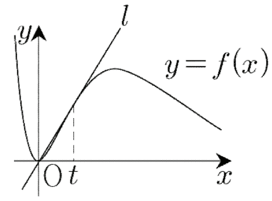


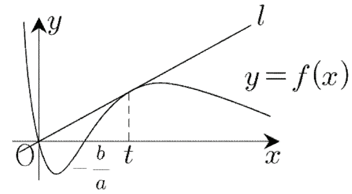
곡선 $y=f(x)$와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표는 t, 0이다.

따라서 조건 (가)는 성립하지 않는다.

(2) $b=0$ 또는 $b<0$

아래 그림처럼 직선 l이 곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접하는 경우를 생각해보자. (단, $t>0$)





곡선 $y=f(x)$와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표는 t, 0이다.

따라서 조건 (가)는 성립하지 않는다.

이상에서

$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}$

$\therefore\ 60\times(a+b)=40$

답 40

H106 | 답 ①

[풀이] ★

함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 교점의 x좌표가 b이므로

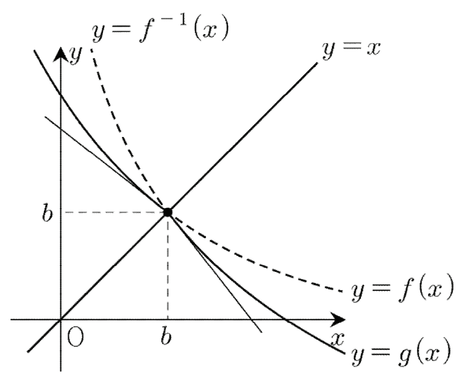
$f(b)=b$ …㉠

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(b)=b$

따라서 세 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$, $g(x)$의 그래프는 점 $(b,\ b)$에서 만난다.

세 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위의 그림처럼

$f'(b)\neq(f^{-1})'(b)$

이면 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 미분가능하려면

$f'(b)=(f^{-1})'(b)$ …㉡

이어야 한다.

역함수의 미분법에 의하여