T.O.P 모의고사 A, B형 정답과 해설 보강

A형 해설 보강

1회

19번(난이도 ★★★★☆)

$2a_n \times S_n = a_n^2 + 1$에서 $n=1$을 넣으면 $\Rightarrow 2{a_1}^2 = {a_1}^2 + 1 \Rightarrow a_1 = 1$

$S_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$에서, $a_n = S_n - S_{n-1}$이므로

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2}\left(S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}\right)$에서 식을 이항하면,

$\Rightarrow \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{2}S_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_n - S_{n-1}}\right)$

$\Rightarrow S_n + S_{n-1} = \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$

$\Rightarrow S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1 \ (n \geq 2)$, $S_1^2 = a_1^2 = 1$이므로

수열 $\left\{S_n^2\right\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열이다.

$\therefore\ {S_n}^2 = n$ (가) $\Rightarrow S_n = \sqrt{n}\ \ (n \geq 1)$이고,

$a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ 이다.

(여기서 $S_{n-1} = \sqrt{n-1}$ 인데, $n=1$일 때 0이므로 괜찮습니다.)

2회

없음

3회

30번(난이도 ★★★★★)

y축을 기준으로 양쪽을 보고 최댓값을 판단하는 문제입니다.

문제의 그림에서 첫 번째 힌트는 $y=g(t)$가 원점에 있다는 것인데, 이것을 보고 $y=f(x)$는 원점을 지난다는 것을 알 수 있습니다. 만약, $y=f(x)$가 원점을 지나지 않는 경우 문제의 그래프가 그렇게 그려질 수 없습니다.

여기서, 삼차함수 $y=f(x)$에 극대, 극소가 존재하지 않는다면, 구간 $[1,\ 2]$에서 $y=2$가 없으므로 $y=f(x)$는 극대, 극소를 가집니다.

그러면 해설지의 그려진 두 함수가 그려지는 것을 이해할 수 있을 것이고, 이제 해설지를 따라가면 정답에 도달할 수 있을거라 생각됩니다.

4회

21번(난이도 ★★★★☆)

$g(x)$를 해석했다는 가정하에 해설을 진행하면, 두 실수 a, b는 서로 다른 양의 실수라는 조건이 있지요. 따라서, $f(x)$는 $x=0$, a, b를 근으로 갖는 삼차함수이기 때문에 $y=g(x)$는 하나의 극댓값과 두 개의 극솟값을 가집니다.

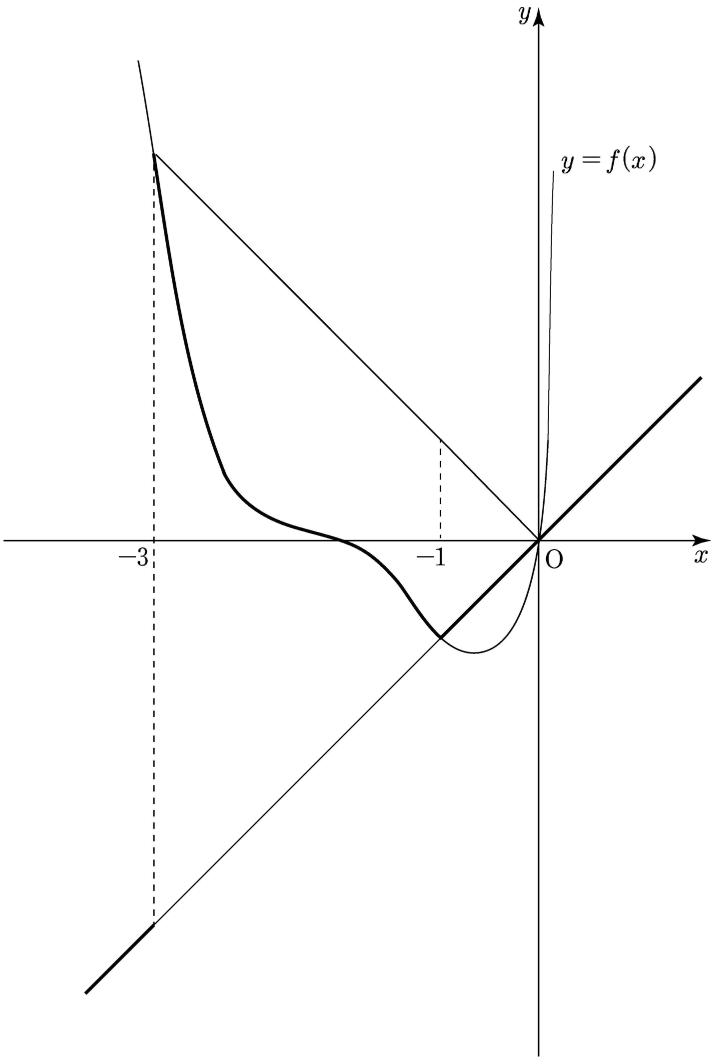
특히 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가진다는 것을 알 수 있는데, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로 g(0)=0입니다. 함수 g(x)는 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 극솟값이 해설지의 그림처럼 되어야 합니다. 즉, 극댓값을 기준으로 좌우 대칭인 사차함수가 됩니다.

B형 해설 보강

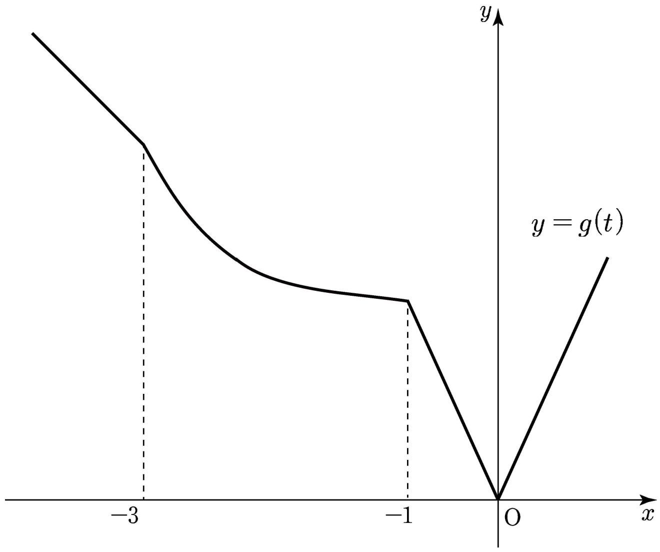
1회

21번(난이도 ★★★★☆)

다음은 문제의 상황에 대한 그림이다.



함수 $g(t)$는 $\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}$과 $\sqrt{2t^2}$ 중에서 크지 않은 값이다. 함수 $g(t)$를 직접 그리기 힘드므로, 추론을 하여 풀어보아야 한다. 문제에서 점 $(t,\ t)$를 다루므로 함수 $y=x$도 그려 주었다. 위의 그림을 통하여 함수 $g(t)$를 그리면 다음과 같다.



$\therefore$ "$(a,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않은 점이 2개" 인 조건을 만족하는 a의 최솟값은 -3이다. ($\because$ 원점과 점 사이의 거리를 다루므로, 함수 $y=-x$도 생각해주어야 한다.)

2회

20번(난이도 ★★★★☆)

y축을 기준으로 양쪽을 보고 최댓값을 판단하는 문제입니다.

문제의 그림에서 첫 번째 힌트는 $y=g(t)$가 원점에 있다는 것인데, 이것을 보고 $y=f(x)$는 원점을 지난다는 것을 알 수 있습니다. 만약, $y=f(x)$가 원점을 지나지 않는 경우 문제의 그래프가 그렇게 그려질 수 없습니다.

여기서, 삼차함수 $y=f(x)$에 극대, 극소가 존재하지 않는다면, 구간 $[1,\ 2]$에서 $y=2$가 없으므로 $y=f(x)$는 극대, 극소를 가집니다.

그러면 해설지의 그려진 두 함수가 그려지는 것을 이해할 수 있을 것이고, 이제 해설지를 따라가면 정답에 도달할 수 있을거라 생각됩니다.

3회

30번(난이도 ★★★★★★)

우선, 평면 $ax+by+cz+d=0$을 매개변수를 이용해서 나타내봅시다. $x=t,\ y=s$라 하면, $z=-\dfrac{a}{c}t-\dfrac{b}{c}s-\dfrac{d}{c}$이므로, $\left(t,\ s,\ -\dfrac{a}{c}t-\dfrac{b}{c}s-\dfrac{d}{c}\right)$는 평면을 "매개변수화" 한 것입니다.

해설지의 풀이에서 $\mathrm{X}\,(t+4s+3,\ 3t-3s,\ 8t+2s+3)$이므로 매개변수화 된 평면이라는 것을 짐작할 수 있고,

$$\begin{cases} x=t+4s+3 \\ y=3t-3s \\ z=8t+2s+3 \end{cases}$$

에서 $ax=at+4as+3a$, $by=3bt-3bs$, $cz=8ct+2cs+3c$라 하면

$ax+by+cz=(a+3b+8c)t+(4a-3b+2c)s+3a+3c=d$

$\Rightarrow\ a=-2c,\ b=-2c,\ d=-3c \Rightarrow\ -2cx-2cy+cz=-3c\ \Rightarrow\ \alpha : 2x+2y-z=3$

여기서부터, 해설지의 풀이 그대로 따라가면 됩니다.

4회

17번(난이도 ★★★★☆)

19번(난이도 ★★★★☆)

$2a_n \times S_n = a_n^2+1$에서 $n=1$을 넣으면 $\Rightarrow\ 2{a_1}^2={a_1}^2+1\ \Rightarrow\ a_1=1$

$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$에서, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$\Rightarrow\ S_n=\frac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)$에서 식을 이항하면,

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}S_n+\frac{1}{2}S_{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)$

$\Rightarrow\ S_n+S_{n-1}=\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$

$\Rightarrow\ S_n^2-S_{n-1}^2=1\ \ (n\geq 2)$, $S_1^2=a_1^2=1$이므로

수열 $\left\{S_n^2\right\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열이다.

$\therefore\ {S_n}^2=n$ (가) $\Rightarrow\ S_n=\sqrt{n}\ \ (n\geq 1)$이고,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 이다.

(여기서 $S_{n-1}=\sqrt{n-1}$ 인데, $n=1$일 때 0이므로 괜찮습니다.)