

## A. 거듭제곱근

### A001

(2006(11)고2-가형5/나형5)

거듭제곱근의 성질 중 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고르면? (단,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) [3점]

$$\text{ㄱ. } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[4]{a}$$

$$\text{ㄴ. } (\sqrt[3]{a})^4 = \sqrt[12]{a}$$

$$\text{ㄷ. } \sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a^5}$$

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

### A002

(2009(6)고2-가형8)

집합  $X = \{-2, -1, 1, 2\}$ 에 대하여 두 집합  $A, B$ 를

$$A = \{\sqrt{x} \mid x \in X, \sqrt{x} \text{는 실수}\}$$

$$B = \{\sqrt[3]{x} \mid x \in X, \sqrt[3]{x} \text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합  $A \cup B$ 의 모든 원소의 곱은? [3점]

- ①  $2^{\frac{1}{2}}$                       ②  $2^{\frac{2}{3}}$                       ③  $2^{\frac{5}{6}}$   
 ④ 2                         ⑤  $2^{\frac{7}{6}}$

### A003

(2024경찰대(1차)-공통5)

두 실수  $a, b$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $a^3 - 2b$ 의 값은? [4점]

(가)  $b$ 는  $-\sqrt{8a}$ 의 제곱근이다.

(나)  $\sqrt[3]{a^2}b$ 는  $-16$ 의 세제곱근이다.

- ①  $-2 - 2\sqrt{2}$           ②  $-2$                       ③  $4 - 2\sqrt{2}$   
 ④ 2                        ⑤  $2 + 2\sqrt{2}$

### A004

(2023(7)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여  $x$ 에 대한 방정식

$$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$$

의 모든 실근의 곱이  $-4$ 일 때,  $n$ 의 값은? [4점]

- ① 2                        ② 3                        ③ 4  
 ④ 5                        ⑤ 6

## A 지수함수와 로그함수

1	③	2	⑤	3	③	4	②	5	⑤
6	4	7	③	8	①	9	③	10	③
11	①	12	⑤	13	④	14	④	15	④
16	①	17	⑤	18	②	19	⑤	20	②
21	17	22	①	23	⑤	24	③	25	②
26	62	27	②	28	②	29	①	30	10
31	④	32	3	33	①	34	②	35	②
36	②	37	②	38	②	39	②	40	⑤
41	①	42	18	43	②	44	①	45	④
46	32	47	15	48	15	49	56	50	⑤
51	64	52	①	53	81	54	16	55	⑤
56	④	57	③	58	②	59	16	60	①
61	①	62	②	63	①	64	③	65	③
66	22	67	④	68	12	69	③	70	④
71	④	72	⑤	73	45	74	46	75	27
76	③	77	18	78	①	79	③	80	③
81	②	82	①	83	⑤	84	②	85	③
86	②	87	③	88	④	89	①	90	35
91	③	92	⑤	93	32	94	①	95	128
96	3	97	③	98	31	99	④	100	②
101	③	102	③	103	25	104	④	105	②
106	③	107	53	108	②	109	⑤	110	④
111	259	112	④	113	144	114	③	115	④
116	③	117	②	118	⑤	119	⑤	120	④
121	②	122	③	123	①	124	④	125	13
126	②	127	③	128	③	129	⑤	130	①
131	6	132	4	133	11	134	②	135	②
136	①	137	②	138	④	139	①	140	③
141	16	142	②	143	④	144	10	145	④
146	5	147	②	148	5	149	16	150	③
151	①	152	④	153	65	154	3	155	128
156	10	157	13	158	17	159	52	160	⑤
161	10	162	①	163	②	164	25	165	19
166	10	167	12	168	17	169	27	170	7
171	16	172	③	173	16	174	②	175	②
176	①	177	②	178	①	179	③	180	②
181	①	182	10	183	④				

## A001 | 답 ③

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

거듭제곱근의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}} = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

▶ ㄴ. (거짓)

$$(\sqrt[3]{a})^4 = \sqrt[3]{a^4} \neq \sqrt[12]{a}$$

예를 들어  $a = 8$ 일 때,

$$(\sqrt[3]{a})^4 = 16 \neq \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{a}$$

( $\therefore$  유리수가 무리수일 수 없다. 이 역도 성립한다.)

▶ ㄷ. (참)

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[6]{a^5}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

## A002 | 답 ⑤

[풀이] ★

-2의 제곱근 중에서 실수는 없다.

-1의 제곱근 중에서 실수는 없다.

1의 제곱근 중에서 양의 실수는 1이다.

2의 제곱근 중에서 양의 실수는  $\sqrt{2}$ 이다.

집합 A는

$$A = \{1, \sqrt{2}\}$$

-2의 세제곱근 중에서 실수는  $-\sqrt[3]{2}$ 이다.

-1의 세제곱근 중에서 실수는 -1이다.

1의 세제곱근 중에서 실수는 1이다.

2의 세제곱근 중에서 실수는  $\sqrt[3]{2}$ 이다.

집합 B는

$$B = \{-\sqrt[3]{2}, -1, 1, \sqrt[3]{2}\}$$

집합  $A \cup B$ 는

$$A \cup B$$

$$= \{-\sqrt[3]{2}, -1, 1, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\}$$

이므로 구하는 값은

$$2^{2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{6}}$$

답 ⑤

### A003 | 답 ③

[풀이]

(가):  $b^2 = -\sqrt{8a}$ , 즉  $b^4 = 8a^2$

(나):  $(\sqrt[3]{a^2b})^3 = -16$ , 즉  $a^2b^3 = -16$

위의 두 등식을 연립하면

$$\frac{b^4}{8}b^3 = -16, b^7 = -2^7, b = -2, a = -\sqrt{2}$$

$$\therefore a^3 - 2b = -2\sqrt{2} + 4$$

답 ③

### A004 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 풀면

$$x^n = 8, x^{2n} = 8$$

$n$ 이 홀수:  $x = 8^{\frac{1}{n}}, x = \pm 8^{\frac{1}{2n}}$  (○)

모든 실근의 곱은 음수(-)이다.

$n$ 이 짝수:  $x = \pm 8^{\frac{1}{n}}, x = \pm 8^{\frac{1}{2n}}$  (×)

모든 실근의 곱은 양수(+)이다.

모든 실근의 곱은  $-4$ 이므로

$$8^{\frac{1}{n}} \times 8^{\frac{1}{2n}} \times (-8^{\frac{1}{2n}})$$

$$= -8^{\frac{2}{n}} = -4, \frac{6}{n} = 2, \therefore n = 3$$

답 ②

### A005 | 답 ⑤

[풀이]

집합  $X$ 의 원소는  $b$ 의  $a$ 제곱근 중에서 실수인 것이다.

$a = 3$ 일 때,  $x$ 의 값은

$$\sqrt[3]{-9} (= -\sqrt[3]{9}), \sqrt[3]{-3} (= -\sqrt[3]{3}), \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}$$

$a = 4$ 일 때,  $x$ 의 값은

$$\pm \sqrt[4]{3}, \pm \sqrt[4]{9}$$

▶ 가. (참)

$\sqrt[3]{-9}$ 는 집합  $X$ 의 원소이다.

▶ 나. (참)

집합  $X$ 의 원소의 개수는 8이다.

▶ 다. (참)

집합  $X$ 의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은

$$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{9}$$

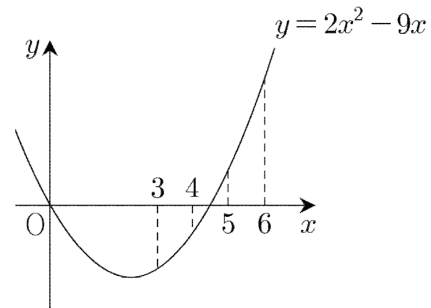
$$= 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4}} = 3^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{3^7}$$

이상에서 옳은 것은 가, 나, 다이다.

답 ⑤

### A006 | 답 4

[풀이]



$x = 3, 4, 5, 6$ 일 때,

함수  $y = 2x^2 - 9x$ 의 부호가 각각 음(-), 음(-), 양(+), 양(+)

이므로  $f(3) = 1$ , (음수의 3제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(4) = 0$ , (음수의 4제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.)

$f(5) = 1$ , (양수의 5제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(6) = 2$  (양수의 6제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.)

$$\therefore f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$$

$$= 1 + 0 + 1 + 2 = 4$$

답 4

### A007 | 답 ③

[풀이]

2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여

$$(2n-5)(2n-9) \neq 0$$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

$$\bullet (2n-5)(2n-9) > 0 \Leftrightarrow n < \frac{5}{2} \text{ 또는 } n > \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 2, 5, 6, \dots$$

이므로

$$f(2) = 2, f(6) = f(8) = 2, f(5) = f(7) = 1$$

$$\bullet (2n-5)(2n-9) < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < n < \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 3, 4$$

이므로

$$f(3) = 1, f(4) = 0$$

$$\therefore \sum_{n=2}^8 f(n) = 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 + 2 = 9$$

## B061

(2019(3)고3-가형26) ○○

$0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 두 곡선  $y = \sin x$ 와  $y = \sin(nx)$ 의 교점의 개수를  $a_n$ 이라 하자.  $a_3 + a_5$ 의 값을 구하시오. [4점]

## B062

(2020(3)고3-나형7) ○○

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 두 곡선  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 와  $y = \sin 4x$ 가 만나는 점의 개수는? [3점]

- ① 2                      ② 4                      ③ 6  
 ④ 8                      ⑤ 10

## B. 삼각함수와 방정식: 실근의 합

### 주제: 대칭성

## B063

◇(2017(9)-가형7) ○○

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$$

의 모든 해의 합은? [3점]

- ①  $\frac{\pi}{2}$                       ②  $\pi$                       ③  $\frac{3\pi}{2}$   
 ④  $2\pi$                       ⑤  $\frac{5\pi}{2}$

## B064

◇(2018-가형7) ○○

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

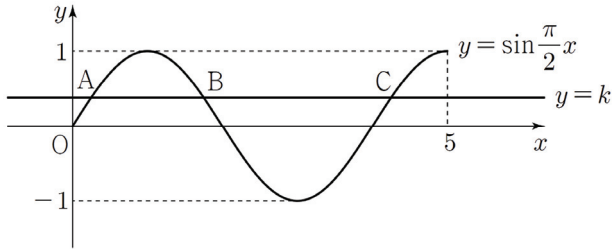
$$\cos^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

- ①  $2\pi$                       ②  $\frac{5}{2}\pi$                       ③  $3\pi$   
 ④  $\frac{7}{2}\pi$                       ⑤  $4\pi$

**B065** (2022(7)고3-확률과통계10/미적분10/기하10) ○○

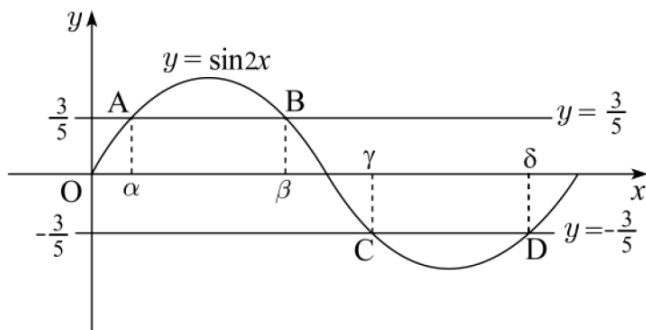
곡선  $y = \sin \frac{\pi}{2}x$  ( $0 \leq x \leq 5$ )가 직선  $y = k$  ( $0 < k < 1$ )과 만나는 서로 다른 세 점을  $y$ 축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의  $x$ 좌표의 합이  $\frac{25}{4}$ 일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]



- ①  $\frac{5}{4}$                       ②  $\frac{11}{8}$                       ③  $\frac{3}{2}$   
 ④  $\frac{13}{8}$                       ⑤  $\frac{7}{4}$

**B066** (2009(3)고2-공통13) ○○

그림과 같이 함수  $y = \sin 2x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ )의 그래프가 직선  $y = \frac{3}{5}$ 과 두 점 A, B에서 만나고, 직선  $y = -\frac{3}{5}$ 과 두 점 C, D에서 만난다. 네 점 A, B, C, D의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때,  $\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{9}{4}\pi$                       ②  $\frac{5}{2}\pi$                       ③  $3\pi$   
 ④  $\frac{7}{2}\pi$                       ⑤  $4\pi$

**B067** (2020(6)고2-공통17) ○○

상수  $k$  ( $0 < k < 1$ )에 대하여  $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식  $\sin x = k$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )라 하자.

$\sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{5}{7}$ 일 때,  $k$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{2\sqrt{6}}{7}$                       ②  $\frac{\sqrt{26}}{7}$                       ③  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$   
 ④  $\frac{\sqrt{30}}{7}$                       ⑤  $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

**B068** (2021사관(1차)-니형10) ○○

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식  $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

- ①  $4\pi$                       ②  $6\pi$                       ③  $8\pi$   
 ④  $10\pi$                       ⑤  $12\pi$

**B069** (2022(4)고3-확률과통계11/미적분11/기하11) ○○

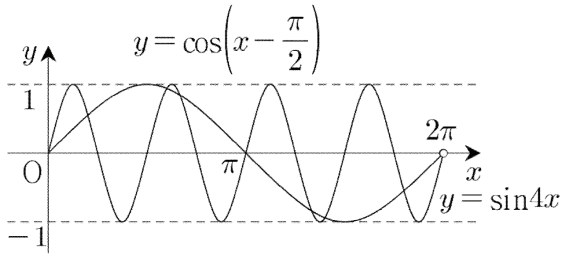
자연수  $k$ 에 대하여  $0 \leq x < 2\pi$ 일 때,  $x$ 에 대한 방정식

$\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 서로 다른 실근의 개수가 8이다.

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때,  $x$ 에 대한 방정식  $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 모든

해의 합은? [4점]

- ①  $5\pi$                       ②  $6\pi$                       ③  $7\pi$   
 ④  $8\pi$                       ⑤  $9\pi$



따라서 문제에서 주어진 두 곡선의 교점의 개수는 8이다.

답 ④

### B063 | 답 ④

[풀이]

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로 주어진 방정식은

$$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 3$$

정리하면

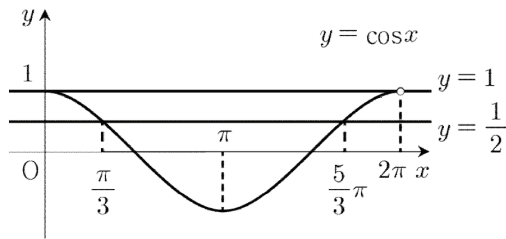
$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

좌변을 인수분해하면

$$(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

풀면

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$



$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ 이면 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

$$\cos x = 1 \text{ 이면 } x = 0$$

따라서 구하는 값은

$$0 + \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$$

답 ④

### B064 | 답 ④

[풀이]

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

이므로, 주어진 방정식은

$$1 - \sin^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

정리하면

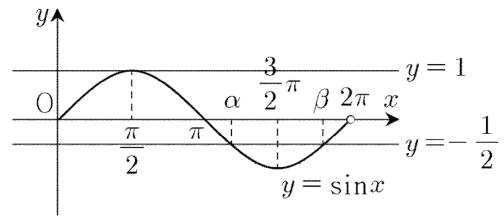
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

좌변을 인수분해하면

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

풀면

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$$



함수  $y = \sin x$ 의 그래프는 직선  $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

로 방정식  $\sin x = -\frac{1}{2}$ 의 두 실근을 각각  $\alpha, \beta$ 라고 하면

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{ 즉, } \alpha + \beta = 3\pi$$

방정식  $\sin x = 1$ 을 풀면  $x = \frac{\pi}{2}$

따라서 구하는 값은

$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\pi$$

답 ④

[참고]

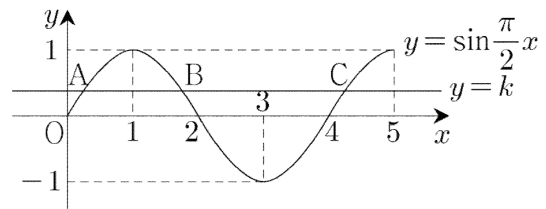
$\alpha, \beta$ 의 값은 각각  $\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ 이다.

### B065 | 답 ③

[풀이]

곡선  $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 4이고, 이 곡선은 직선  $x = 1,$

$x = 3, \dots$ 에 대칭이고, 점  $(2, 0), (4, 0), \dots$ 에 대칭이다.



점 A의  $x$ 좌표를  $a$ 라고 하면

점 B의  $x$ 좌표는  $2 - a$ , ( $\because x = 1$ 에 대칭)

점 C의  $x$ 좌표는  $4 + a$ 이다. ( $\because$  주기가 4)

$$a + 2 - a + 4 + a = a + 6 = \frac{25}{4}, a = \frac{1}{4}$$

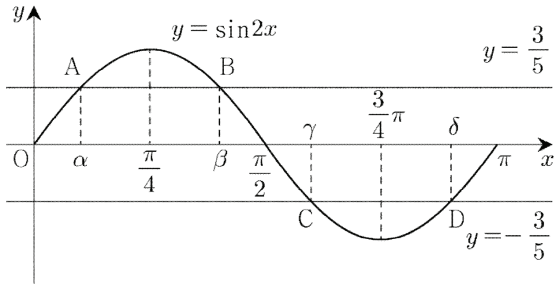
$$\therefore \overline{AB} = (2 - a) - a = 2 - 2a = \frac{3}{2}$$

답 ③

### B066 | 답 ③

[풀이]

주기가  $\pi$ 인 함수  $y = \sin 2x$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수  $y = \sin 2x$ 의 그래프는 직선  $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{즉, } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

함수  $y = \sin 2x$ 의 그래프는 직선  $x = \frac{3}{4}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{3}{4}\pi \quad \text{즉, } \gamma + \delta = \frac{3}{2}\pi$$

함수  $y = \sin 2x$ 의 그래프는 점  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로

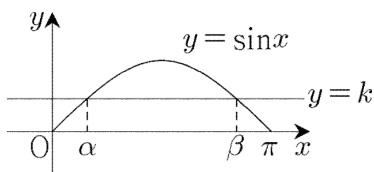
$$\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{즉, } \beta + \gamma = \pi$$

$$\therefore \alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi + \pi = 3\pi$$

답 ③

### B067 | 답 ①

[풀이]



곡선  $y = \sin x$ 는 직선  $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha = \sqrt{1 - k^2} = \frac{5}{7}$$

( $\because \sin \alpha = k$ )

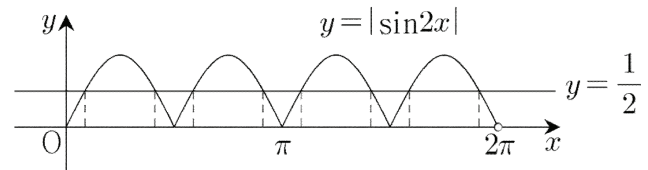
$$\therefore k = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

답 ①

### B068 | 답 ③

[풀이]

함수  $y = |\sin 2x|$ 의 그래프는



위의 그림에서 곡선과 직선의 교점의  $x$ 좌표를 가장 작은 것부터 크기 순서대로  $a_1, a_2, \dots, a_8$ 이라고 하면

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_8}{8} = \pi$$

$$\text{즉, } a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 8\pi$$

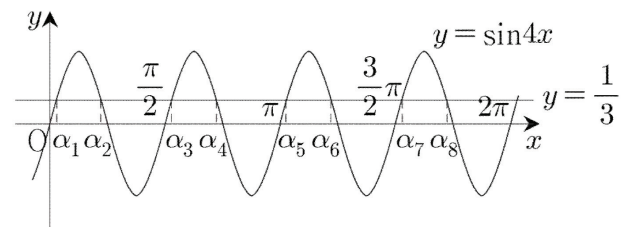
따라서 문제에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은  $8\pi$ 이다.

답 ③

### B069 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 조건을 만족시키도록 곡선과 직선을 그리면 다음과 같다.



함수  $y = \sin kx$ 의 주기가  $\frac{2\pi}{k}$ 이므로

$$\frac{2\pi}{k} \times 4 = 2\pi \quad \text{에서 } k = 4$$

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_8}{8} = \frac{\frac{3}{4}\pi + \pi}{2}$$

$$\therefore \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_8 = 7\pi$$

답 ③

### C076

(2024(5)고3-확률과통계9/미적분9/기하9) ○○

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.

모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = 1 - 4 \times S_n$$

이고  $a_4 = 4$ 일 때,  $a_1 \times a_6$ 의 값은? [4점]

- ① 5                      ② 10                      ③ 15
- ④ 20                     ⑤ 25

### C077

(2013(6)고2-B형20) ○○○

자연수로 이루어진 수열  $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,  $a_1$ 의 최댓값은? [4점]

(가)  $a_{10} \leq 5120$

(나)  $n$ 이 2 이상의 자연수일 때,  $a_n = 8 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ 이다.

- ① 9                      ② 10                      ③ 11
- ④ 12                     ⑤ 13

## C. 등차수열과 등비수열

### 주제: 지수함수와 로그함수

### C078

(2011사관(1차)-문과8) ○○

함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 지수함수  $y = a^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동시킨 것이다. 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $(n, a_n)$ 은 함수  $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점일 때, 두 상수  $a, b$ 의 합  $a+b$ 의 값은? [3점]

- ①  $-\log_3 2$             ②  $1 - \log_3 2$             ③  $2 - \log_3 2$
- ④  $3 - \log_3 2$             ⑤  $4 - \log_3 2$

### C079

(2019(11)고2-가형27) ○○

$\frac{1}{4}$ 과 16 사이에  $n$ 개의 수를 넣어 만든 공비가 양수  $r$ 인 등비수열

$$\frac{1}{4}, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 16$$

의 모든 항의 곱이 1024일 때,  $r^9$ 의 값을 구하시오. [4점]



# C080

(2021사관(1차)-가형26)

두 실수  $a, b$ 와 수열  $\{c_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $(m+2)$ 개의 수  
 $a, \log_2 c_1, \log_2 c_2, \log_2 c_3, \dots, \log_2 c_m, b$   
 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.  
 (나) 수열  $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제  $m$ 항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

$a+b=1$ 일 때, 자연수  $m$ 의 값을 구하시오. [4점]

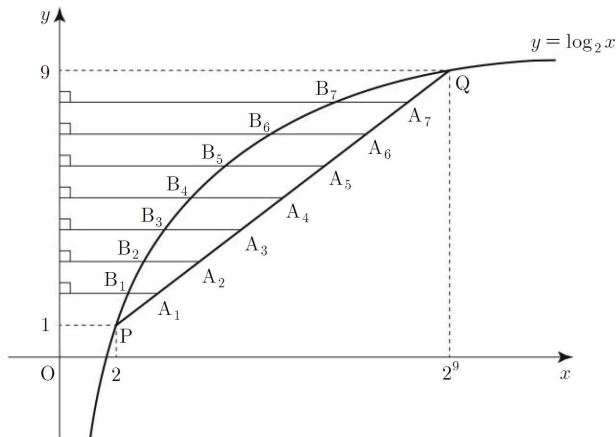
# C081

(2011(11)고2-가형21)

그림과 같이 곡선  $y = \log_2 x$  위의

두 점  $P(2, 1), Q(2^9, 9)$ 에 대하여 선분 PQ를 8등분하여 점 P에 가까운 점부터 차례로  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_7$ 이라 하고, 점  $A_n$ 에서  $y$ 축에 내린 수선과 곡선  $y = \log_2 x$ 의 교점을  $B_n$ 이라 하자. 선분  $A_n B_n$ 의 길이를  $l_n$ 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^7 l_n$ 의 값은? [4점]



- ① 1291                      ② 1391                      ③ 1491  
 ④ 1591                      ⑤ 1691

# C. 시그마(1)

## C082

◇ (2025(6)-확률과통계3/미적분3/기하3)

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^5 (a_k + 1) = 9$ 이고  $a_6 = 4$ 일 때,

$\sum_{k=1}^6 a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 6                              ② 7                              ③ 8  
 ④ 9                              ⑤ 10

## C083

◇ (2024-확률과통계18/미적분18/기하18)

두 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1), \quad \sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33$$

일 때,  $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

## C084

◇ (2021-나형10)

두 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 8, \quad \sum_{k=1}^5 b_k = 9$$

일 때,  $\sum_{k=1}^5 (2a_k - b_k + 4)$ 의 값은? [3점]

- ① 19                              ② 21                              ③ 23  
 ④ 25                              ⑤ 27

$$a_n = 8 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$a_{n-1} = 8 + \sum_{k=1}^{n-2} a_k \quad (\text{단, } n \geq 3)$$

위의 두 등식을 변변히 빼면

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1}, \text{ 즉 } a_n = 2a_{n-1} (n \geq 3)$$

수열  $\{a_n\}$ 을 쓰면

$$a_1, a_1 + 8, 2(a_1 + 8), 2^2(a_1 + 8), \dots$$

조건 (가)에 의하여

$$a_{10} = 2^8(a_1 + 8) \leq 5120$$

$$a_1 \leq 12$$

따라서  $a_1$ 의 최댓값은 12이다.

**답** ④

### C078 | 답 ⑤

[풀이]

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = a^{x-b}$$

일반항  $a_n$ 은

$$a_n = 2 \times 3^{n-1} (n \geq 1)$$

점  $(n, a_n)$ 이 곡선  $y = f(x)$  위에 있으므로

$$f(n) = a_n \text{ 즉, } a^{n-b} = 2 \times 3^{n-1}$$

우변을 정리하면

$$a^{n-b} = 3^{n-1+\log_3 2}$$

$n$ 에 대한 항등식이 되기 위해서는

$$a = 3, b = 1 - \log_3 2$$

$$\therefore a + b = 4 - \log_3 2$$

**답** ⑤

### C079 | 답 64

[풀이]

등비수열의 정의에 의하여

$$16 = \frac{1}{4} \times r^{n+1}, \text{ 즉 } r^{n+1} = 2^6 \quad \dots \textcircled{1}$$

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$\frac{1}{4} \times a_1 \times \dots \times a_n \times 16$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} r^{1+2+3+\dots+(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} r^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = 2^{10} \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$2^{-2(n+2)} 2^{6 \times \frac{n+2}{2}} = 2^{10}, 2^{n+2} = 2^{10}, n = 8$$

이를 ①에 대입하면

$$\therefore r^9 = 2^6 = 64$$

**답** 64

### C080 | 답 10

[풀이]

조건 (나)에서

$$c_1 \times c_2 \times \dots \times c_m = 32$$

조건 (가)에서 주어진  $(m+2)$ 개의 수를 모두 합하면

$$a + b + \log_2(c_1 \times c_2 \times \dots \times c_m)$$

$$= 1 + \log_2 32 = 1 + 5 = 6$$

그런데 등차수열의 합의 공식에서

$$\frac{a+b}{2} \times (m+2) = 6, \text{ 즉 } m = 10$$

**답** 10

### C081 | 답 ①

[풀이]

점  $A_n$ 의  $x$ 좌표를  $a_n$ 이라고 하면

수열  $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로

$$a_1 + a_2 + \dots + a_7$$

$$= \frac{a_1 + a_7}{2} \times 7 = \frac{2 + 2^9}{2} \times 7 = 1799$$

점  $B_n$ 의  $x$ 좌표를  $b_n$ 이라고 하면

아홉 개의 수

$$2, b_1, b_2, \dots, b_7, 2^9$$

는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, 공비는 2이다.

등비수열의 합의 공식에 의하여

$$b_1 + b_2 + \dots + b_7 = \frac{4(2^7 - 1)}{2 - 1} = 508$$

$$\therefore \sum_{n=1}^7 l_n = \sum_{n=1}^7 a_n - \sum_{n=1}^7 b_n$$

$$= 1799 - 508 = 1291$$

**답** ①

### D023

(2012(4)고3-나형13) ○○

이차함수  $f(x)$ 와 다항함수  $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{2f(x) - 3g(x)\} = 2$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8f(x) - 3g(x)}{3g(x)}$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{3}{2}$                       ② 2                      ③  $\frac{5}{2}$   
 ④ 3                              ⑤  $\frac{7}{2}$

### D024

(2008사관(1차)-이과26) ○○

$x \neq 2$ 인 모든 실수  $x$ 에서 정의된 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 다른 두 조건을 만족한다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 2} \{2f(x) + g(x)\} = 1$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \infty$$

이때,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x) - 40g(x)}{2f(x) - g(x)}$ 의 값을 구하시오. [3점]

### D. 함수의 극한 계산

주제: 차수, 계수 결정

### D025

◇(2018(9)-나형12) ○○

다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$f(2)$ 의 값은? [3점]

- ① 11                      ② 14                      ③ 17  
 ④ 20                      ⑤ 23

### D026

◇(2016(9)-A형28) ○○

다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -7$$

**D027** (2023(4)고3-확률과통계18/미적분18/기하18) ○○

다항함수  $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x) - 2x^3 + 1}{x^2} = 5, f(0) = 1$$

을 만족시킬 때,  $f(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

**D028** (2023(11)고2-공통28) ○○

상수항과 계수가 모두 음이 아닌 정수인 두 다항함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(2) + g(2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 g(x)}{x^5} = 4$

(나)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5} = 2$

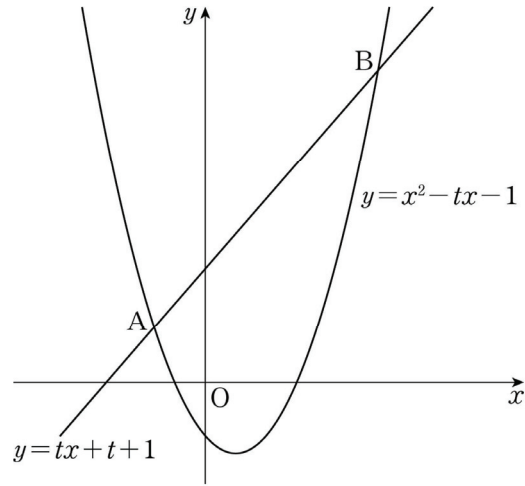
**D. 함수의 극한 계산: 활용**

**D029** (2023(10)고3-확률과통계10/미적분10/기하10) ○○

실수  $t(t > 0)$ 에 대하여 직선  $y = tx + t + 1$ 과

곡선  $y = x^2 - tx - 1$ 이 만나는 두 점을 A, B라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AB}}{t^2}$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ② 1
- ③  $\sqrt{2}$
- ④ 2
- ⑤  $2\sqrt{2}$

## D024 | 답 21

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \left\{ 2 \frac{f(x)}{g(x)} + 1 \right\} = 1 \quad (\leftarrow \text{조건(가)})$$

$x \rightarrow 2$ 일 때,  $g(x) \rightarrow \infty$  ( $\leftarrow$  조건(나))이므로

$$2 \frac{f(x)}{g(x)} + 1 \rightarrow 0 \quad \text{즉,} \quad 2 \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow -1 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} & (\because \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ 2 \frac{f(x)}{g(x)} + 1 \right\} \\ & = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) + g(x)}{g(x)} = \frac{1}{\infty} = 0) \end{aligned}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4f(x) - 40g(x)}{2f(x) - g(x)} \\ & = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \frac{f(x)}{g(x)} - 40}{2 \frac{f(x)}{g(x)} - 1} \\ & = \frac{4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 40}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = 21 \end{aligned}$$

**답** 21

## D025 | 답 ②

[풀이1]

함수  $f(x)$ 를 3차함수로 가정하자.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

조건 (가)에서

$$\frac{f(x)}{x^2} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} \text{이므로}$$

$$a > 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \infty \text{이고,}$$

$$a < 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = -\infty \text{이다.}$$

이는 가정에 모순이므로  $f(x)$ 는 3차함수가 아니다.

함수  $f(x)$ 를 4차이상의 함수로 가정했을 때에도

동일한 모순이 발생한다.

따라서  $f(x)$ 는 1차 또는 2차함수이다.

함수  $f(x)$ 가 1차함수라고 가정하자.

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right) = 0 \neq 2$$

이는 가정에 모순이므로  $f(x)$ 는 2차함수이다.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) = a = 2$$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = 2x^2 + bx + c$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x + b + \frac{c}{x} \right) = 3$$

그런데  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + b) = b$ 이므로

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x + b + \frac{c}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} (2x + b) \\ & = 3 - b \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때,

$$c > 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{c}{x} = -\infty,$$

$$c < 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{c}{x} = \infty$$

이므로  $c = 0$ 이다.

이를  $\textcircled{1}$ 에 대입하면  $b = 3$ 이다.

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = 2x^2 + 3x$$

$$\therefore f(2) = 14$$

**답** ②

[참고1]

함수  $f(x)$ 가 2차함수임을 엄밀하게 증명하면 다음과 같다.

함수  $f(x)$ 의 방정식을

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

으로 두자. (단,  $a_n \neq 0$ )

$n \geq 3$ 이라고 가정하자.

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{x^2} \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( a_n x^{n-2} + \frac{a_{n-1}}{x^{3-n}} + \dots + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n-1}}{x^{3-n}} + \dots + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2} \right)$ 은 수렴하고,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^{n-2} = \infty \quad (a_n > 0 \text{인 경우}),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^{n-2} = -\infty \quad (a_n < 0 \text{인 경우})$$

이므로,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$ 은 발산한다.

이는 가정에 모순이므로  $n=1$  또는  $n=2$ 이다.

$n=1$ 이라고 가정하자.

함수  $f(x)$ 의 방정식을

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

으로 두면, 조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right) = 0 \neq 2$$

이는 가정에 모순이므로  $n=2$ 이다.

따라서 함수  $f(x)$ 는 2차함수이다.

[참고2]

다음과 같은 빠른 풀이도 가능하다.

조건 (가)에서  $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

조건 (나)에서 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$$

에서  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 3$ 임을 알 수 있다.

함수  $f(x)$ 의 방정식을

$$f(x) = 2x^2 + ax + b$$

함수  $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 4x + a$$

$$f(0) = b = 0, \quad f'(0) = a = 3$$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = 2x^2 + 3x$$

$$\therefore f(2) = 14$$

[풀이2] **시험장**

$$(가) \Rightarrow f(x) = 2x^2 + \dots$$

$$(나) \Rightarrow f(x) = \dots + 3x$$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = 2x^2 + 3x$$

$$\therefore f(2) = 14$$

**답** ②

## D026 | 답 13

[풀이1]

$f(x)$ 가 다항함수이므로  $f(x) - x^3$ 은 다항함수이다.

$$f(x) - x^3 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(단,  $n$ 은 자연수이고  $a_n \neq 0$ 이다.)

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{3} x^{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} x^{n-2} + \dots + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{3x} \right)$$

$$= 2$$

만약  $n \geq 2$ 이고  $a_n > 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3} x^{n-1} = \infty$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3} x^{n-1} \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$$

$$= \infty$$

이는 가정에 모순이다.

만약  $n \geq 2$ 이고  $a_n < 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3} x^{n-1} = -\infty$$

이므로 마찬가지로 방법으로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = -\infty$$

이는 가정에 모순이다.

따라서  $n=1$ 이므로 다항함수  $f(x) - x^3$ 은 일차식이다.

$$f(x) - x^3 = ax + b \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{3} + \frac{b}{3x} \right) = \frac{a}{3} = 2$$

풀면

$$a = 6$$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^3 + 6x + b$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 6x + b) = b = -7$$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = x^3 + 6x - 7$$

∴  $f(2) = 13$

**답** 13

[풀이2] **시험장**

(가)  $\Rightarrow f(x) - x^3 = 6x + a$

(나)  $\Rightarrow f(0) = a = -7$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$f(x) = x^3 + 6x - 7$

∴  $f(2) = 13$

**답** 13

**D027** | 답 8

[풀이]

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x) - 2x^3 + 1}{x^2} = 5$ 에서

$xf(x) - 2x^3 + 1 = 5x^2 + ax + b$

즉,  $xf(x) = 2x^3 + 5x^2 + ax + b - 1$

$x = 0$ 을 대입하면  $0 = b - 1$ , 즉  $b = 1$

$xf(x) = 2x^3 + 5x^2 + ax$

양변을  $x(x \neq 0)$ 로 나누면

$f(x) = 2x^2 + 5x + a$

함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 즉  $a = 1$

∴  $f(1) = 8$

**답** 8

**D028** | 답 16

[풀이]

(가):  $\{f(x)\}^2 g(x) = 4x^5 + \dots$

다음의 두 경우로 나누어 생각하자.

$f(x), g(x)$ 는 각각 2차, 1차 ... (경우1)

$f(x), g(x)$ 는 각각 1차, 3차 ... (경우2)

(경우1) (×)

$f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = px + q$

(단,  $a \neq 0, p \neq 0$ )

$f(x)\{g(x)\}^2 = ap^2x^4 + \dots$

이므로 (나)에서 주어진 극한은 발산한다.

(경우2) (○)

$f(x) = ax + b, g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$

(단,  $a \neq 0, p \neq 0$ )

$\{f(x)\}^2 g(x) = a^2 px^5 + \dots$

에서  $a^2 p = 4$  ... ㉠

(나):  $f(x)\{g(x)\}^2 = ap^2x^7 + \dots + bs^2$ 의

$x^4, x^3, x^2, x$ 의 계수와 상수항( $bs^2$ )은 모두 0이어야 한다.

즉,  $b = r = s = 0$

두 함수  $f(x), g(x)$ 의 방정식은

$f(x) = ax, g(x) = px^3 + qx^2$

(나):  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax(px^3 + qx^2)^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} a(px + q)^2$

$= aq^2 = 2$  ... ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a = 2, q = 1, p = 1,$

$f(x) = 2x, g(x) = x^3 + x^2$

∴  $f(2) + g(2) = 4 + 12 = 16$

**답** 16

**D029** | 답 ④

[풀이]

두 점 A, B의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha, \beta$ 라고 하자.

주어진 곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$x^2 - tx - 1 = tx + t + 1, x^2 - 2tx - t - 2 = 0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2t, \alpha\beta = -t - 2$

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4t^2 + 4t + 8$

그런데 직선 AB의 기울기는  $t$ 이므로

$\overline{AB} = t(\beta - \alpha) = t\sqrt{4t^2 + 4t + 8}$

∴  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AB}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{4}{t} + \frac{8}{t^2}} = 2$

**답** ④

**D030** | 답 ⑤

[풀이]

$g(x) = \sqrt{x+2}$ 이므로

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$P(t, t^2 - 2), Q(t, \sqrt{t+2})$

$\overline{PQ} = t^2 - 2 - \sqrt{t+2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

∴  $\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{h(t)}{t-2}$

## E. 삼차함수의 그래프: 인수정리

### E068

○○  
(2018사관(1차)-나형20)

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(6)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

(가)  $f(2) = f'(2) = 0$   
(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq -3$ 이다.

- ① 128                      ② 144                      ③ 160  
④ 176                      ⑤ 192

## E. 삼차함수의 그래프

### 주제: 비율 관계(1)

### E069

○  
◇(2011-가형18)

함수  $f(x) = (x-1)^2(x-4) + a$ 의 극솟값이 10일 때, 상수  $a$ 의 값을 구하시오. [3점]

### E070

○○○  
(2019(10)고3-나형21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식  $f(x) = 0$ 의 실근은  $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 뿐이다.  
(나) 함수  $f(x)$ 의 극솟값은  $-4$ 이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ.  $f'(\alpha) = 0$   
ㄴ.  $\beta = \alpha + 3$   
ㄷ.  $f(0) = 16$ 이면  $\alpha^2 + \beta^2 = 18$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$f'(x) \leq 0$ 이므로 삼차함수  $f(x)$ 는 감소함수이다.  
 그리고 이차함수  $f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 삼차  
 함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이다.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

이므로 함수  $f(x)$ 는  $x$ 축과 오직 하나의 점에서만 만난다.  
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

### E068 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에서 주어진 조건에 의하여

$$f(x) = (x-2)^2(x-\alpha) \quad (\leftarrow \text{인수정리})$$

함수  $f(x)$ 의 도함수는

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-2)(x-\alpha) + (x-2)^2 \\ &= 3x^2 - 2(\alpha+4)x + 4(\alpha+1) \end{aligned}$$

조건 (나)에 의하여

$$3x^2 - 2(\alpha+4)x + 4\alpha + 7 \geq 0$$

위의 부등식의 좌변을  $g(x)$ 로 두고,

이차방정식  $g(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하자.

$$\begin{aligned} D/4 &= (\alpha+4)^2 - 3(4\alpha+7) \\ &= \alpha^2 - 4\alpha - 5 \leq 0 \quad \text{즉, } (\alpha-5)(\alpha+1) \leq 0 \end{aligned}$$

풀면  $-1 \leq \alpha \leq 5$

$$f(6) = 16(6-\alpha) \text{ 이므로}$$

$$16 \leq f(6) \leq 112$$

따라서 구하는 값은 128이다.

답 ①

### E069 | 답 14

[풀이1]

함수  $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } 3$$

$x = 1$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바  
 꺾이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = 1$ 에서 극댓값을 갖는다.

$x = 3$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바  
 꺾이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = 3$ 에서 극솟값을 갖는다.

주어진 조건에서

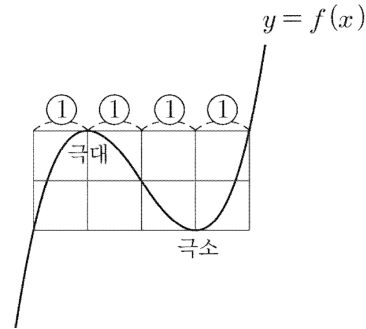
$$f(3) = -4 + a = 10$$

$$\therefore a = 14$$

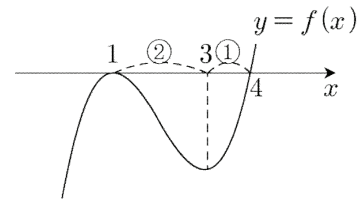
답 14

[풀이2] **시험장**

삼차함수의 비율관계를 이용하면  $a$ 의 값을 빠르게 구할 수 있  
 다.



위의 비율관계가 성립하므로



함수  $f(x)$ 는  $x = 3$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$f(3) = a - 4 = 10$$

$$\therefore a = 14$$

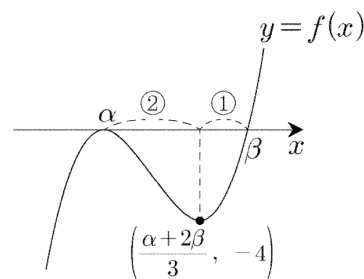
답 14

### E070 | 답 ②

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

두 조건 (가), (나)에 의하여 함수  $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같  
 다.



위의 그림에서

$$f'(\alpha) = 0$$

▶ ㄴ. (참)

$$f(\alpha) = f(\beta) = f'(\alpha) = 0$$

이므로 인수정리에 의하여

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$$

$$f'(x) = 3(x-\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ 또는 } x = \frac{\alpha + 2\beta}{3}$$

$$f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) = -4\left(\frac{\beta - \alpha}{3}\right)^3 = -4$$

$$\beta - \alpha = 3, \therefore \beta = \alpha + 3 \quad \dots \textcircled{㉑}$$

▶ ㉒. (거짓)

$$f(0) = -\alpha^2\beta = 16 \quad \dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒을 연립하면

$$-\alpha^2(\alpha + 3) = 16, \alpha^3 + 3\alpha^2 + 16 = 0,$$

$$(\alpha + 4)(\alpha^2 - \alpha + 4) = 0, \alpha = -4, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 17$$

이상에서 옳은 것은 ㉑, ㉒이다.

**답** ②

## E071 | 답 21

[풀이1]

주어진 함수의 도함수를 구하면

$$y' = 3x^2 + 2$$

점 P에서의 접선의 방정식은

$$y = 5x + 9$$

주어진 곡선의 방정식과 접선의 방정식을 연립하면

$$x^3 + 2x + 7 = 5x + 9$$

정리하면

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

인수분해하면

$$(x - 2)(x + 1)^2 = 0 \text{ 풀면 } x = 2 \text{ 또는 } x = -1$$

주어진 곡선과 접선의 점 P가 아닌 교점의 좌표는 (2, 19)이다.

$$\therefore a + b = 21$$

**답** 21

[풀이2] **시험장**

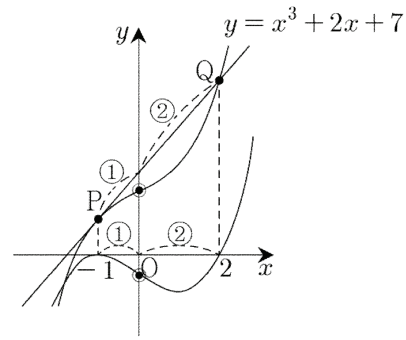
점 (a, b)를 Q라고 하자.

삼차함수의 비율관계를 이용하면 문제를 빠르게 해결할 수 있다.

$$y' = 3x^2 + 2 \geq 2$$

(단, 등호는  $x = 0$ 일 때 성립한다.)

따라서 곡선  $y = x^3 + 2x + 7$ 은 점 (0, 7)에 대하여 대칭이다.



(단, ●는 접선의 기울기가 가장 작은 점이다. 즉, '변곡점'이다.)

위의 그림에서 점 Q의 x좌표가 2임을 알 수 있다.

점 Q의 좌표는 (2, 19)이므로

$$a = 2, b = 19$$

$$\therefore a + b = 21$$

**답** 21

## E072 | 답 ①

[풀이1]

두 점 (2, 4), (-1, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = x + 2 (\leftarrow \text{접선})$$

$$g(x) = x + 2 \text{로 두자.}$$

문제에서 주어진 조건에서

$$f(2) = g(2), f'(2) = g'(2), f(-1) = g(-1)$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{로 두면}$$

$$h(2) = h(-1) = 0, h'(2) = 0$$

인수정리에 의하여

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x - 2)^2(x + 1)$$

$$\text{즉, } f(x) - (x + 2) = (x - 2)^2(x + 1)$$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = (x - 2)^2(x + 1) + x + 2$$

함수  $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = 2(x - 2)(x + 1) + (x - 2)^2 + 1$$

$$\therefore f'(3) = 10$$

**답** ①

[풀이2] **시험장**

$$g(x) = f(x) - (x + 2) \text{로 두자.}$$

F. 정적분으로 주어진 함수

F022

◇(2018(9)-나형8) ○○

함수  $f(x) = \int_1^x (t-2)(t-3)dt$ 에 대하여  $f'(4)$ 의 값은? [3점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3
- ④ 4                      ⑤ 5

F023

◇(2016(9)-A형25) ○

함수  $f(x)$ 가

$$f(x) = \int_0^x (2at + 1)dt$$

이고  $f'(2) = 17$ 일 때, 상수  $a$ 의 값을 구하시오. [3점]

F024

(2023(4)고3-확률과통계9/미적분9/기하9) ○○

함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ 이고

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 1$ 일 때,  $f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 3                      ② 4                      ③ 5
- ④ 6                      ⑤ 7

F. 정적분으로 주어진 함수: 방정식 결정(1)

F025

◇(2007-가형19) ○

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2ax^2 + ax$$

를 만족시킬 때,  $f(3)$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $a$ 는 상수이다.) [3점]

F026

◇(2025-확률과통계7/미적분7/기하7) ○

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = 3x^3 + 2x$$

를 만족시킬 때,  $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 7                      ② 9                      ③ 11
- ④ 13                    ⑤ 15

## F027

◇ (2014(9)-A형28) ○○

다항함수  $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t) dt = x^3 - 2x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt$$

일 때,  $f(0) = a$ 라 하자.  $60a$ 의 값을 구하시오. [4점]

## F028

(2020사관(1차)-나형27) ○○

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\int_1^x (2x-1)f(t) dt = x^3 + ax + b$$

일 때,  $40 \times f(1)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 상수이다.) [4점]

## F029

(2015사관(1차)-A형10) ○○

다항함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$x^2 \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t^2 f(t) dt = x^4 + ax^3 + bx^2$$

을 만족시킬 때,  $f(5)$ 의 값은? (단,  $a$ 와  $b$ 는 상수이다.) [3점]

- ① 17                      ② 19                      ③ 21  
 ④ 23                      ⑤ 25

## F030

(2024경찰대(1차)-공통4) ○○

두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $\int x f'(x) dx = x^3 + 3x^2 + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)  
 (나)  $g(x) = \int_{-1}^x t f(t) dt$

$g'(2) = 0$ 일 때,  $f(-2)$ 의 값은? [3점]

- ① -30                      ② -24                      ③ -18  
 ④ -12                      ⑤ -6

$$= \int_{-1}^1 (-2x^2) dx = 2 \int_0^1 (-2x^2) dx = 2 \left[ -\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = -\frac{4}{3}$$

답 ④

### F020 | 답 ①

[풀이]

$$\int_0^1 f(t) dt = a \text{로 두면}$$

$$f(x) = 4x^3 + ax \text{ (단, } a \text{는 상수)}$$

$$a = \int_0^1 f(t) dt = \left[ t^4 + \frac{a}{2} t^2 \right]_0^1 = 1 + \frac{a}{2}$$

풀면  $a = 2$ 이므로

$$\therefore f(1) = 6$$

답 ①

### F021 | 답 ③

[풀이]

$$(가) : f(x) = 2x + 2a \text{ (이때, } a = \int_0^1 g(t) dt)$$

$$g(x) = \int f(x) dx = x^2 + 2ax + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$(나) : C - \left[ \frac{1}{3} x^3 + ax^2 + Cx \right]_0^1 = \frac{2}{3}, \text{ 즉}$$

$$-\frac{1}{3} - a = \frac{2}{3}, a = -1$$

$$a = \int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{3} + a + C, C = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore g(1) = -\frac{4}{3}$$

답 ③

### F022 | 답 ②

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$$f'(x) = (x-2)(x-3)$$

$$\therefore f'(4) = 2 \times 1 = 2$$

답 ②

### F023 | 답 4

[풀이]

정적분과 미분의 관계에 의하여

$$f'(x) = 2ax + 1$$

주어진 조건에서

$$f'(2) = 4a + 1 = 17$$

풀면

$$\therefore a = 4$$

답 4

### F024 | 답 ①

[풀이]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - \int_0^0 f(t) dt}{x - 0}$$

$$= f(0) \left( \because \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x) \right)$$

$$= 1$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$$

(단,  $C$ 는 적분상수)

이때,  $C = 1$

$$\therefore f(2) = 8 - 8 + 2 + 1 = 3$$

답 ①

### F025 | 답 16

[풀이]

주어진 등식에  $x = 1$ 을 대입하면

$$0 = 1 - a \text{ 풀면 } a = 1$$

이를 주어진 등식에 대입하면

$$\int_1^x f(t) dt = x^3 - 2x^2 + x$$

적분과 미분의 관계에서

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\therefore f(3) = 16$$

답 16

## F026 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 등식의 양변을 미분하면

$$f(x) = 9x^2 + 2$$

$$\therefore f(1) = 11$$

답 ③

## F027 | 답 40

[풀이1]

문제에서 주어진 항등식에  $x = 1$ 을 대입하면

$$\int_0^1 f(d)dt = -1 - 2 \int_0^1 f(t)dt$$

정리하면

$$\int_0^1 f(d)dt = -\frac{1}{3}$$

이를 문제에서 주어진 항등식에 대입하면

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$$

$$\therefore 60a = 60f(0) = 40$$

답 40

[풀이2]

$$\int_0^1 f(t)dt = c \text{로 두자.} \quad \dots (*)$$

주어진 등식은

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2cx$$

적분과 미분의 관계에서

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 2c$$

이를 (\*)에 대입하면

$$\int_0^1 (3t^2 - 4t - 2c)dt = c$$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$[t^3 - 2t^2 - 2ct]_0^1 = c$$

$$-1 - 2c = c \text{ 풀면 } c = -\frac{1}{3}$$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$$

$$\therefore 60a = 60f(0) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$$

답 40

## F028 | 답 50

[풀이]

$$(2x-1) \int_1^x f(t)dt = x^3 + ax + b \quad \dots (*)$$

위의 항등식에  $x = 1$ ,  $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면 각각

$$1 + a + b = 0, \quad \frac{1}{8} + \frac{a}{2} + b = 0$$

연립방정식을 풀면

$$a = -\frac{7}{4}, \quad b = \frac{3}{4}$$

(\*)의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2 \int_1^x f(t)dt + (2x-1)f(x) = 3x^2 - \frac{7}{4}$$

위의 항등식에  $x = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = \frac{5}{4}$$

$$\therefore 40f(1) = 50$$

답 50

## F029 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 항등식에  $x = 1$ 을 대입하여 정리하면

$$0 = 1 + a + b \quad \dots \textcircled{A}$$

문제에서 주어진 등식의 양변을 각각  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2x \int_1^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$$

정리하면

$$\int_1^x f(t)dt = 2x^2 + \frac{3}{2}ax + b$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$0 = 2 + \frac{3}{2}a + b \quad \dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하면

$$a = -2, \quad b = 1$$

$$\int_1^x f(t)dt = 2x^2 - 3x + 1$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$$f(x) = 4x - 3$$

∴  $f(5) = 17$

답 ①

### F030 | 답 ②

[풀이]

(가):  $xf'(x) = 3x^2 + 6x$ 에서  $f'(x) = 3x + 6$

(∵ 다항함수  $f'(x)$ 는  $x = 0$ 에서 연속이다.)

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6x + C_1$  (단,  $C_1$ 은 적분상수)

(나):  $g'(x) = xf(x)$ ,  $g(-1) = 0$

$g'(2) = 2f(2) = 36 + 2C_1 = 0$ ,  $C_1 = -18$

∴  $f(-2) = 6 - 12 - 18 = -24$

답 ②

### F031 | 답 ⑤

[풀이]

$g'(x) = f(x)$ 이므로  $g'(2) = f(2) = 0$ 이고,

$x = 2$ 의 좌우에서  $g'(x)(=f(x))$ 의 부호는 음(-)에서 양(+)  
으로 바뀐다.

$f(2) = 6 + a = 0$ ,  $a = -6$

함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x < 0) \\ 3(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$  또는  $x = 2$

$x = -2$ 의 좌우에서  $f(x)(=g'(x))$ 의 부호가 양(+)  
에서 음(-)으로 바뀌므로 함수  $g(x)$ 는  $x = -2$ 에서 극댓값을  
 갖는다.

따라서 구하는 값은

$$g(-2) = \int_{-4}^{-2} f(x)dx$$

$$= \left[ x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x \right]_{-4}^{-2} = 26$$

답 ⑤

### F032 | 답 ①

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$S'(x) = f(x)$

방정식  $f(x) = 0(S'(x) = 0)$ 을 풀면

$x = 0$  또는  $x = 3$

$x = 0$ 의 좌우에서  $f(x)(S'(x))$ 의 부호가 양(+)  
에서 음(-)

으로 바뀌므로 함수  $S(x)$ 는  $x = 0$ 에서 극댓값을 갖는다.

$x = 3$ 의 좌우에서  $f(x)(S'(x))$ 의 부호가 음(-)  
에서 양(+)

으로 바뀌므로 함수  $S(x)$ 는  $x = 3$ 에서 극솟값을 갖는다.

함수  $f(x)$ 의 그래프에서

$S'(x) = f(x) = ax(x-3)(a > 0)$

부정적분을 하면

$$S(x) = \int f(x)dx = \frac{a}{3}x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + C$$

(단,  $C$ 는 적분상수이다.)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$M - m = S(0) - S(3) = \frac{9a}{2} = 6$ 에서  $a = \frac{4}{3}$

함수  $S(x)$ 의 방정식은

$$S(x) = \frac{4}{9}x^3 - 2x^2 + C$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{S(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{S(x) - S(1)}{x-1}$$

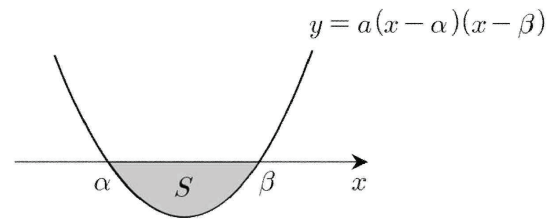
(∵  $S(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0$ )

$$= S'(1) = -\frac{8}{3}$$

답 ①

[참고] (교육과정 외)

이차함수의 정적분에 대한 아래의 공식을 이용해도 좋다.



$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} a(x - \alpha)(x - \beta)dx \right| = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

(단,  $\beta > \alpha$ )

위의 공식을 이용하여 상수  $a$ 의 값을 구하자.

$$M - m = S(0) - S(3) = - \int_0^3 f(x)dx$$

$$= \frac{a}{6}(3 - 0)^3 = 6$$
에서  $a = \frac{4}{3}$

### F033 | 답 ①

[풀이]

$f'(x) = 3x^2 + bx - 5$

$f'(-1) = 0$ , 즉  $-b - 2 = 0$ ,  $b = -2$

### G036

◇ (2006(6)-나형26) ○○

자연수  $n$ 에 대하여 다항식  $f(x) = 2^n x^2 + 3^n x + 1$ 을  $x-1$ ,  $x-2$ 로 나눈 나머지를 각각  $a_n$ ,  $b_n$ 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 0                      ②  $\frac{1}{4}$                       ③  $\frac{1}{3}$   
 ④  $\frac{1}{2}$                       ⑤ 1

### G037

(2024사관(1차)-미적분23) ○○

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.

$S_n = 4^{n+1} - 3n$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4^{n-1}}$ 의 값은? [2점]

- ① 4                      ② 6                      ③ 8  
 ④ 10                      ⑤ 12

### G038

(2021(3)고3-미적분25) ○○

모든 항이 양수인 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$a_{n+1} = a_1 a_n$ 을 만족시킨다.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_{n+3} - 5}{2a_n + 1} = 12$ 일 때,

$a_1$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1                      ③  $\frac{3}{2}$   
 ④ 2                      ⑤  $\frac{5}{2}$

## G. 수열의 극한

### 주제: 치환

### G039

(2015(3)고3-A형17) ○○

두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \frac{1}{n+1} (n \geq 1)$$

$$(나) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n = 2$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ 의 값은? [4점]

- ① -3                      ② -2                      ③ -1  
 ④ 0                      ⑤ 1

### G040

(2023(3)고3-미적분26) ○○

두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 1)a_n = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (4n^2 + 1)(a_n + b_n) = 1$$

일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 1)(a_n + 2b_n)$ 의 값은? [3점]

- ① -3                      ②  $-\frac{7}{2}$                       ③ -4  
 ④  $-\frac{9}{2}$                       ⑤ -5



### G037 | 답 ⑤

[풀이]

$n \geq 2$  일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4^{n+1} - 3n - 4^n + 3(n-1) \\ &= 3 \times 4^n + 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^n + 3}{\frac{1}{4} \times 4^n} = 12$$

답 ⑤

### G038 | 답 ④

[풀이]

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_1$  이므로 수열  $\{a_n\}$  은 공비가  $a_1$  인 등비수열이다.

일반항  $a_n$  은  $a_n = (a_1)^n$  (단,  $a_1 > 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_{n+3} - 5}{2a_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(a_1)^{n+3} - 5}{2(a_1)^n + 1} \quad \dots (*)$$

$0 < a_1 < 1$  인 경우

$$(*) = -5 \neq 12$$

$a_1 = 1$  인 경우

$$(*) = -\frac{2}{3} \neq 12$$

$a_1 > 1$  인 경우

$$(*) = \frac{3}{2}(a_1)^3 = 12 \text{ 에서}$$

$$\therefore a_1 = 2$$

답 ④

### G039 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에서 주어진 등식의 좌변을  $S_n$  이라고 하자.

$$S_n = \frac{1}{n+1}, \quad S_{n-1} = \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$$

두 등식을 변변히 빼면

$$a_n + b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

이므로

$$n^2(a_n + b_n) = -\frac{n}{n+1}$$

수열의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -n^2 b_n - \frac{n}{n+1} \right) \\ &= -2 - 1 = -3 \end{aligned}$$

답 ①

### G040 | 답 ⑤

[풀이]

$c_n = (n^2 + 1)a_n$  으로 두면

$$a_n = \frac{c_n}{n^2 + 1} \text{ 이고, } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3$$

$d_n = (4n^2 + 1)(a_n + b_n)$  으로 두면

$$a_n + b_n = \frac{d_n}{4n^2 + 1} \text{ 이고, } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$$

$$\text{이때, } b_n = \frac{d_n}{4n^2 + 1} - \frac{c_n}{n^2 + 1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 1)(a_n + 2b_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 1) \left( \frac{2d_n}{4n^2 + 1} - \frac{c_n}{n^2 + 1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2(2n^2 + 1)d_n}{4n^2 + 1} - \frac{(2n^2 + 1)c_n}{n^2 + 1} \right\}$$

$$= 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5$$

답 ⑤

### G041 | 답 ④

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^n (2 + a_k) = \sum_{k=1}^n 2 + \sum_{k=1}^n a_k = 2n + S_n$$

시그마의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{k=1}^n (2k + a_k) = \sum_{k=1}^n 2k + \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + S_n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2 + a_k)}{\sum_{k=1}^n (2k + a_k)}$$

H. 그래프 개형

H143

◇(1998-자연4) ○

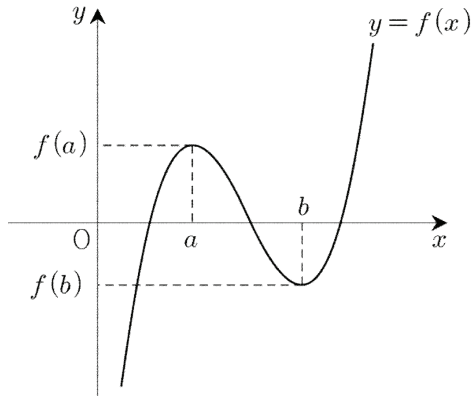
함수  $y = \frac{\ln x}{x}$  가 최댓값을 가질 때의  $x$ 의 값은? [3점]

- ① 1                      ②  $e$                       ③  $\frac{1}{e}$   
 ④  $2e$                       ⑤  $e^2$

H144

○○ (2012사관(1차)-이과14)

그림과 같이  $x = a$ 에서 극댓값,  $x = b$ 에서 극솟값을 가지는 삼차함수  $f(x)$ 가 있다. ( $0 < a < b$ )



함수  $g(x) = e^{-x^2} f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

- ㄱ.  $g'(0) > 0$   
 ㄴ.  $f'(a) + g'(a) > 0$   
 ㄷ.  $g(b)g'(b) > 0$

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

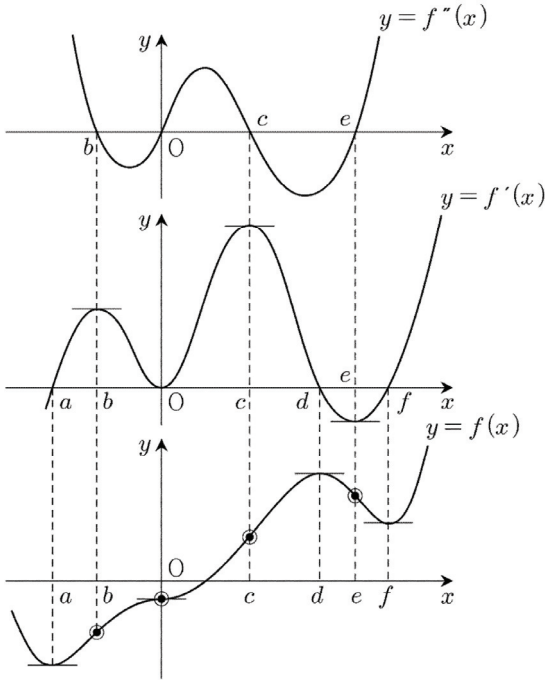
H145

○○ (2010(7)고3-가형19)

함수  $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

- ㄱ. 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(1, \frac{1}{2})$ 에서의 접선과 원점 사이의 거리는  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.  
 ㄴ. 함수  $f(x)$ 의 최솟값은  $-\frac{1}{8}$ 이다.  
 ㄷ. 방정식  $f(x) - f(10) = 0$ 와 서로 다른 실근의 개수는 2개다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



(단, ●은 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.)

▶ ㄱ. (참)

$f''(b)=0$ 이고,  $x=b$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 점  $(b, f(b))$ 는 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

$f''(0)=0$ 이고,  $x=0$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 점  $(0, f(0))$ 은 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

$f''(c)=0$ 이고,  $x=c$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 점  $(c, f(c))$ 는 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

$f''(e)=0$ 이고,  $x=e$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 점  $(e, f(e))$ 는 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

따라서 구간  $[a, f]$ 에서  $f(x)$ 의 변곡점은 4개다.

▶ ㄴ. (참)

$f'(a)=0$ 이고,  $x=a$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극솟값을 갖는다.

$f'(0)=0$ 이지만  $x=0$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

$f'(d)=0$ 이고,  $x=d$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x=d$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구간  $[a, e]$ 에서  $f(x)$ 가 극대가 되는  $x$ 의 개수는 1이다.

▶ ㄷ. (거짓)

구간  $[a, e]$ 에서  $f(x)$ 의 최댓값은  $f(d)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

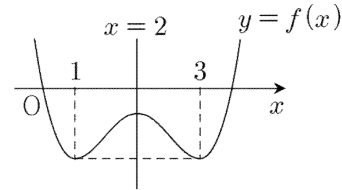
답 ③

## H142 | 답 64

[풀이] 시험장

(가): 곡선  $y=f(x)$ 는 직선  $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

(가)+(나): 함수  $f(x)$ 는  $x=3$ 에서 극솟값을 갖고,  $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다.



인수정리에 의하여 함수  $f(x)$ 의 방정식은

$$f(x) - f(1) = (x-1)^2(x-3)^2$$

곡선  $y=f(x)$ 는 원점을 지나므로

$$f(0) - f(1) = 9, \quad f(1) = -9$$

$$a = f(2) = -8$$

$$\therefore a^2 = 64$$

답 64

## H143 | 답 ②

[풀이]

주어진 함수의 도함수는

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y' = 0 \text{에서 } x = e$$

$x=e$ 의 좌우에서  $y'$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 주어진 함수는  $x=e$ 에서 극댓값을 갖는다.

답 ②

## H144 | 답 ①

[풀이]

함수  $g(x)$ 의 도함수는

$$g'(x) = e^{-x^2}(-2xf(x) + f'(x))$$

▶ ㄱ. (참)

$$g'(0) = 1 \times (0 + f'(0)) = f'(0) > 0$$

▶ ㄴ. (거짓)

$$f'(a) + g'(a)$$

$$= 0 + e^{-a^2}(-2af(a) + f'(a))$$

$$= e^{-a^2}(-2af(a) + 0)$$

$$= -2ae^{-a^2}f(a) < 0$$

$$(\because a > 0, f(a) > 0)$$

▶ ㄷ. (거짓)

$$g(b) = e^{-b^2}f(b) < 0$$

$$(\because f(b) < 0)$$

$$g'(b) = e^{-b^2}(-2bf(b) + f'(b))$$

$$= e^{-b^2}(-2bf(b) + 0)$$

$$= -2be^{-b^2}f(b) > 0$$

$$(\because b > 0, f(b) < 0)$$

$$\therefore g(b)g'(b) < 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

## H145 | 답 ⑤

[풀이]

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$$

이므로 함수  $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

함수  $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \frac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$$

방정식  $f'(x) = 0$ 을 풀면

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}$$

$x = 0$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 극솟값을 갖는다.

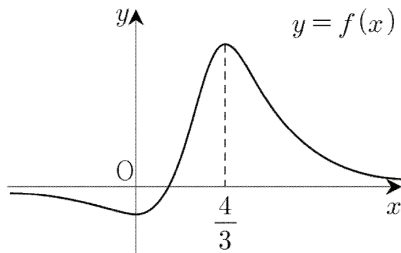
$x = \frac{4}{3}$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{4}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{4}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

이므로  $x$ 축은 점근선이다.

함수  $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



▶ ㄱ. (참)

접선의 방정식은

$$y = x - \frac{1}{2}$$

이므로, 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여 접선과 원점 사이의 거리는

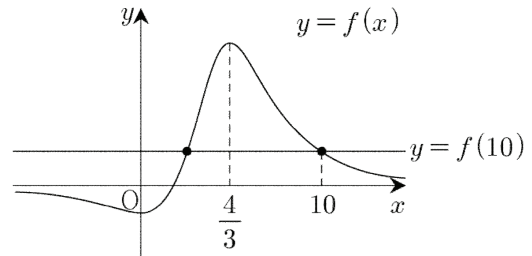
$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

▶ ㄴ. (참)

$$f(x) \geq f(0) = -\frac{1}{8} \text{ 이므로}$$

함수  $f(x)$ 의 최솟값은  $-\frac{1}{8}$ 이다.

▶ ㄷ. (참)



위의 그림처럼 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = f(10)$ 의 교점의 개수는 2이다.

따라서 방정식  $f(x) = f(10)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

## H146 | 답 ④

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

함수  $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$$

함수  $f(x)$ 가  $x = \alpha$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(\alpha) = e^\alpha - \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

$$\therefore e^\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$$

▶ ㄴ. (거짓)

함수  $f(x)$ 의 이계도함수는

$$f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} > 0$$

$x > 0$ 일 때,  $f''(x) > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 변곡점을 갖지 않는다.

▶ ㄷ. (참)

$$f''(\alpha) = e^\alpha + \frac{2}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} > 0$$

I. 부정적분: 치환적분법

I001

◇(2025(9)-미적분24) ○○

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 있다. 양수  $t$ 에 대하여 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는  $\frac{1}{t}+4e^{2t}$ 이다.

$f(1)=2e^2+1$ 일 때,  $f(e)$ 의 값은? [3점]

- ①  $2e^{2e}-1$       ②  $2e^{2e}$       ③  $2e^{2e}+1$   
 ④  $2e^{2e}+2$       ⑤  $2e^{2e}+3$

I. 부정적분: 부분적분법

I002

(2023사관(1차)-미적분26) ○○

구간  $(0, \infty)$ 에서 정의된 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 있다. 모든 양수  $t$ 에 대하여 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는  $\frac{\ln t}{t^2}$ 이다.  $f(1)=0$ 일 때,  $f(e)$ 의

값은? [3점]

- ①  $\frac{e-2}{3e}$       ②  $\frac{e-2}{2e}$       ③  $\frac{e-1}{3e}$   
 ④  $\frac{e-2}{e}$       ⑤  $\frac{e-1}{e}$

I003

(2015(7)고3-B형19) ○○

구간  $(0, \infty)$ 에서 연속인 함수  $f(x)$ 의 한 부정적분을  $F(x)$ 라 할 때, 함수  $F(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수  $x$ 에 대하여  $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$   
 (나)  $F(1)=2e$

$F(3)$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{1}{4}e^3$       ②  $\frac{1}{2}e^3$       ③  $e^3$   
 ④  $2e^3$       ⑤  $4e^3$

# I004

(2019(7)고3-가형26) ○○

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(1) = 0$   
 (나) 0이 아닌 모든 실수  $x$ 에 대하여  

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = xe^x$$

$f(3) \times f(-3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

## I. 정적분

# I005

◇(2016(9)-B형22) ○

$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

# I006

◇(2017-가형3) ○

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx$ 의 값은? [2점]

- ① 0                      ②  $\frac{1}{2}$                       ③ 1  
 ④  $\frac{3}{2}$                       ⑤ 2

# I007

◇(2020(6)-가형5) ○

$\int_0^{\ln 3} e^{x+3} dx$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{e^3}{2}$                       ②  $e^3$                       ③  $\frac{3}{2}e^3$   
 ④  $2e^3$                       ⑤  $\frac{5}{2}e^3$

# I 적분법

1	④	2	④	3	④	4	72	5	6
6	⑤	7	④	8	②	9	②	10	③
11	4	12	④	13	⑤	14	3	15	③
16	⑤	17	①	18	2	19	②	20	③
21	6	22	③	23	⑤	24	325	25	②
26	③	27	12	28	②	29	③	30	③
31	33	32	②	33	④	34	②	35	5
36	⑤	37	①	38	①	39	①	40	10
41	11	42	②	43	③	44	①	45	②
46	50	47	④	48	③	49	③	50	④
51	7	52	②	53	④	54	④	55	②
56	②	57	④	58	④	59	12	60	①
61	①	62	7	63	⑤	64	④	65	④
66	③	67	78	68	8				

## I001 | 답 ④

[풀이]

$$f'(t) = \frac{1}{t} + 4e^{2t} \text{ 이므로 부정적분을 하면}$$

$$f(t) = \ln t + 2e^{2t} + C \text{ (단, } t > 0)$$

$$f(1) = 2e^2 + C = 2e^2 + 1 \text{ 에서 } C = 1$$

$$f(t) = \ln t + 2e^{2t} + 1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore f(e) = 2e^{2e} + 2$$

답 ④

## I002 | 답 ④

[풀이]

주어진 조건에 의하여

$$f'(t) = \frac{\ln t}{t^2}$$

$$f(t) = \int \frac{\ln t}{t^2} dt = \int xe^{-x} dx$$

(이때,  $\ln t = x$ 로 두면  $t = e^x$ ,  $\frac{1}{t} dt = dx$ 이다.)

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C \text{ (}\because \text{부분적분법)}$$

$$\text{즉, } f(e^x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$x = 0$ 을 대입하면

$$f(1) = -1 + C = 0, C = 1$$

$$f(e^x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$\therefore f(e) = 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}$$

답 ④

## I003 | 답 ④

[풀이]

조건 (가)에서

$$\{xF(x)\}' = F(x) + xF'(x) = (2x+2)e^x$$

이므로 부분적분법에 의하여

$$xF(x) = 2xe^x, \text{ 즉 } F(x) = 2e^x$$

$$\therefore F(3) = 2e^3$$

답 ④

## I004 | 답 72

[풀이]

조건 (나)에서 주어진 등식의 양변을 적분하면

$$\int \frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} dx = \int xe^x dx$$

$$\frac{f(x)}{x} = xe^x - e^x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

( $\because$  부분적분법)

$$\text{즉, } f(x) = x^2e^x - xe^x + Cx$$

조건 (가)에서

$$f(1) = C = 0$$

$$\therefore f(3) \times f(-3) = 6e^3 \times 12e^{-3} = 72$$

답 72

## I005 | 답 6

[풀이]

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^{16} = 6$$

답 6

## I006 | 답 ⑤

[풀이]

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여