

기·출·의·파·급·효·과
미적분(하) 워크북



미적분(하)
워크북
기출의 파급효과

미적분(하)

Chapter 06. 적분법_ 8p

Chapter 07. 구분구적법과 정적분_18p

Chapter 08. 상수와 변수, 매개변수와 라이프니츠 미분법_21p

Chapter 09. γ - Γ 문항과 다양한 정리_25p

Chapter 10. 합성함수_30p

Chapter 11. 역함수_33p

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 6년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과에는 미적분 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최종요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

미적분 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.

기출의 파급효과에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 204문제를 담았습니다.

미적분(상)에는 122문제, 미적분(하)에는 92문제입니다.

※ 문제 좌표에서 '나형' 또는 'A형' 또는 '인문계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계' 기출입니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 워크북 전자책도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 워크북은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 워크북 미적분(상) 205문제, 워크북 미적분(하) 80문제로 구성되어 있습니다. 워크북의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

본권과의 호환성을 위하여 워크북에 담긴 기출 역시 본권의 목차를 따릅니다. **본권 학습을 하면서 워크북도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** 본권을 잘 학습하셨다면 워크북에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

본권으로 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다.

본권만으로도 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.

이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(센 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 본권을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

파급의 기출효과



cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다. 기출의 파급효과 시리즈는 국어, 수학, 영어, 물리학 1, 화학 1, 생명과학 1, 지구과학 1, 사회·문화가 예정되어 있습니다.

준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다.

'꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.

교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

기출의 파급효과 팀 소속 오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다. 위 저자 분들의 콘텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

더 궁금하시다면 <https://cafe.naver.com/spreadeffect/15>에서 확인하시면 됩니다.

모킹버드



mockingbird.co.kr

수능 대비 온라인 문제은행

모킹버드는 수능 대비에 초점을 맞춘 문제은행 서비스입니다. AI 문항 추천 알고리즘을 통해 이용자의 학습에 최적화된 맞춤형 모의고사를 제공하여 효율적인 수능 성적향상을 목표로 합니다. 수학, 과탐을 서비스 중입니다.

문항 제작과 검수에 기출의 파급효과 팀뿐만 아니라 지인선 님을 포함한 시대/강대/메가 콘텐츠 팀에서 근무하였고 여러 문항 공모전에서 수상한 이력이 있는 여러 문항 제작자들이 함께 하였습니다.

웹 개발과 알고리즘 개발에는 서울대 컴공, 카이스트 전산학부 출신 개발자들이 참여하였습니다.

모킹버드를 통해 싸고 맛좋은 실모를 온라인으로 뽑아 풀어보고,

AI 문항 추천 알고리즘 기술의 도움을 받아 학습 효율을 극대화해보세요.

가입만 해도 기출은 무제한 무료 이용 가능하고, 자작 실모 1회도 무료로 제공됩니다.



Chapter

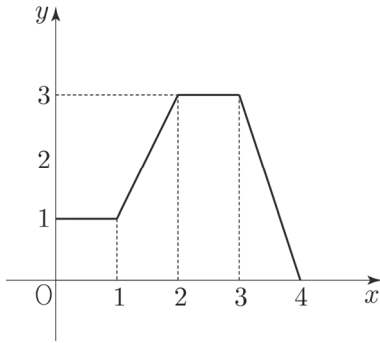
06

적분법

유제

01 98학년도 수능 13번

다음 그림은 $0 \leq x \leq 4$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 정적분 $\int_0^1 f(2x+1)dx$ 의 값은? [2점]



- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
- ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

02 03학년도 수능 8번

함수 $f(x)$ 는 연속함수이고 모든 실수 x 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x) - 2 \int_0^x e^t f(t) dt = 1$$

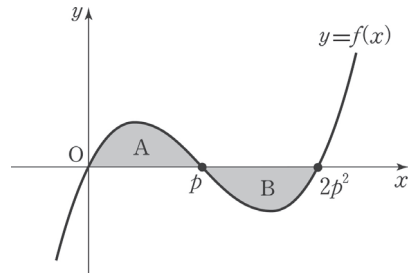
이때, $f''(0)$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$ 는 $f(x)$ 의 이계도함수이다.) [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

03 05학년도 9월 평가원 27번

연속함수 $f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다. 이 곡선과 x 축으로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이가 각각 α , β 일 때, 정적분 $\int_0^p xf(2x^2)dx$ 의 값은?

(단, $p > \frac{1}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ② $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- ③ $\alpha + \beta$ ④ $\frac{1}{4}(\alpha + \beta)$
- ⑤ $\frac{1}{4}(\alpha - \beta)$

04 05년 10월 교육청 26번

정적분 $\int_0^1 2xe^{x^2} dx$ 의 값은?

(단, e 는 자연로그의 밑) [3점]

- ① $e-1$ ② e ③ $e+1$
- ④ e^2-1 ⑤ e^2

05 07학년도 수능 27번

1보다 큰 실수 a 에 대하여 $f(a) = \int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ 라

할 때, $f(a^4)$ 과 같은 것은? [3점]

- ① $4f(a)$ ② $8f(a)$ ③ $12f(a)$
 ④ $16f(a)$ ⑤ $20f(a)$

06 10학년도 9월 평가원 28번

함수 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt$ 에 대하여 상수 a 가

$f(a) = \frac{1}{2}$ 을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6} dx$ 의 값은?
 [3점]

- ① $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ② $\sqrt{e}-1$ ③ 1
 ④ $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{e}+1$

07 12년 7월 교육청 6번

양의 실수를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x$,
 $h(x) = \ln x$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는
 함수 $g(x)$ 가 있다. 이때, $g(e)$ 의 값은? [3점]

(가) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = h(x)$
 (나) $g(1) = -1$

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

08 14학년도 예비시행 21번

함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \leq x < 1$ 일 때 $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

— <보 기> —
 ㄱ. $\int_{-2}^2 f(x)dx = 4 \int_0^1 f(x)dx$
 ㄴ. $1 < x < 2$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이다.
 ㄷ. $\int_1^3 x|f'(x)|dx = 4$

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 14학년도 9월 평가원 30번

두 연속함수 $f(x), g(x)$ 가

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2 + 4$ 이다.

$\int_1^e f(\ln x)dx = ae + b$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이다.) [4점]

10 14학년도 수능 21번

연속함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \int_1^{x+1} f(t)dt \text{이다. } f(1) = 1 \text{일 때,}$$

$\pi^2 \int_0^1 xf(x+1)dx$ 의 값은? [4점]

- ① $2(\pi - 2)$ ② $2\pi - 3$ ③ $2(\pi - 1)$
- ④ $2\pi - 1$ ⑤ 2π

11 14년 4월 교육청 15번

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{a + \ln x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \cos x dx \text{가 성립할}$$

때, 상수 a 의 값은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
- ④ 1 ⑤ 2

12 14년 7월 교육청 9번

$x > 0$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

(나) $f(x) + xf'(x) = x \cos x$

$f(\pi)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{2}{\pi}$ ② $-\frac{1}{\pi}$ ③ 0
- ④ $\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{2}{\pi}$

13 15년 4월 교육청 17번

자연수 n 에 대하여 함수 $f(n) = \int_1^n x^3 e^{x^2} dx$ 라 할

때, $\frac{f(5)}{f(3)}$ 의 값은? [4점]

- ① e^{14} ② $2e^{16}$ ③ $3e^{16}$
- ④ $4e^{18}$ ⑤ $5e^{18}$

14 15년 10월 교육청 27번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = 2$
 (나) $\int_0^1 (x-1)f'(x+1) dx = -4$

$\int_1^2 f(x) dx$ 의 값을 구하시오. (단, $f'(x)$ 는 연속함수이다.) [4점]

15 16년 10월 교육청 23번

함수 $f(x) = 8x^2 + 1$ 에 대하여

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x) \cos x dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

16 17년 3월 교육청 4번

$\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $2\ln 2$ ② 2 ③ $4\ln 2$
- ④ 4 ⑤ $6\ln 2$

17 17년 3월 교육청 16번

연속함수 $f(x)$ 가

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 12, \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^{-1} xf(x) dx$$

를 만족시킨다. $\int_{-1}^x f(t) dt = F(x)$ 라 할 때,

$\int_{-1}^1 F(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 8 ③ 10
- ④ 12 ⑤ 14

18 17년 3월 교육청 21번

구간 $[0, 1]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (0 \leq x \leq 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x) = f(x) - x$

(나) $\int_0^1 F(x)dx = e - \frac{5}{2}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $F(1) = e$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)dx = \frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}$

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19 18학년도 9월 평가원 18번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$f(0) = 0$ 이고 모든 실수 x 에 대하여

$f'(x) > 0$ 이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점

$A(t, f(t)) (t > 0)$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라

하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인

직선이 x 축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수

t 에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가

$\frac{1}{2}(e^{3t} - 2e^{2t} + e^t)$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및

직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① $e - 2$ ② e ③ $e + 2$
 ④ $e + 4$ ⑤ $e + 6$

20 17년 10월 교육청 16번

연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \neq 0$ 인 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

(나) $f(0) = 0$

$\{f(1)\}^3$ 의 값은? [4점]

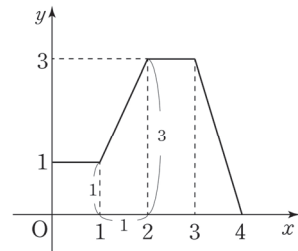
- ① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $1 + 2\ln 2$
 ④ $4\ln 2$ ⑤ $1 + 3\ln 2$

CHAPTER 06 해설

01 98학년도 수능 13번

답 : ④

$$\int_0^1 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2} \times (2+3) = \frac{5}{2} \text{이다.}$$



02 03학년도 수능 8번

답 : ③

1. $f(x) - 2 \int_0^x e^t f(t) dt = 1$ 는 정적분으로 정의된 함수 꼴이므로

$f(0) = 1, f'(x) = 2e^x f(x)$ 을 뽑아낸다.

2. $f''(x) = 2e^x \{f(x) + f'(x)\}$ 이다.

$f'(x) = 2e^x f(x)$ 에서 $f'(0) = 2$ 이므로 $f''(0) = 2\{f(0) + f'(0)\} = 6$ 이다.

03 05학년도 9월 평가원 27번

답 : ⑤

$2x^2 = t, 4x dx = dt$ 로 치환하자. $\int_0^p x f(2x^2) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2p^2} f(t) dt$ 이다.

한편 A의 넓이는 α , B의 넓이는 β 에서 $\int_0^{2p^2} f(x) dx = \alpha - \beta$ 이다.

따라서 $\int_0^p x f(2x^2) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2p^2} f(t) dt = \frac{1}{4}(\alpha - \beta)$ 이다.

04 05년 10월 교육청 26번

답 : ①

$\int_0^1 2x e^{x^2} dx$ 에서 $(e^{x^2})' = 2x e^{x^2}$ 임을 바로 알아봐야 한다. $\int_0^1 2x e^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1$ 이다.

05 07학년도 수능 27번

답 : ②

$$f(a) = \int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \left[\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} \right]_1^a = \frac{2}{3} (\ln a)^{\frac{3}{2}} \text{이다.}$$

$$f(a^4) = \frac{2}{3} (\ln a^4)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (4 \ln a)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} (\ln a)^{\frac{3}{2}} \text{에서 } 8f(a) \text{이다.}$$

06 10학년도 9월 평가원 28번

답 : ②

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^6} dt \text{는 정적분으로 정의된 함수 꼴이므로 } f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{1+x^6} \text{을 뽑아낸다.}$$

$$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6} dx = \int_0^a f'(x) e^{f(x)} dx = [e^{f(x)}]_0^a = e^{f(a)} - e^{f(0)} = e^{\frac{1}{2}} - 1 \text{이다.}$$

07 12년 7월 교육청 6번

답 : ③

조건 (가)의 좌변에서 곱의 미분 꼴 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 을 알아봐야 한다.

$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = h(x)$ 의 양변을 x 에 대해 적분해보자.

$$f(x)g(x) = x \ln x - x + C \text{에서 } f(x) = x, g(1) = -1 \text{이므로 } C = 0 \text{이다.}$$

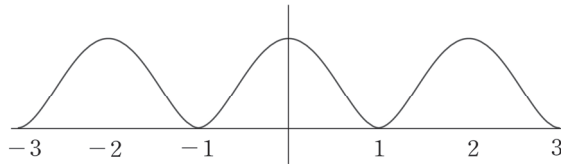
$$\text{따라서 } xg(x) = x \ln x - x \text{에서 } g(x) = \ln x - 1 \text{이고 } g(e) = 0 \text{이다.}$$

08 14학년도 예비시행 21번

답 : ⑤

1. 함수 $g(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$ 라 하자. $g(x)$ 는 $g(1) = g(-1) = 0, g(x) \geq 0$ 를 만족하는 우함수이다.

함수 $f(x)$ 는 주기가 2인 우함수인 것을 고려하여 $y = f(x)$ 의 그래프 개형을 '미분 없이' 그리면 다음과 같다.



위 그래프 개형이 맞는지 수식적으로 확인하려면 $g'(x) = \frac{4x(x^2-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$ 을 이용하면 된다.

$g'(0) = g'(1) = g'(-1) = 0$ 이고, $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대임을 알 수 있다.

2. $\int_{-2}^2 f(x)dx = 2 \int_0^2 f(x)dx = 4 \int_0^1 f(x)dx$ 이므로 선지 (㉠)은 참.

3. $-1 < x < 0$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 주기가 2이므로 선지 (㉡)은 참.

4. $|f'(x)| = \begin{cases} f'(x) & (2n-1 \leq x < 2n) \\ -f'(x) & (2n \leq x < 2n+1) \end{cases}$ 이다. (단, n 은 정수)

$$\int_1^3 x|f'(x)|dx = \int_1^2 xf'(x)dx - \int_2^3 xf'(x)dx$$

$$= [xf(x)]_1^2 - \int_1^2 f(x)dx - \left([xf(x)]_2^3 - \int_2^3 f(x)dx \right)$$

$$= 2f(2) - f(1) - (3f(3) - 2f(2)) = 4\{f(2) - f(1)\} = 4$$
이다. 선지 (㉢)은 참.

09 14학년도 9월 평가원 30번

답 : 17

1. 직접 치환하지 않으면 접근하기 힘들어 보이는 문제이다. 발문에는 함수 $g(e^x)$ 를 소개해줬지만 힌트로 준 값은 $\int_1^{e^2} g(x)dx$ 이다. 여기서 힌트를 얻어 $e^x = t$ 로 치환해서 접근하자.

$$g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (1 \leq t \leq e) \\ g\left(\frac{t}{e}\right) + 5 & (e \leq t \leq e^2) \end{cases}$$

※ 간혹 $g(e^{x-1}) = g(t-1)$ 로 잘못 치환하는 경우가 있는데 $g(e^{x-1}) = g\left(\frac{e^x}{e}\right)$ 이므로

$g(e^{x-1}) = g\left(\frac{t}{e}\right)$ 로 치환해야 한다. 실수를 범하지 않도록 조심하도록 하자.

2. $\int_1^{e^2} g(x)dx$ 의 적분 구간을 1. 에서 구한 구간으로 나눠서 표현하자.

$$\int_1^{e^2} g(x)dx = \int_1^e g(x)dx + \int_e^{e^2} g(x)dx = \int_1^e f(\ln x)dx + \int_e^{e^2} \left(g\left(\frac{x}{e}\right) + 5\right)dx$$
이다.

한편 $\int_e^{e^2} \left(g\left(\frac{x}{e}\right) + 5\right)dx = 5(e^2 - e) + e \int_1^e g(x)dx = 5(e^2 - e) + e \int_1^e f(\ln x)dx$ 이므로

$$\int_1^{e^2} g(x)dx = (e+1) \int_1^e f(\ln x)dx + 5(e^2 - e) = (e+1)(ae + b) + 5(e^2 - e)$$

$$= (a+5)e^2 + (a+b-5)e + b = 6e^2 + 4$$
이다.

따라서 $a = 1, b = 4$ 이므로 $a^2 + b^2 = 17$ 이다.

10 14학년도 수능 21번

답 : ①

1. 함수 $f(x)$ 는 원점 대칭이므로 이를 수식으로 표현하면 $f(x) = -f(-x)$ 이다.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \int_1^{x+1} f(t) dt \text{는 정적분으로 정의된 함수 꼴이므로}$$

$$f(0) = 0, f'(x) = \frac{\pi}{2} f(x+1) \text{을 뽑아낸다.}$$

$$f(x+1) = \frac{2}{\pi} f'(x) \text{이므로 } \pi^2 \int_0^1 x f(x+1) dx = 2\pi \int_0^1 x f'(x) dx \text{이다.}$$

$$2\pi \int_0^1 x f'(x) dx \text{는 대표적인 부분적분하기 쉬운 꼴이다.}$$

$$2\pi \int_0^1 x f'(x) dx = 2\pi [x f(x)]_0^1 - 2\pi \int_0^1 f(x) dx$$

2. $f(1) = 1$ 임이 주어졌으므로 이제 $\int_0^1 f(x) dx$ 의 값만 구하면 된다.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \int_1^{x+1} f(t) dt \text{에 } x = -1 \text{을 대입하면 } f(-1) = \frac{\pi}{2} \int_1^0 f(t) dt \text{이다.}$$

한편, $f(x)$ 는 원점 대칭이므로 $f(1) = 1$ 에서 $f(-1) = -1$ 임을 알 수 있다.

$$\text{따라서 } \int_0^1 f(t) dt = \frac{2}{\pi} \text{이다. } 2\pi \int_0^1 x f'(x) dx = 2\pi [x f(x)]_0^1 - 2\pi \int_0^1 f(x) dx = 2\pi - 4 = 2(\pi - 2)$$

11 14년 4월 교육청 15번

답 : ②

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{a + \ln x}{x} dx = \left[\left(a \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right) \right]_{e^2}^{e^3} = 3a + \frac{9}{2} - 2a - \frac{4}{2} = a + \frac{5}{2} \text{이다.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \cos x dx = \left[\frac{1}{2} (1 + \sin x)^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{이다. } a + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \text{이므로 } a = -1 \text{이다.}$$

12 14년 7월 교육청 9번

답 : ②

1. 조건 (나)의 좌변에서 곱의 미분 꼴 $(xf(x))' = f(x) + xf'(x)$ 을 알아봐야 한다.

$$f(x) + xf'(x) = x \cos x \text{의 양변을 } x \text{에 대해 적분해보자.}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{이므로, } xf(x) = x \sin x - \int \sin x = x \sin x + \cos x \text{이다.}$$

2. $\pi f(\pi) = -1$ 이므로 $f(\pi) = -\frac{1}{\pi}$ 이다.

13 15년 4월 교육청 17번

답 : ③

1. $f(n) = \int_1^n x^3 e^{x^2} dx$ 에서 $x^2 = t$, $2x dx = dt$ 로 치환하자.

$$f(n) = \int_1^n x^3 e^{x^2} dx = \int_1^n x \times x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{n^2} t e^t dt = \frac{1}{2} [(t-1)e^t]_1^{n^2} = \frac{(n^2-1)e^{n^2}}{2} \text{이다.}$$

2. $f(3) = 4e^9$, $f(5) = 12e^{25}$ 이므로 $\frac{f(5)}{f(3)} = 3e^{16}$ 이다.

14 15년 10월 교육청 27번

답 : 6

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx &= \int_1^2 (t-2)f'(t)dt = [(t-2)f(t)]_1^2 - \int_1^2 f(t)dt \\ &= f(1) - \int_1^2 f(t)dt = 2 - \int_1^2 f(t)dt = -4 \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 $\int_1^2 f(x)dx = 6$ 이다.

※ $\int_1^2 (t-2)f'(t)dt$ 은 대표적인 부분적분 하기 쉬운 꼴이다.

$t-2$ 를 미분하기 쉬운 꼴로 두고, $f'(t)$ 를 적분하기 쉬운 꼴로 두자.

15 16년 10월 교육청 23번

답 : 6

$(\sin x)' = \cos x$ 임을 한눈에 알아볼 수 있어야 한다.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x) \cos x dx = [f(\sin x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 9 - 3 = 6 \text{이다.}$$

16 17년 3월 교육청 4번

답 : ④

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 임을 한눈에 알아볼 수 있어야 한다. $\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \left[\frac{1}{4} (\ln x)^4 \right]_1^{e^2} = \frac{1}{4} \times 16 = 4$ 이다.

17 17년 3월 교육청 16번

답 : ④

1. $\int_{-1}^x f(t)dt = F(x)$ 는 정적분으로 정의된 함수 꼴이므로 $F(-1) = 0$, $F'(x) = f(x)$ 을 뽑아낸다.

나머지 조건을 보기 좋게 정리하면 $F(1) = 12$, $\int_{-1}^1 xf(x)dx = 0$ 이다.

2. $\int_{-1}^1 F(x)dx$ 는 기본적 함수 적분도 아니고 역시 치환적분 꼴은 아니다. 남은 선택지는 부분적분뿐이다.

이럴 땐 $F(x) = 1 \times F(x)$ 로 보고 부분적분을 시도해보자.

$F'(x) = f(x)$ 에서 $F(x)$ 는 미분하기 쉬운 형태임을 알 수 있다.

$\int_{-1}^1 1 \times F(x)dx$ 에서 $F(x)$ 는 미분하기 쉬운 형태로, 1을 적분하기 쉬운 형태로 두자.

$$\int_{-1}^1 F(x)dx = \int_{-1}^1 1 \times F(x)dx = [xF(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 xf(x)dx = 12 \text{이다.}$$

18 17년 3월 교육청 21번

답 : ④

1. $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 는 정적분으로 정의된 함수 꼴이므로 $F(0) = 0$, $F'(x) = f(x)$ 을 뽑아낸다.

이제 조건 (나)를 보자. 조건 (가)에서 함수 $F(x)$ 에 대한 단서를 찾지 못했기 때문에 대입해서 해결하자.

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 \{f(x) - x\}dx = F(1) - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2} \text{이다.}$$

따라서 $F(1) = e - 2$ 이므로 선지 (㉠)은 거짓.

2. 조건 (가)를 한 번 더 이용하자. $x F(x) = x(f(x) - x)$ 이다.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x F(x)dx &= \int_0^1 x \{f(x) - x\}dx = \left[x \left\{ F(x) - \frac{1}{2}x^2 \right\} \right]_0^1 - \int_0^1 \left\{ F(x) - \frac{1}{2}x^2 \right\}dx \\ &= F(1) - \frac{1}{2} - \int_0^1 F(x)dx + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \text{이다. 선지 (㉡)은 참.} \end{aligned}$$

3. 함수 $\{F(x)\}^2$ 은 바로 적분할 수 없으므로 조건 (가)를 이용해서 접근해야 한다.

$\{F(x)\}^2 = \{f(x) - x\}F(x)$ 이다.

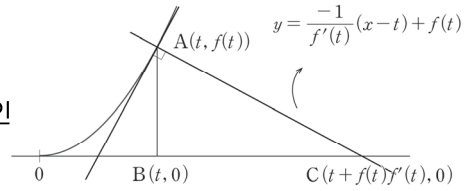
$$\begin{aligned} \int_0^1 \{F(x)\}^2 dx &= \int_0^1 f(x)F(x)dx - \int_0^1 xF(x)dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \{F(x)\}^2 \right]_0^1 - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \{F(1)\}^2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}(e-2)^2 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6} \text{이다. 선지 (㉢)은 참.} \end{aligned}$$

19 18학년도 9월 평가원 18번

답 : ①

1. 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$ 이므로 접선과 수직인

직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(t)}$ 이다.



따라서 직선 AC의 방정식은 $y = -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t)$ 이다.

또, 점 C는 직선 AC의 x 절편이므로 $0 = -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t)$ 에서

점 C의 x 좌표는 $f'(t)f(t) + t$ 임을 알 수 있다.

$\overline{BC} = f'(t)f(t)$ 이고 $\overline{AB} = f(t)$ 이므로 $(\triangle ABC \text{의 넓이}) = \frac{1}{2}f'(t)\{f(t)\}^2$ 을 얻는다.

따라서 $f'(t)\{f(t)\}^2 = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$ 이다.

2. $f(t)$ 를 구하기 위해 $f'(t)\{f(t)\}^2 = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$ 에서 양변을 t 에 대해 적분하자.

$f(0) = 0$ 이므로 $\frac{1}{3}\{f(t)\}^3 = \frac{1}{3}e^{3t} - e^{2t} + e^t - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(e^t - 1)^3$ 이다.

$f'(t) > 0$ 이므로 $f(t) = e^t - 1$ 이다.

3. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^x - 1)dx = [e^x - x]_0^1 = e - 2$ 이다.

20 17년 10월 교육청 16번

답 : ②

1. 조건 (가)에서 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 을 보면 치환적분 꼴임을 알아봐야 한다.

$\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 의 양변을 x 에 대해 적분하면 $\frac{1}{3}\{f(x)\}^3 = \ln(x^2+1) + C$ 이다.

※ $\{\ln(x^2+1)\}' = \frac{2x}{x^2+1}$, $\left(\frac{1}{3}f(x)^3\right)' = f(x)^2 f'(x)$ 임을 치환 없이 바로 알아보자.

2. 조건 (나)는 적분상수 처리용이다. $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$, $\frac{1}{3}\{f(x)\}^3 = \ln(x^2+1)$ 이다.

$\frac{1}{3}\{f(1)\}^3 = \ln 2$ 에서 $\{f(1)\}^3 = 3\ln 2$ 이다.