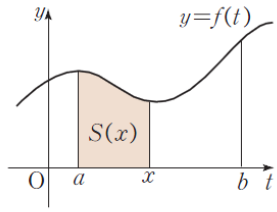
B형 FAQ

28page

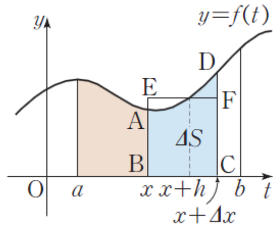
'정적분의 기본정리 증명 관련'

함수 $y=f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$일 때, 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 a에서 x까지의 넓이를 $S(x)$라고 하면



$$S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

이다. 여기서 x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면 오른쪽 그림에서 ΔS는 도형 ABCD의 넓이이다.



도형 ABCD와 넓이가 같도록 직사각형 EBCF를 만들면 변 EF는 곡선과 만난다.

이때, 교점의 x좌표를 $x+h$라고 하면

$$\Delta S=f(x+h)\Delta x \qquad \therefore \frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x+h)$$

〈출처 : 지학사 '적분과 통계'〉

254page

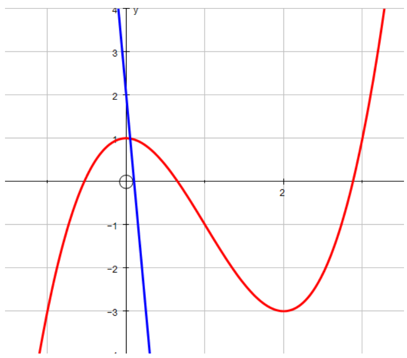
26번 문항 상세풀이

(풀이 1) 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx+2$이다.

곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 직선 $y=mx+2$가 만나는 점의 개수가 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되어야 한다.

함수 $y=x^3-3x^2+1$의 그래프는 다음과 같다.

발견적으로, m이 충분히 작으면, 만나는 점의 개수는 1개다.



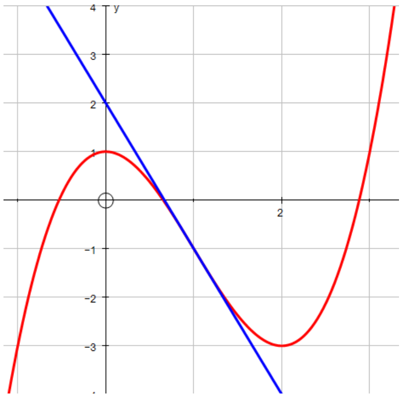
따라서, 만나는 점의 개수가 1개가 되지 않는 m의 최솟값을 찾으면 된다.

점 $(0,\ 2)$를 지나고 곡선 $y=x^3-3x^2+1$에 접할 때 만나는 점의 개수가 변화할 수 있는 후보가 된다.

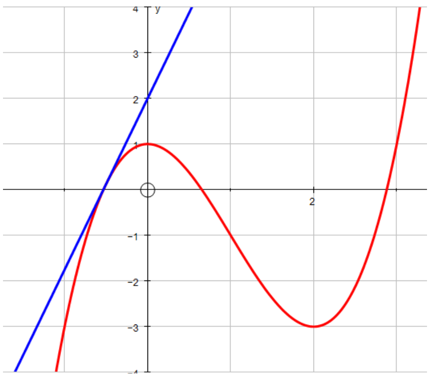
$y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2+1$에 $(0,\ 2)$를 대입하면, $-2t^3+3t^2+1=2$이므로, $t=1,\ t=-\dfrac{1}{2}$이다.

i) $t=1$일 때에는 접점이 $t=1$이라는 뜻이고, 만나는 점의 개수를 예측하기 어려우므로 수식으로 확인해봐야 한다.

$y=-3x+2$이므로, $x^3-3x^2+1=mx+2$에서 $m=-3$을 대입하고 정리하면 $(x-1)^3=0$이다. 따라서, 근의 개수는 1개다.



ii) $t=-\frac{1}{2}$일 때 : 접점의 x좌표가 $-\frac{1}{2}$이므로 만나는 점의 개수는 그래프상으로 두 점에서 만날 것임을 알 수 있다. 만약 의심이 되는 경우에는 위와 동일하게 수식으로 한번 더 확인한다.



이 문항을 학습하는 관점은 다음과 같습니다.

① 그래프는 수학에서 직관에 의해 문제 풀이 시간을 좁혀주는 역할을 한다.

② 따라서, 문항을 해결할 때 그래프의 요소가 개입되면 풀이가 엄밀해지지 않음을 이해한다.

③ 풀이가 다소 엄밀하지 않더라도, 개개인에 따라 문항의 답에 확신을 가질 수 있는 경우가 있다.

④ 그러나 정답에 확신을 가지지 못하는 경우에는 반드시 수식으로 확인할 수 있어야 한다.

(풀이 2)

$x^3-3x^2+1=mx+2$에서 $x^3-3x^2-1=mx$와 같이 식을 변형한 후, 양변에 x를 나누어도 된다.

이와 같은 풀이 방식은 과거 $\alpha x \le e^x \le \beta x$와 관련한 수능 문항에서 근거를 찾을 수는 있다.

다만 $\alpha x \le e^x \le \beta x$ 문항과는 달리, 이 문항에서는 이와 같은 발상이 수험생이 구사하기에 절대로 쉽지 않으므로, 이 풀이는 수학영역의 비밀 해설지의 풀이 2)를 참고하여 한번 활용해보는 연습을 한다.

(풀이 3)

$x^3 - 3x^2 - mx - 1 = 0$ 으로 변형하여, 이 삼차방정식의 근의 개수의 관점에서 생각해본다.

미분해보면, $3x^2 - 6x - m$ 임을 알 수 있다. 이 도함수는 이차함수이고, m 의 값이 변화하므로 m 의 위치에 따라 개형을 논할 수 있다. m 의 값이 작은 것부터 논해야 한다는 것은 위의 문항을 통해 알 수 있다.

i) $m < -3$ 인 경우 (이 -3 은 판별식을 통해 나온 값입니다.)
도함수의 근이 모두 허근, 즉 실근을 갖지 않으므로 원함수의 그래프는 1 개의 실근을 갖는다.
ii) $m = -3$ 인 경우
도함수의 근이 중근을 가지므로 원함수의 그래프는 1 개의 실근을 갖는다.
iii) $m > -3$ 인 경우
도함수의 근이 서로 다른 두 실근을 갖는다. 따라서, 그래프는 최소 1 개의 실근, 최대 3 개의 실근을 갖는다.

따라서, 우리가 구하는 답은 1 개의 실근에서 2 개의 실근으로 바뀌는 지점이 될 것이다. (← 논리적 생략)
실근이 2 개인 경우는 극값과 해가 일치하는 경우가 될 것이다.
$x^3 - 3x^2 - mx - 1 = 0$ 과 $3x^2 - 6x - m = 0$ 이 모두 성립하는 x 의 값을 구하면 된다.
$m = 3x^2 - 6x$ 를 대입하여 정리하면, $-2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ 이다. $x = -\dfrac{1}{2}$ 또는 $x = 1$ 이다.
$x = 1$ 일 때 $m = -3$ 이므로 문제의 가정에 모순이고, $x = -\dfrac{1}{2}$ 일 때 $m = \dfrac{15}{4}$ 이므로 성립한다.

이 풀이는 수식만으로 풀어내려고 노력했으나 중간에 한 가지 추측이 들어갔습니다.
이 추측이 참임을 보이기 위해서는 m 의 값에 따라 삼차함수의 개형이 연속적으로(Not 이산) 변해야 합니다.