수열 [귀납]
Schema 3

주기성

예

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

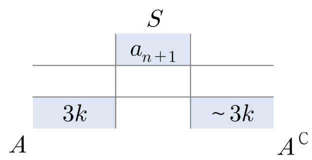
이다.

수열 [귀납]
Schema 3

주기성

$Sol)$

a_{n+1}을 기준으로 다음과 같이 분류됨을 알 수 있다.



$3k$의 비례상수는 3이고 $\sim 3k$의 비례상수는 1 or 2이므로
정보의 위상이 높은 $3k$에 3을 할당할 수 있다.

		a_{n+1}	a_{n+2}	a_{n+3}	a_{n+4}	a_{n+5}	a_{n+6}
비례상수	:	3	1	4	5	9	3

$a_7 = 40$이고 $\sim 3k$이므로 시작점으로 세팅할 수 있는 항은 다음 3가지이다.

		a_{n+1}	a_{n+2}	a_{n+3}	a_{n+4}	a_{n+5}	a_{n+6}
			①	②	③		
비례상수	:	3	1	4	5	9	3
관계상수 ①				$\times 5$			
관계상수 ②					$\times \frac{9}{4}$		
관계상수 ③						$\times \frac{3}{5}$	

관계상수의 Max는 ×5이고 Min은 ×$\frac{3}{5}$이므로 구하는 값은 $40 \times (5 + \frac{3}{5}) = 224$이다.

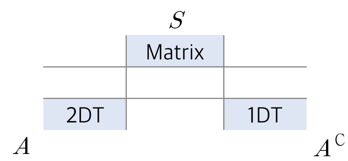
$Ans)$

$\therefore\ 40 \times (5 + \frac{3}{5}) = 224$

수열 [귀납]
Schema 10
2DT

[중요도 ★★★★]

- 수열에서 목적을 가진 나열을 행할 때
  경우를 빠트리지 않기 위한 기준을 명확히 확립하고
  뻗어나갈 수 있는 능력은 중요하다.



- 주어진 조건 내 유기성을 관찰하여 구조 내
  정방향, 역방향, 양방향 추적을 행할 수 있다.

- 실전에서는 무작정 뻗어나가는 것보다는 가로와 세로 내에 기준을 갖고
  정리하는 능력을 함양해두는 게 주관식으로 제시되더라도
  경우를 빠뜨리지 않고 소거 or 전수 카운팅하기에 유리하다.

예

차수	0	1	2	3	4
계수	2	3	2	2	1

1DT

	a_4	a_3	a_2	a_1
A	2	6	18	54
A^C	①		②	7
B		1	3	9
B^C			③	2

2DT

예

양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_2 \times a_3 < 0$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)\left(a_{n+1}+ka_n\right)=0$이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오.

수열 [연역]
Schema 5

간격 조건

[중요도 ★★★]

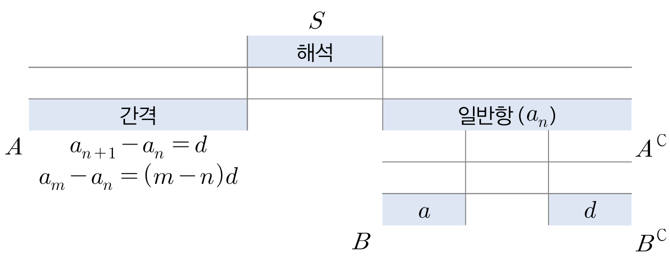
- 등차수열에 대해 새롭게 정의된 수열이 등장할 수 있다.
  이때 시작점인 a_k 값은 수열 변화에 따라 변할 수 있으나
  등차수열을 기하적으로 관찰하면 직선이므로 간격은 상수 조건이다.

① $\triangle_x$

② $\triangle_y$

③ $\dfrac{\triangle_x}{\triangle_y}$

→ x에 대한 정보, y에 대한 정보 2가지 이상으로 해석할 수 있다.



예

a_n의 공차 d_1, b_n의 공차 d_2

① 수열 $\{a_n+b_n\}$: 공차 d_1+d_2
② 수열 $\{a_n-b_n\}$: 공차 d_1-d_2

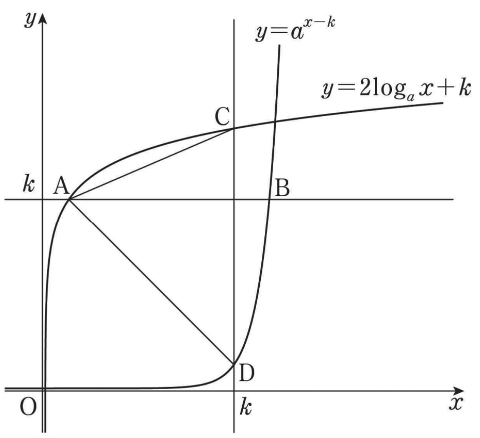
- 새롭게 정의되는 수열이 합의 형태로 주어졌을 때 간격 정보를 내포할 수 있다.

①	$a_{n+1}+a_n=pn+q$	↔	$a_{n+2}-a_n=p$
②	$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=pn+q$	↔	$a_{n+3}-a_n=p$
③	$a_{n+1}=pa_n+q^{n+1}$	↔	$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}-\dfrac{a_n}{p^n}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$

그래프 해석

예

그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오.



예

자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다. (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자.
$x_1+x_2+x_3$의 값은?

지수 ·로그함수
Schema 1

그래프 해석

Sol)

$\mathrm{A}(1,\ k)$, $\mathrm{B}(\log_a k+k,\ k)$, $\mathrm{C}(k,\ 2\log_a k+k)$, $\mathrm{D}(k,\ 1)$이 상수 조건으로 제시되어 있다.

주어진 조건은 $2\times\square\mathrm{ADBC}$ = $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$와 동일하고

AB와 CD가 만나는 점을 $\mathrm{E}(k,\ k)$라 하면 다음을 알 수 있다.

		S	
		$\square\mathrm{ADBC}$	
	$\triangle\mathrm{CAD}$		$\triangle\mathrm{CBD}$
	A		A^C
	①		②
넓이	35		$\frac{15}{2}$
간격 비	14	:	3

단위 간격을 △라 두면 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{CD}}$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\left(\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{DE}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times14\triangle\times(6\triangle+14\triangle)$$
$$=35$$

$\therefore\ \triangle=\frac{1}{2}$

$\rightarrow\ k=\overline{\mathrm{AE}}+1=8$

$\rightarrow\ \overline{\mathrm{BE}}=\log_a k=\log_a 8=\frac{3}{2},\ a=4$

Ans)

$\therefore\ a+k=12$

Sol)

$\triangle_x$가 n, $\triangle_y$가 $3n$이므로 $\triangle_y=x_n-\frac{x_n}{2^n}=\frac{3n\times2^n}{2^n-1}$이다.

($\because\ y=2^x$는 x 방향으로 $+n$일 때, y 방향으로 $\times2^n$)

Ans)

$\therefore\ x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$

5. 수1과 수2, 중학 수학, 고등 수학의 통합적 사고

현 체제 수능 수학은 꽤 많은 부분에서 고1 수학과 중등기하를 요구하기에 여러 교재를 유랑하지 않도록, 한 Set 내에 중등, 고등 수학의 만점에 필요한 모든 요소를 담았습니다.

수열의 함수적 해석, 함수의 수열적 해석 등 통합적 관점으로 현 수능을 정복하기에 적절하도록 서술되어 있으며, 수열과 함수에 대한 이해는 특히 중요도가 높기에 가장 앞 부분에 배치 및 상술하여 학생 분들이 앞 부분 위주로 학습하여 뒷 부분 중요도가 높은 교과 내용 또는 심화개념에 소홀할 수 있는 점을 고려하여 서술했습니다.

[권장 독자 기준]

① 기본 개념서 or 개념 강좌 1회독 완료인 학생
② 수능 날 목표가 2등급 이상인 학생
③ 4 → 1 (등급 or %) 의 감각을 배양하고 싶은 학생
④ N제 또는 모의고사와 개념 학습의 간극을 메우고 싶은 학생.

6. 우리 모두는 완전히 노베는 아니기에

현행 교육과정상 수능 수학은 고3 한 시기에 응집되는 것이 아니라
초1~고2 11년의 기반 개념이 선행되기에 수능 대비에 있어 완전히 노베이스 학생은 거의 없으며 수능 수학 100점의 필요조건이 되는 수1, 수2 개념은 엄청나게 많지는 않습니다.

그에 따라 본 디올은 어떤 독자 분께는 친절하나 어떤 독자 분께는 친절하지 않을 수 있으며 4등급 학생이 1등급 되기에, 1컷(4%) 학생이 1%에 들어오기에 적절하도록 구성하였습니다.

누군가에게는 발상적이라 여겨지는 것이 누군가에게는 당연의 경지인 것처럼
당연하게 이겨낼 수 있겠다는 확신을 가지실 수 있도록 구성하였습니다.

디올 교재는 여러 학생 분들의 의견을 수렴하고 오랜 기간 저자들의 회의를 거쳤으며
그에 따라 여러 번 수정하고 퇴고된 바 있습니다.

그에 따라 받은 고견 or 얻은 결론은 다음과 같습니다.
"시중 여러 교재들은 너무 방대하거나 기본적인 내용이다. 조금 더 Light했으면 좋겠다."
"마지막 날 정리할 때도 활용할 수 있도록 여러 번 펼쳐볼 수 있는 교재였으면 좋겠다."
"지면 상 서술의 한계를 넘어서면 조금 더 좋을 것 같다."
"출제 Point와 미출제 Point의 전수 제시는 좋지만 중요도가 추가되면 좋을 것 같다."

수능 수학은 교과 개념을 기반으로 한 수리 추론을 요구하는 문항들이 출제됩니다.
디올의 Insight가 여러분의 앞날을 비추는 등불과 같은 존재가 되기를,
성공적 피날레의 마침표가 되기를 기원합니다.

이차함수

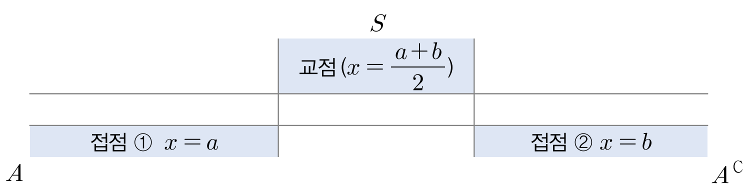
- 이차함수에 그을 수 있는 접선의 개수는 다음으로 분류된다.

① 이차함수 내부의 점 : 0개
② 이차함수 위의 점 : 1개
③ 이차함수 외부의 점 : 2개

- 이차함수 $f(x)$ 위 서로 다른 두 점 $x=a$, $x=b$에서의
두 접선 간 교점의 x 좌표는 두 접점 간 중점인 $x=\frac{a+b}{2}$이다.

(= 접 - 교 - 접 간격 비 1 : 1)

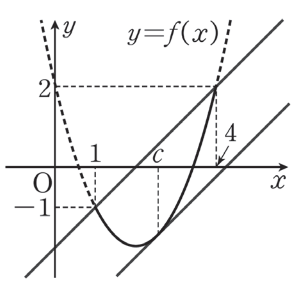
2개의 점점과 1개 교점 중 2개를 알면 여사건 요소의 x 좌표를 도출해낼 수 있다.



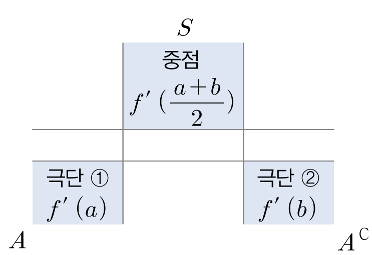
- 이차함수에서 양극단 평균변화율 = 중점 순간변화율이다.

→ 일차함수와 이차함수가 두 점에서 만날 때
평균변화율 = 순간변화율인 x 좌표는 두 점의 중점이다.
(∵ 도함수의 등간격 성질)

→ 3개의 미분계수는 등간격 관계에 있으므로
3개 중 2개를 알면 여사건 요소를 도출해낼 수 있다.



$c=\frac{1+4}{2}$



$f'(\frac{a+b}{2})=\frac{f'(a)+f'(b)}{2}$

함수 [연역]
Schema 3
삼차함수

- 삼차함수 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$를 변형하면

$$
\begin{aligned}
&= a(x^3 + \frac{b}{a}x^2) + cx + d \\
&= a(x + \frac{b}{3a})^3 + (c - \frac{b^2}{3a})x + d - \frac{b^3}{27a^2} \\
&= a(x-m)^3 + k(x-m) + n
\end{aligned}
$$

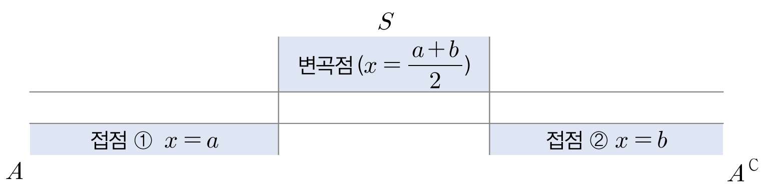
∴ 삼차함수 $f(x)$는 항상 $(m,\ n)$ 점대칭이고, $(m,\ n)$은 변곡점이다.

그에 따라 모든 삼차함수를 $g(x) = a(x-m)^3$ 변곡점에서의 기본형과
$h(x) = k(x-m) + n$ 변곡접선과의 관계함수로 관찰할 수 있다.

→ 변곡접선을 바탕으로 그래프 개형을 기하적으로 추론할 수 있다.

- 삼차함수 $f(x)$ 위 서로 다른 두 점 $x = a$, $x = b$에서 미분계수가 같으면
  변곡점의 x 좌표는 두 접점 간 중점인 $x = \frac{a+b}{2}$이다.

  2개의 점점과 1개 변곡점 중 2개를 알면 여사건 요소의 x 좌표를 도출해낼 수 있다.



- 삼차함수는 변곡점 기준 점대칭함수이므로 다음이 성립한다.

[원명제]

$(a,\ f(a))$ 변곡점		$\int_{a-b}^{a+b} f(x) - f(a)\, dx = 0$
p	$\Rightarrow$	q

[역명제]

$\int_{a-b}^{a+b} f(x) - f(a)\, dx = 0$		$(a,\ f(a))$ 변곡점
q	$\Rightarrow$	p

함수의 극한
Schema 8

인수와 그래프

[중요도 ★★★]

- $x-\alpha$를 인수로 갖는 다항함수 $f(x)$에 대해 다음이 성립한다.

S: $x=\alpha$에서 부호 변화

A: 있음	A^C: 없음
$x-\alpha$ 중복도 홀수	$x-\alpha$ 중복도 짝수

- 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대해 다음 관계가 성립한다.

S: $f(x)$와 $g(x)$의 관계

A: $x=\alpha$에서 만남	A^C: $x=\alpha$에서 접함
$f(x)-g(x)=(x-a)Q(x)$	$f(x)-g(x)=(x-a)^2Q(x)$

- 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 질문할 때

① $f(x)-g(x)$와 x축의 그래프 관계,
② $f(x)-g(x)$의 서로 다른 1차식 인수 개수

로 바꿔서 생각할 수 있다.

미분계수와 도함수
Schema 2

미분계수

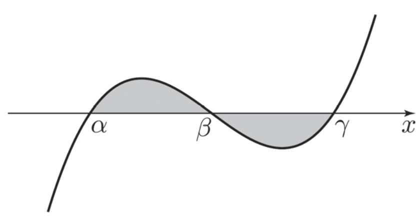
- 미분계수는 정점 $f(a)$를 기준으로 '변화율의 극한값'을 정의한 것으로
  다음 표현들은 추가적으로 미분가능을 판단해야 한다.

① $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{(a+h)-(a-h)}$

② $\lim_{x\to0}f'(x)$: 도함수의 극한값

③ $\lim_{n\to\infty}n\times\left\{f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right\}=\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$: 우미분계수

- x축과 평행한 직선과 3개의 교점을 갖는 삼차함수에서
  양극단 미분계수의 비는 간격 비이다.



→ $f'(\alpha)\ :\ f'(\gamma)\ =\ \beta-\alpha\ :\ \gamma-\beta$

- 삼차방정식
  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
  세 미분계수에 대한 역수의 합은 0이다.

→ $\frac{1}{f'(\alpha)}+\frac{1}{f'(\beta)}+\frac{1}{f'(\gamma)}=0$

미분의 활용
Schema 1

상수 조건

- 모든 근이 실근임이 규명된 상황에서 n차함수(도함수)와 $n+1$차함수(원함수) 그래프 관계에 있어 근의 평균(근평균)은 일정하다.

$pf)$

① $k=1$

$Let\ f(x)=ax^2+bx+c,\ f'(x)=2ax+b$

$f(x)=0$의 근평균 : $-\dfrac{b}{a}\times\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=0$의 실근 : $-\dfrac{b}{2a}$

$\therefore -\dfrac{b}{a}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{b}{2a}$

② $k=n$

$f(x)=ax^{n+1}+bx^n+\cdots$

$f'(x)=a(n+1)x^n+bnx^{n-1}+\cdots$

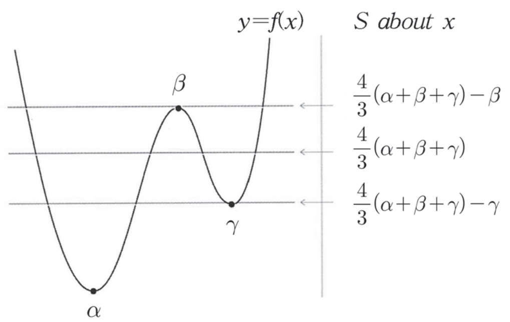
$f(x)$의 근평균 : $-\dfrac{b}{a}\times\dfrac{1}{n+1}$

$f'(x)$의 근평균 : $-\dfrac{bn}{a(n+1)}\times\dfrac{1}{n}$

$\therefore f(x)=0$의 근평균$=f'(x)=0$의 근평균

n차함수에서 n는 자연수 정의역이므로 수학적 귀납법에 의해 모든 상황에서 성립한다.

- 같은 원리로 사차함수와 이차함수 or 직선이 두 점에서 접하거나 교점이 3개 이상일 때 근의 S는 일정하고, 삼차함수와 동일하게 접하는 지점들은 서로 다른 근으로 생각한다.



동치 변형

예

두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2(a\neq 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)< g(x)) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m<a<M$이다.

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10\times(M-m)$의 값을 구하시오.

예

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)< mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값을 구하시오.

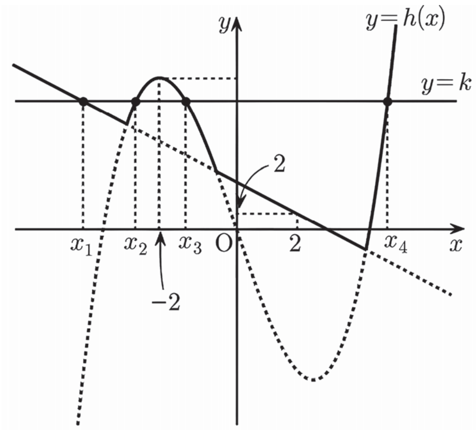
미분의 활용
Schema 3

동치 변형

Sol)

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$ 는 $y=\max(f(x),\ g(x))$와 동치 상황이고

$y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나는 상황을 작도해보면 다음과 같다.



① $y=g(x)$의 기울기는 음수, ② $f(-2)>g(-2)$

두 조건을 충족해야 서로 다른 네 점에서 만나므로 $-\frac{7}{2}<a<0$이다.

$\therefore\ m=-\frac{7}{2},\ M=0$

Ans)

$\therefore\ 10\times(M-m)=10\times\left\{0-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}=35$

Sol)

$h(x)=f(x)-mx$라 하면 $g(x)=\begin{cases} h(x) & (h(x)\geq 0) \\ 0 & (h(x)<0) \end{cases}$ 와 동치 상황이고

이는 $g(x)=\max(h(x),\ 0)$과 동치 상황이다.

$h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 미분가능 의심 지점에서
중복도가 모두 2 이상이어야 하므로 2 + 1이 불가능하고, 3중근을 가져야 한다.

→ $h(x)=f(x)-mx=(x-\alpha)^3=x^3-3x^2-(9+m)x-1$
→ 2차항 계수와 1차항 계수의 합 = 0

Ans)

$\therefore\ m=-12$