수열의 극한

# Level 1

## 유형 1 수열의 극한에 대한 기본성질

**출제유형** | 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

**출제유형잡기** | 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수) 일 때

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (단, $k$는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha+\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha-\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

### 001

2023학년도 9월 모평

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+2}{2}=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

### 002

2008학년도 6월 모평

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-3}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수열의 극한
Level 2

## 086

2025학년도 9월 모평 29번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$m$항까지의 합을 $S_m$이라 하자. 모든 자연수 $m$에 대하여

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1 + a_{10} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

## 087

2025학년도 9월 모평 29번 – 변형

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$m$항까지의 합을 $S_m$라 하자. 모든 자연수 $m$에 대하여

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(2n+m+1)}{n(n+1)(n+m)(n+m+1)}$$

일 때, $\dfrac{a_1 \times a_{10}}{a_5 \times a_{21}}$의 값을 구하시오.

수열의 극한
Level 3

**098** 2025학년도 11월 수능 29번

등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\ \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 $m$의 값의 합을 구하시오. [4점]

**099** 2025학년도 11월 수능 29번 – 변형

등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-2a_n)=2,\ \sum_{n=1}^{\infty}(2|a_n|-a_n)=10$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^k}{2}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{1000}$$

을 만족시키는 모든 홀수인 자연수 $m$의 값의 합을 구하시오. [4점]

미분법
# Level 1

## 유형 1 지수함수와 로그함수의 극함

**출제유형** | 무리수 $e$의 정의를 이용하여 함수의 극한값을 구하는 문제가 출제된다.

**출제유형잡기** | 무리수 $e$의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

(1) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

(단, $a>0$, $a\neq1$)

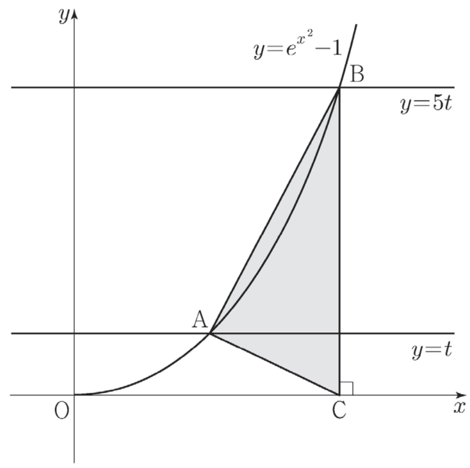
(3) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

(단, $a>0$, $a\neq1$)

### 102

2025학년도 6월 평가원

양수 $t$에 대하여 곡선 $y=e^{x^2}-1$ $(x\geq0)$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 $x$축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은?




① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$

③ $5(\sqrt{5}-1)$ ④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$

⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$

### 103

2024학년도 6월 모평

$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a$와 $b$는 0이 아닌 상수이다.)

① 9 ② 10 ③ 11

④ 12 ⑤ 13

미분법
Level 2

**320** 2025학년도 6월 모평 28번

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 $t$에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 $x$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은? (단, $a$는 상수이다.) [4점]

① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$ ④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$

**321** 2025학년도 6월 모평 28번 – 변형

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-1)^3(x-a-3)e^x & (x\geq a)\\ e^{3a}(x-a)+3e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 $t$에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 $x$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=18$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+3))}{g'(f(a+4))}$의 값은? (단, $a$는 상수이다.) [4점]

① $\dfrac{1}{2}e^4$ ② $\dfrac{3}{2}e^4$ ③ $2e^4$ ④ $3e^4$ ⑤ $e^5$

미분법
Level 3

**354** 2025학년도 11월 수능 30번

두 상수 $a\,(1 \le a \le 2)$, $b$에 대하여 함수
$f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi a + b$
(나) $f'(0) = f'(t)$인 양수 $t$의 최솟값은 $4\pi$이다.

함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극대인 $\alpha$의 값 중 열린구간 $(0,\ 4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 $A$라 하자. 집합 $A$의 원소의 개수를 $n$, 집합 $A$의 원소 중 가장 작은 값을 $\alpha_1$이라 하면, $n\alpha_1 - ab = \dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

**355** 2025학년도 11월 수능 30번 – 변형

두 상수 $a$, $b(b>0)$에 대하여 함수
$f(x) = \cos(ax + \sin(x+b))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 1$, $f(\pi) = a\pi - \dfrac{\pi}{2}$
(나) $f'(0) = f'(t)$이고 $f(0) > f(t) > 0$인 양수 $t$가 $0$과 $\pi$ 사이에 존재한다.

함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극값을 갖는다고 할 때, 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에 속하는 모든 $\alpha$의 값의 집합을 $A$라 하자. 집합 $A$의 원소의 개수를 $n$, 집합 $A$의 원소 중 가장 큰 값을 $\alpha = \alpha_m$이라 하면, $\dfrac{n \times \alpha_m}{a} = \dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

적분법

# Level 1

## 유형 1 여러 가지 함수의 부정적분

**출제유형** | 여러 가지 함수의 부정적분을 구하는 문제가 출제된다.

**출제유형잡기** | 함수 $y=x^a$ ($a$는 실수), 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 부정적분을 이용하여 문제를 해결한다.

### 406

함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6^x-3\times2^x-3^x+3$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M-m$의 값은?

① $-\dfrac{5}{\ln6}+\dfrac{3}{\ln2}+\dfrac{2}{\ln3}-3$

② $-\dfrac{5}{\ln6}+\dfrac{3}{\ln2}+\dfrac{2}{\ln3}+3$

③ $\dfrac{6}{\ln6}-\dfrac{3}{\ln2}-\dfrac{2}{\ln3}+3$

④ $\dfrac{5}{\ln6}-\dfrac{3}{\ln2}-\dfrac{2}{\ln3}+1$

⑤ $\dfrac{5}{\ln6}-\dfrac{3}{\ln2}-\dfrac{2}{\ln3}+3$

### 407

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\sin x$일 때, $f(\pi)-f(0)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

적분법
Level 2

**510** 2025학년도 11월 수능 28번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = -x + e^{1-x^2}$$

이다. 양수 $t$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$ ④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

**511** 2025학년도 11월 수능 28번 – 변형

양의 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = 5\ln x + 2^{\ln x} - 7$$

이다. 양수 $t$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(t)=\int_1^{2e-1}|f(x)-g(x)|\,dx$ 는 $t=\alpha$에서 최솟값을 갖는다. $f(e)=f(1)e$일 때, $\int_1^{\alpha}\frac{f(x)}{x^2}\,dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{\ln 2}-\frac{9}{2}$ ② $\frac{2}{\ln 2}-\frac{9}{2}$ ③ $\frac{1}{\ln 2}-\frac{5}{2}$ ④ $\frac{2}{\ln 2}-\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2}$

적분법
Level
3

**546** 2025학년도 9월 모평 30번

양수 $k$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

| |
|---|
| 모든 실수 $x$에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다. |

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이고, $p$와 $q$는 유리수이다.) [4점]

**547** 2025학년도 9월 모평 30번 – 변형

양수 $k$ $\left(0<k<\frac{3}{2}\right)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x-k)e^{-|x|}$$

라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g_1(k)$, 최댓값을 $g_2(k)$라 하자.

| |
|---|
| 모든 실수 $x$에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다. |

$g_1\left(\frac{1}{4}\right)-g_1\left(\frac{1}{2}\right)+g_2\left(\frac{1}{4}\right)=pe^q$일 때, $\frac{p}{q^2}$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 유리수이다.) [4점]