

공통수학 2 중간고사 영역 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 영역

정답

1	6	2	②	3	②	4	6	5	125
6	2	7	④	8	⑤	9	13	10	④
11	②	12	①	13	①	14	②	15	②
16	⑤	17	④	18	②	19	⑤	20	②
21	22	22	11	23	②	24	③	25	③
26	①	27	③	28	③	29	④	30	④

해설

27. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = b^2$ 을 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형은 중심이 $(a, a-2)$ 인 원이다.

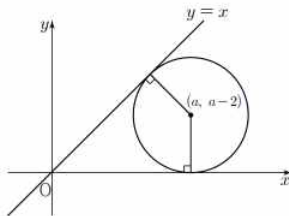
또한 이 원이 직선 $y=x$ 과 접하므로

$$\frac{|a-(a-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = a-2$$

$$a = 2 + \sqrt{2}$$

$$b = a-2 = \sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a^2 - 4b = 6$$



19. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기

그림과 같이 세 점 O, A, B 를 지나는 원 C 의

방정식은 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ 이므로

선분 OA 는 원 C 의 지름이다.

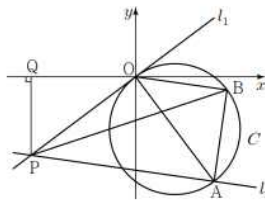
직선 l_1 은 직선 OA 와 수직이고 점 O 를 지나므로

$$\text{직선 } l_1 \text{의 방정식은 } y = \frac{3}{4}x \text{ 이다.}$$

점 A 를 지나고 직선 OB 와

평행한 직선을 l_2 라 하면, 두 직선 l_1, l_2 가

만나는 점이 두 삼각형 OAB 와 OPB 의 넓이가 같게 되는 점 P 이다.



직선 l_2 의 기울기와 직선 OB 의 기울기는 같고,

직선 l_2 는 점 A 를 지나므로

$$y - (-8) = -\frac{1}{7}(x - 6)$$

$$\text{즉, 직선 } l_2 \text{의 방정식은 } y = -\frac{1}{7}x - \frac{50}{7} \text{ 이다.}$$

점 P 는 두 직선 l_1, l_2 가 만나는 점이므로

점 P 의 x 좌표는

$$\text{방정식 } -\frac{1}{7}x - \frac{50}{7} = \frac{3}{4}x \text{의 근이다.}$$

즉, 점 P 의 x 좌표는 -8 이다.

따라서 선분 QO 의 길이는 $|-8|$ 이다.

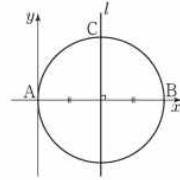
$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{4}x, g(x) = -\frac{1}{7}x - \frac{50}{7}$$

$$k = -8 \text{이므로}$$

$$f(2k) + g(-1) = -19$$

21. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 추론하기

i) $a=0$ 일 때, 직선 l 의 방정식은 $x = \frac{3}{2}$



$$\overline{OC} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

ii) $a \neq 0$ 일 때,

$$\angle AOB = \angle ACB = 90^\circ \text{ 이므로}$$

네 점 A, O, B, C 가 한 원 위에 있고,

선분 AB 는 이 원의 지름이다.

이 원의 방정식은

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 9}{4} \quad \text{--- ㉠}$$

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 점 C 는 선분 AB 의 수직이등분선 l 과 원이 만나는 점이다.

$$\text{직선 } l \text{의 방정식은 } y - \frac{a}{2} = \frac{3}{a}\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{--- ㉡}$$

㉠, ㉡에 의해

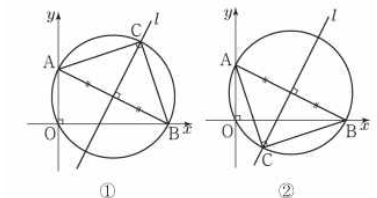
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{a^2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{3+a}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3-a}{2}$$

㉡에 대입하면 점 C 의 좌표는

$$C\left(\frac{3+a}{2}, \frac{3+a}{2}\right) \text{ 또는 } C\left(\frac{3-a}{2}, -\frac{3-a}{2}\right)$$



$$\text{㉠ } C\left(\frac{3+a}{2}, \frac{3+a}{2}\right) \text{일 경우}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{3+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+a}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \left| \frac{3+a}{2} \right|$$

$$-1 \leq a \leq 2(a \neq 0) \text{이므로}$$

$$\sqrt{2} \leq \overline{OC} < \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{또는}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} < \overline{OC} \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{㉡ } C\left(\frac{3-a}{2}, -\frac{3-a}{2}\right) \text{일 경우}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{3-a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3-a}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \left| \frac{3-a}{2} \right|$$

$$-1 \leq a \leq 2(a \neq 0) \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \overline{OC} < \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{또는}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} < \overline{OC} \leq 2\sqrt{2}$$

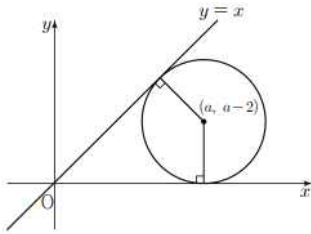
$$\text{i), ii)에 의해 } M = \frac{5}{2}\sqrt{2}, m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{M}{m} = 5$$

27. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = b^2$ 을 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 도형은 중심이 $(a, a-2)$, 반지름이 $a-2$ ($a > 2$)인 원이다.
또한 이 원이 직선 $y=x$ 와 접하므로
$$\frac{|a-(a-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = a-2$$

 $a=2+\sqrt{2}$
 $b=a-2=\sqrt{2}$
따라서 $a^2-4b=6$



28. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

직선 l_1 의 기울기를 m 이라 하면
직선 l_1 의 방정식은
 $y-1=m(x-1)$
직선 l_1 이 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 접하므로
이차방정식 $x^2-mx+m-1=0$ 의 판별식을
 D 라 할 때
 $D=(-m)^2-4(m-1)=(m-2)^2=0$
즉, $m=2$
직선 l_1 의 방정식은 $y=2x-1$ 이므로
 $Q(0, -1)$

두 직선 l_1, l_2 가 서로 수직이므로 직선 l_2 의
기울기는 $-\frac{1}{2}$

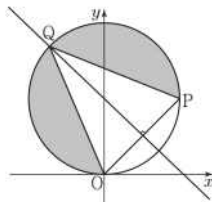
직선 l_2 의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 이고
 $y=x^2$ 과 연립하여 정리하면
 $2x^2+x-3=0$

$(x-1)(2x+3)=0$ 이므로 $R(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

$$\begin{aligned}\triangle PRQ &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25}{8}\end{aligned}$$

따라서 $40S=125$

29. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기



직선 $y=mx-m+1=m(x-1)+1$ 은
 m 의 값에 관계없이 점 $(1, 1)$ 을 지난다.
점 P 의 x 좌표는 점 Q 의 x 좌표보다 크므로
 $P(1, 1)$

$S_1=S_2$ 이므로 $\overline{PQ}=\overline{OQ}$
삼각형 PQO 가 이등변삼각형이므로
선분 OP 의 수직이등분선은 점 Q 를 지난다.
선분 OP 를 수직이등분하는 직선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{즉, } y=-x+1 \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $x^2+(y-1)^2=1$ 에 대입하여 정리하면
 $x^2+(-x+1-1)^2=1$

$$\text{즉, } x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

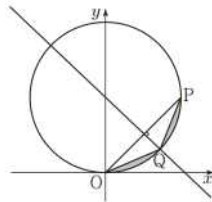
$$Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ 또는 } Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

m 은 직선 PQ 의 기울기이므로

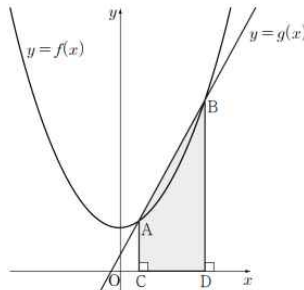
$$m=1-\sqrt{2} \text{ 또는 } m=1+\sqrt{2}$$

따라서 모든 실수 m 의 값의 합은 2

참고로 $m=1+\sqrt{2}$ 일 때의 그림은 아래와 같다.



17. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 교점 이해하기



두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의
 x 좌표를 구하면

$$x^2+n^2=2nx+1, x^2-2nx+n^2-1=0 \text{ 이고}$$

$$x=n-1 \text{ 또는 } x=n+1 \text{ 이다.}$$

따라서

점 $A(n-1, 2n^2-2n+1)$, $B(n+1, 2n^2+2n+1)$
라 하면 $C(n-1, 0)$, $D(n+1, 0)$ 이다.

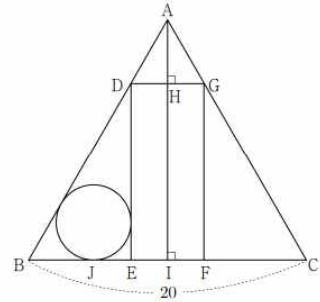
사각형 $ACDB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD}) \times \overline{CD} = \frac{1}{2}(4n^2+2) \times 2 = 4n^2+2 \text{ 이다.}$$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n 은

$$4n^2+2=66, n^2=16 \text{ 이므로 } n=4 \text{ 이다.}$$

18. [출제의도] 이차함수의 최대값 이해하기



점 A 에서 선분 DG , 선분 BC 에 내린 수선의 발을
각각 H, I 라 하고, 원과 선분 BC 와의 교점을 J 라
하자.

선분 DH 의 길이를 a ($0 < a < 10$)라 하면 선분
 AH 의 길이는 $\sqrt{3}a$ 이고 선분 DE 의 길이는
 $10\sqrt{3}-\sqrt{3}a$ 이다.

직사각형 $DEFG$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S=2a(10\sqrt{3}-\sqrt{3}a)=-2\sqrt{3}(a-5)^2+50\sqrt{3}$$

따라서 $a=5$ 일 때 직사각형 $DEFG$ 의 넓이는 최대
이다.

원의 반지름의 길이를 b 라 하면

$$\overline{EI}=a, \overline{JE}=b, \overline{BJ}=\sqrt{3}b \text{ 이므로}$$

$$a+(1+\sqrt{3})b=10 \text{ 이다.}$$

$$a=5 \text{ 일 때 } b=\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2} \text{ 이므로 원의 둘레는}$$

$$5(\sqrt{3}-1)\pi \text{ 이다.}$$

$$p, q \text{는 유리수이므로 } p=5, q=-5 \text{ 이고}$$

$$p^2+q^2=50 \text{ 이다.}$$

α, β 는 $x^2-x-k=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-k$ 이다.

$\alpha > 0, \beta < 0$ 이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\alpha^3, S_2=-\frac{1}{2}\beta^3 \text{ 이다.}$$

$$S_1-S_2=\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)=20 \text{ 이고}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=40 \text{ 이다.}$$

$$\alpha+\beta=1 \text{ 에서 } \alpha\beta=-13 \text{ 이므로 } k=13$$

27. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제 해결하기

A 의 x 좌표를 α , B 의 x 좌표를 β 라고 하자.

α, β 는 $x^2-x-k=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-k$ 이다.

$\alpha > 0, \beta < 0$ 이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\alpha^3, S_2=-\frac{1}{2}\beta^3 \text{ 이다.}$$

$$S_1-S_2=\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)=20 \text{ 이고}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=40 \text{ 이다.}$$

$$\alpha+\beta=1 \text{ 에서 } \alpha\beta=-13 \text{ 이므로 } k=13$$

14. [출제의도] 다항식의 연산을 활용한 실생활 문제 해결하기

물체 A와 물체 B의 질량을 각각 m_A , m_B 라 하고
물체 A와 물체 B의 속력을 각각 v_A , v_B 라 하자.
물체 A의 질량이 물체 B의 질량의 3배이므로
 $m_A = 3m_B$ 이다.

물체 A의 속력이 물체 B의 속력의 $\frac{1}{2}$ 배이므로
 $v_A = \frac{1}{2}v_B$ 이다.

물체 A와 물체 B의 구심력의 크기가 같으므로
 $\frac{m_A(v_A)^2}{r_A} = \frac{m_B(v_B)^2}{r_B}$ 이다.

$$\frac{3m_B\left(\frac{1}{2}v_B\right)^2}{r_A} = \frac{m_B(v_B)^2}{r_B} \text{ 이므로}$$

$$\frac{3 \times \frac{1}{4}}{r_A} = \frac{1}{r_B} \text{ 이다. 따라서 } \frac{r_A}{r_B} = \frac{3}{4} \text{ 이다.}$$

17. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 추론하기

이차방정식

$x^2 - (a+4)x + 3a + 3 = (x-3)\{x - (a+1)\} = 0$ 의
근은 $x=3$, $x=a+1$ 이다. $0 < a < 2$ 이므로
 $A(a+1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3a+3)$ 이다.

삼각형 ABC의 밑변의 길이 $\overline{AB} = 2-a$ 이고

높이 $\overline{OC} = 3a+3$ 이다.

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}(2-a)(3a+3) = -\frac{3}{2}(a-2)(a+1)$$

$$= -\frac{3}{2}(a^2 - a - 2)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8} \text{ 이다.}$$

따라서 $0 < a < 2$ 에서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은

$$a = \frac{1}{2} \text{ 일 때 } \frac{27}{8} \text{ 이다.}$$

20. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 도형 문제 해결하기

정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$ 이다.

$\triangle ABE$ 는 이등변삼각형이고 $\angle BAE = 108^\circ$ 이므로
 $\angle ABE = 36^\circ$ 이다.

$\triangle BAC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle ABC = 108^\circ$ 이므로
 $\angle BAC = 36^\circ$ 이다.

$\angle BAP = \angle ABP = 36^\circ$ 이므로 $\angle APB = 108^\circ$ 이고
 $\angle APE = 72^\circ$ 이고 $\angle EAP = 72^\circ$ 이다.

$\triangle APE$ 는 이등변삼각형이므로 $\overline{PE} = 1$ 이다.

$\overline{BE} : \overline{PE} = \overline{PE} : \overline{BP}$

$$x : 1 = 1 : (x-1)$$

$$x(x-1) = 1, \quad x^2 - x - 1 = 0 \text{ 이다.}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 이다.}$$

$$x^2 = x+1$$

$$x^3 = (x+1)x = 2x+1$$

$$x^4 = (2x+1)x = 3x+2$$

$$x^5 = (3x+2)x = 5x+3$$

$$x^6 = (5x+3)x = 8x+5$$

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$$

$$= 1 + (-x+x^2) + x^2(-x+x^2) + x^4(-x+x^2) + x^6(-x+x^2)$$

$$= 1 + 1 + x^2 + x^4 + x^6$$

$$= 2 + (x+1) + (3x+2) + (8x+5)$$

$$= 12x+10$$

$$= 12 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 10$$

$$= 16+6\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$p=16, \quad q=6 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } p+q=22 \text{ 이다.}$$

15. [출제의도] 도형의 이동을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

직선 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼

평행이동한 직선은 $y = -\frac{1}{2}(x-a) - 3$ 이고 이를

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 l 은

$$x = -\frac{1}{2}(y-a) - 3, \quad \text{즉 } 2x+y-a+6=0$$

직선 l 이 원에 접하므로 원의 중심 $(-1, 3)$ 에서

$$\text{직선 } l \text{까지의 거리 } d = \frac{|-2+3-a+6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

따라서 $a=2$, 12이므로 모든 a 값의 합은 14

16. [출제의도] 점과 직선사이의 거리를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

레이더의 위치를 원점으로 하고 동서를 x 축,
남북을 y 축으로 하면 본부는 $(-30, 20)$,

A지점은 $(-30, -40)$, B지점은 $(50, 0)$

물체가 지나간 경로의 직선의 방정식은

$$x-2y-50=0 \text{ 이므로}$$

이 물체가 본부와 가장 가까워졌을 때의 거리는

$$\frac{|-30-40-50|}{\sqrt{5}} = 24\sqrt{5}$$

18. [출제의도] 이차함수와 직선의 위치관계를 이용하여 추론하기

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α , β
($\alpha < 0 < \beta$)라 하면

α , β 는 이차방정식 $-\frac{x^2}{2} + k = mx$ 의 근이

므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
 $\alpha + \beta = -2m$, $\alpha\beta = -2k$

두 점 A, B는 직선 $y=mx$ 위의 점이므로
 $A(\alpha, m\alpha)$, $B(\beta, m\beta)$

$$\overline{OA} = -\alpha \times \sqrt{1+m^2}, \quad \overline{OB} = \beta \times \sqrt{1+m^2}$$

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}}$$

$$= \frac{1}{-\alpha \times \sqrt{1+m^2}} + \frac{1}{\beta \times \sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta \times \sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{4m^2 + 8k}}{-2k \times \sqrt{1+m^2}}$$

실수 m 의 값에 관계없이 $\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}}$ 이 갖는

일정한 값을 t 라 하자.

$$t^2 = \frac{4m^2 + 8k}{(2k \times \sqrt{1+m^2})^2} \text{ 이므로}$$

이를 정리하면

$$4(1-k^2t^2)m^2 + 4(2k-k^2t^2) = 0 \dots\dots \text{㉠}$$

따라서 ㉠이 m 에 대한 항등식이므로 $k = \frac{1}{2}$
이다.

$$\text{이때 } \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{1}{k} \text{ 이다.}$$

$$f(m) = \sqrt{1+m^2}, \quad g(k) = 8k, \quad p = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$f(p) \times g(p) = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \times 4 = 2\sqrt{5}$$

20. [출제의도] 원의 방정식과 삼각형 무게중심의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 C 위의 점 P(a, b)에 대하여 삼각형 PAB의
무게중심의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{a+4+1}{3}, \quad y = \frac{b+3+7}{3}$$

$$a = 3x - 5, \quad b = 3y - 10 \dots \text{㉠}$$

점 P는 원 C 위의 점이므로

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 = 4 \dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

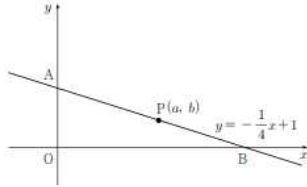
$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

직선 AB의 방정식은 $4x+3y-25=0$ 이므로 삼각형
PAB의 무게중심이 그리는 원의 중심 (2, 4)와 직
선 AB사이의 거리는 1

구하고자 하는 거리의 최솟값은 삼각형 PAB의
무게중심이 그리는 원과 직선 AB사이의 최단거리

$$\text{이므로 } 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

16. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 최대 최소 문제 해결하기



점 $P(a, b)$ 는 직선 $y = -\frac{1}{4}x + 1$ 위의 점이므로

$$b = -\frac{1}{4}a + 1 \text{이다.}$$

$$b = -\frac{1}{4}a + 1 \text{을 주어진 식에 대입하면}$$

$$\begin{aligned} a^2 + 8b &= a^2 + 8\left(-\frac{1}{4}a + 1\right) \\ &= a^2 - 2a + 8 \\ &= (a-1)^2 + 7 \end{aligned}$$

이다. 그런데 $A(0, 1)$, $B(4, 0)$ 이므로 $0 \leq a \leq 4$ 이다. 따라서 $a=1$ 일 때, $a^2 + 8b$ 의 최솟값은 7이다.

[다른 풀이]

$a = -4b + 4$ 를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} a^2 + 8b &= (-4b + 4)^2 + 8b \\ &= 16b^2 - 32b + 16 + 8b \\ &= 16b^2 - 24b + 16 \\ &= 16\left(b^2 - \frac{3}{2}b + \frac{9}{16}\right) + 7 \\ &= 16\left(b - \frac{3}{4}\right)^2 + 7 \end{aligned}$$

이다. 그런데 $A(0, 1)$, $B(4, 0)$ 이므로 $0 \leq b \leq 1$ 이다.

따라서 $b = \frac{3}{4}$ 일 때, $a^2 + 8b$ 의 최솟값은 7이다.

19. [출제의도] 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식 문제 해결하기

근과 계수의 관계에 따라 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 2$ 이다.

직각삼각형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 k 라 하면



$$\begin{aligned} \alpha : \beta &= \alpha - k : k \\ k &= \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 정사각형의 넓이 $k^2 = \frac{1}{4}$ 과 둘레의 길이 $4k = 2$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은

$$4\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

이다. 따라서 $m + n = -9 + 2 = -7$ 이다.

[다른 풀이]

정사각형의 넓이 $k^2 = \frac{1}{4}$ 과 둘레의 길이 $4k = 2$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합이 $\frac{9}{4}$ 이고 곱이 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$4x^2 - 9x + 2 = 0$$

따라서 $m + n = -9 + 2 = -7$ 이다.

19. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이용하여 추론하기

직선 l 의 방정식은 $y = \sqrt{3}x$ 이고

직선 m 의 방정식은 $y = -\sqrt{3}x$ 이다.

원 위의 제1사분면에 있는 점을 $P(a, b)$ 라 하면 $a > 0$, $b > 0$ 이고 $a^2 + b^2 = r^2$ 이다.

점 P 에서 x 축과 두 직선 l , m 에 내린 수선의 발이 각각 A , B , C 이므로

$$\overline{PA} = b$$

$$\overline{PB} = \frac{|\sqrt{3}a - b|}{2}$$

$$\overline{PC} = \frac{|\sqrt{3}a + b|}{2}$$

$$\text{따라서 } \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \frac{3}{2}r^2$$

직선 OA 의 기울기를 m 이라 하면 직선 OA 의 방정식은 $y = mx$, 즉 $mx - y = 0$ 이므로 점 G 와 직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{|8m - 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$$

이고 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 와 같다. 즉,

$$\frac{|8m - 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{|8m - 4|}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{m^2 + 1}$$

이다. 양변을 제곱하면

$$(8m - 4)^2 = 8(m^2 + 1)$$

$$7m^2 - 8m + 1 = 0$$

$$(7m - 1)(m - 1) = 0$$

$$m = \frac{1}{7} \text{ 또는 } m = 1$$

이때 직선 OG 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $m < \frac{1}{2}$ 을 만족

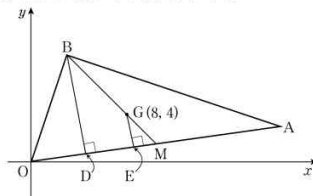
시키는 직선 OA 의 기울기는 $\frac{1}{7}$ 이다.

따라서 $p = 2\sqrt{2}$, $q = \frac{1}{7}$, $f(m) = |8m - 4|$ 이므로

$$\frac{f(q)}{p^2} = \frac{\left|8 \times \frac{1}{7} - 4\right|}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{\frac{20}{7}}{8} = \frac{5}{14}$$

18. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 직선의 기울기를 추론한다.

선분 OA 의 중점을 M , 두 점 B , G 에서 직선 OA 에 내린 수선의 발을 각각 D , E 라 하자.



점 G 가 삼각형 OAB 의 무게중심이므로

$$\overline{BG} : \overline{GM} = 2 : 1$$

이고, 삼각형 MBD 와 삼각형 MGE 는 서로 닮음이므로

$$\overline{BD} : \overline{GE} = 3 : 1$$

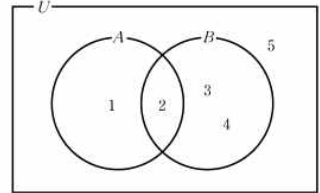
이다.

점 B 와 직선 OA 사이의 거리 $\overline{BD}$ 가 $6\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{GE} = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

28. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 부분집합의 개수를 추론한다.

주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$A \cap B = \{2\}$ 이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $2 \in X$ 인 경우

이때 $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시킨다.

그러므로 집합 X 는 전체집합 U 의 2가 아닌 원소인 1, 3, 4, 5의 일부 또는 전부를 원소로 갖거나 어느 것도 원소로 갖지 않을 수 있다. 따라서 $2 \in X$ 인 경우의 집합 X 의 개수는 집합

$\{1, 3, 4, 5\}$

의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^4 = 16$$

(ii) $2 \notin X$ 인 경우

2를 제외한 집합 A 의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B 의 원소는 3, 4이므로 $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키려면 집합 X 는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.

이때 $1 \in X$, $3 \in X$, $4 \notin X$ 인 경우와 $1 \in X$, $3 \notin X$, $4 \in X$ 인 경우와 $1 \in X$, $3 \in X$, $4 \in X$ 인 경우의 3가지 경우가 있다.

이때 각 경우에서 집합 X 는 집합 $(A \cup B)^c$ 의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있다.

따라서 $2 \notin X$ 인 경우의 집합 X 의 개수는

$$3 \times 2 = 6$$

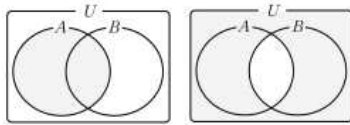
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수는 $16 + 6 = 22$

28. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 구하는 문제를 해결한다.

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \text{ 이므로}$$

$$(A \cap B)^c = \{1, 2, 4\}$$

두 집합 $A, (A \cap B)^c$ 을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.

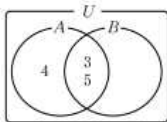


두 집합 $A, (A \cap B)^c$ 의 공통인 원소는 4이고, 두 그림에서 공통으로 색칠된 부분이 집합 $A - B$ 이므로 $A - B = \{4\}$ 이다.

또한

$$A \cap B = A - (A - B) = \{3, 5\}$$

$$U = (A \cap B) \cup (A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



이때 $4 \notin B$ 이고, $3 \in B, 5 \in B$ 이다.

조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여

$$\begin{aligned} (A \cup X) - B &= (A \cup X) \cap B^c \\ &= (A \cap B^c) \cup (X \cap B^c) \\ &= (A - B) \cup (X - B) \\ &= \{4\} \cup (X - B) \end{aligned}$$

$4 \in (A - B)$ 이므로 집합 $(A \cup X) - B$ 의 원소의 개수가 1이 되려면

집합 $X - B$ 가 공집합이 되거나 집합 $\{4\}$ 가 되어야 한다.

(i) $X = \{1\}, X = \{2\}, X = \{3\}, X = \{5\}$ 일 때,

집합 $X - B$ 는 공집합이어야 하므로

1, 2, 3, 5 모두 집합 B 의 원소이어야 한다.

(ii) $X = \{4\}$ 일 때,

$X - B = \{4\}$ 이므로 집합 $\{4\} \cup (X - B)$ 는 집합 $\{4\}$ 가 되어 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $B = \{1, 2, 3, 5\}$ 이다.

따라서 $B = \{1, 2, 3, 5\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은 $1+2+3+5=11$ 이다.

21. [출제의도] 집합의 성질을 활용하여 문제해결하기

집합 A_k 는 전체집합 U 의 부분집합이므로

x 는 20 이하의 자연수이고 $y - k$ 는 30의 약수이다.

$y \in U$ 이므로 $y - k < 30$ 이고 $x \neq 1$.

$x \in U$ 이므로 $x \neq 30$

$y - k$ 와 x 사이의 관계는 아래 표와 같다.

$y - k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

$$A_k \subset \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$$

$$\frac{30-x}{5} \in U \text{에서 } 30-x \text{는 } 5 \text{의 배수이므로}$$

$$B = \{5, 10, 15, 20\}$$

$$(A_k \cap B^c) \subset \{2, 3, 6\}$$

(i) $2 \in (A_k \cap B^c)$ 일 때

$$\begin{aligned} x = 2, y - k = 15 \text{이고 } y = 15 + k \leq 20 \\ k \leq 5 \end{aligned}$$

(ii) $3 \in (A_k \cap B^c)$ 일 때

$$\begin{aligned} x = 3, y - k = 10 \text{이고 } y = 10 + k \leq 20 \\ k \leq 10 \end{aligned}$$

(iii) $6 \in (A_k \cap B^c)$ 일 때

$$\begin{aligned} x = 6, y - k = 5 \text{이고 } y = 5 + k \leq 20 \\ k \leq 15 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$k \leq 5 \text{일 때 } A_k \cap B^c = \{2, 3, 6\}$$

$$5 < k \leq 10 \text{일 때 } A_k \cap B^c = \{3, 6\}$$

$$10 < k \leq 15 \text{일 때 } A_k \cap B^c = \{6\}$$

$$n(A_k \cap B^c) = 1 \text{이므로 } 10 < k \leq 15$$

따라서 모든 자연수 k 의 개수는 5

20. [출제의도] 집합의 원소 추론하기

ㄱ. $A \cap B = \{2, 5\}$ 에서 $2 \in A, 5 \in A$

2와 5가 k 의 약수이므로 k 는 10의 배수이다.

k 는 18 이하의 자연수이므로 $k = 10$ (참)

ㄴ. $A \cap B = \{5, 6\}$ 에서 $5 \in A, 6 \in A$

5와 6이 k 의 약수이므로 k 는 30의 배수이다.

k 는 18 이하의 자연수이므로 존재하지 않는다.

(거짓)

ㄷ. (i) $A \cap B = \{2, 5\}$ 일 때,

$$k = 10 \text{이고 } A = \{1, 2, 5, 10\} \text{이므로}$$

집합 $A - B = \{1, 10\}$ 의 모든 원소의 합은 11

(ii) $A \cap B = \{2, 6\}$ 일 때, $2 \in A, 6 \in A$

2와 6이 k 의 약수이므로 k 는 6의 배수이다.

k 는 18 이하의 자연수이므로

가능한 k 는 6, 12, 18이다.

$k = 6$ 인 경우,

$$A = \{1, 2, 3, 6\} \text{이므로}$$

집합 $A - B = \{1, 3\}$ 의 모든 원소의 합은 4

$k = 12$ 인 경우,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{이므로 집합}$$

$A - B = \{1, 3, 4, 12\}$ 의 모든 원소의 합은 20

$k = 18$ 인 경우,

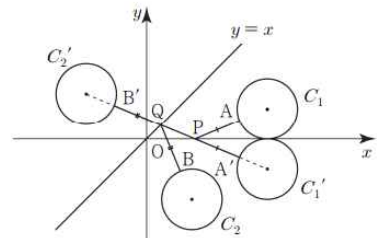
$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \text{이므로 집합}$$

$A - B = \{1, 3, 9, 18\}$ 의 모든 원소의 합은 31

∴ 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k 의 값의 합은 $10+18=28$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

16. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기



원 C_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1' , 원 C_2 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C_2' 이라 하면

$$C_1' : (x-8)^2 + (y+2)^2 = 4,$$

$$C_2' : (x+4)^2 + (y-3)^2 = 4.$$

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' ,

점 B 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 두 점 A', B' 은 각각 원 C_1' , 원

C_2' 위의 점이다.

$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{QB} = \overline{QB'}$$

$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 값은 네 점 A', P, Q, B' 이

두 원 C_1', C_2' 의 중심을 연결한 선분 위에

있을 때 최소이고, 두 원 C_1', C_2' 의 반지름의

길이가 모두 2이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$$

$$\overline{A'B'} = \sqrt{\{8 - (-4)\}^2 + \{(-2) - 3\}^2} - 4$$

$$= 13 - 4 = 9$$

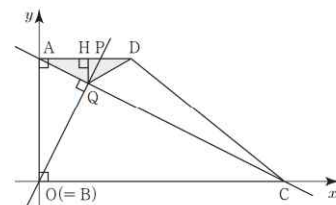
$$= 13 - 4 = 9$$

$$= 13 - 4 = 9$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 9

17. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

좌표평면에서 점 B 를 원점으로 하고 점 A 의 좌표를 $(0, 4)$, 점 C 의 좌표를 $(8, 0)$ 이라 하자.



$$\text{직선 } AC \text{의 방정식은 } y = -\frac{1}{2}x + 4$$

점 $B(0, 0)$ 을 지나고 직선 AC 에 수직인 직선

BP 의 방정식은 $y = 2x$

점 D 의 좌표를 $(t, 4)$ 라 하면

점 P 는 선분 AD 를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\text{점 } P \text{의 좌표는 } \left(\frac{2}{3}t, 4\right)$$

점 P 는 직선 BP 위의 점이므로

$$4 = 2 \times \frac{2}{3}t, t = 3$$

점 P 의 좌표는 $(2, 4)$, 점 D 의 좌표는 $(3, 4)$

점 Q 는 두 직선 AC, BP 가 만나는 점이므로

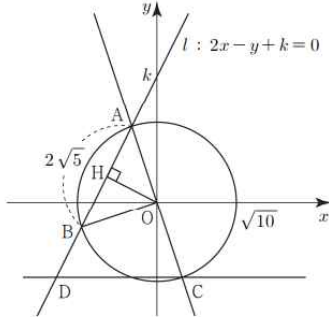
$$\text{점 } Q \text{의 좌표는 } \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

점 Q 에서 선분 AD 에 내린 수선의 발을 H 라

하면 삼각형 AQD 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{QH} = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(4 - \frac{16}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

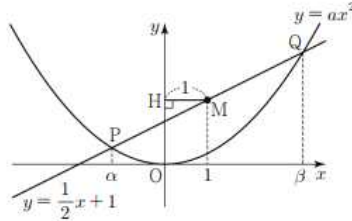
19. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기



직선 l 의 방정식을 $2x - y + k = 0$ 이라 하고
원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라
하면 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을
수직이등분하므로 $AH = \sqrt{5}$
 $OA = \sqrt{10}$ 이고 삼각형 AHO 가
직각삼각형이므로 $OH = \sqrt{5}$
 OH 는 원점 O 와 직선 l 사이의 거리와
같으므로 $\frac{|2 \times 0 - 1 \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$

$k = 5$
두 점 A, B 는 직선 $l: 2x - y + 5 = 0$ 이
원 $x^2 + y^2 = 10$ 과 만나는 점이므로
 $x^2 + (2x + 5)^2 = 10, x^2 + 4x + 3 = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = -3$
두 점 A, B 의 좌표는
각각 $(-1, 3), (-3, -1)$ 이고
점 C 는 점 A 를 원점에 대하여 대칭이동한 점과
일치하므로 점 C 의 좌표는 $(1, -3)$
점 C 를 지나고 x 축과 평행한 직선이 직선 l 과
만나는 점 D 의 좌표는 $(-4, -3)$
 $a = -4, b = -3$
따라서 $a + b = -7$

16. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 문제 해결하기



$ax^2 = \frac{1}{2}x + 1$ 에서 $2ax^2 - x - 2 = 0$
두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라
하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에서
 $\alpha + \beta = \frac{1}{2a}, \alpha\beta = -\frac{1}{a} \dots \textcircled{1}$
점 M 의 x 좌표는 $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{4a} = 1, a = \frac{1}{4}$
 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -4$
 $P\left(\alpha, \frac{\alpha}{2} + 1\right), Q\left(\beta, \frac{\beta}{2} + 1\right)$ 이므로
 $PQ = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2}$
 $= \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(\beta - \alpha)^2}$
 $= \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = 5$
따라서 선분 PQ 의 길이는 5

18. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기

원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = ax$ 가 만나는 점 A
의 좌표는
 $A\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}, a \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)$ 이다.
점 A 를 지나고 직선 $y = ax$ 에 수직인 직선을 l
이라 하자. 직선 l 의 방정식은
 $y = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$
 $= -\frac{1}{a}x + \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$ 이다.

점 C 는 직선 l 과 x 축이 만나는 점이므로
점 C 의 좌표는 $C(\sqrt{a^2 + 1}, 0)$ 이다.
점 $D(0, -1)$ 과 직선 AB 사이의 거리를
 d 라 하면 $d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$
 $S_1 = \frac{1}{2} \times AB \times d = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ 이고,
 $S_2 = \frac{1}{2} \times OD \times OC = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{a^2 + 1}$
 $= \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2}$ 이다.
 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}} \times \sqrt{a^2 + 1} = \frac{a^2 + 1}{2}$ 이다.
따라서 $\frac{S_2}{S_1} = 2$ 를 만족시키는 양수 a 의 값은
 $a = \sqrt{3}$ 이다.
그러므로
 $f(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}, g(a) = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}, k = \sqrt{3}$
따라서 $f(\sqrt{3}) \times g(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

16. [출제의도] 선분의 내분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$
조건 (나)에 의해
삼각형 ADE 와 삼각형 ABC 의 넓이의 비가
 $1:9$ 이므로 두 삼각형의 대응변의 비는 $1:3$
점 E 는 선분 AC 를 $1:2$ 로 내분하는 점이므로
 $E(4, 3)$
직선 BE 의 방정식은 $y = \frac{1}{2}x + 1$
따라서 $k = \frac{1}{2}$