

수학의 구조

Part I



어수강 수학

수학의 구조 Part I : 가장 빠르게 압도적인 1등급을 디자인하다.

① 기획의도 : 그저 열심히‘만’ 공부 중이신가요? **열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는다면 공부 방법을 바꾸어야 합니다.**

우리가 몸짱이 되고자 운동을 할 때, 운동 관련 책이나 유튜브 또는 전문 트레이너를 통해 인체 구조와 운동의 원리에 대해 알고 운동한다면 무작정 피트니스에 등록해서 힘닿는 대로 운동하는 것보다 효율적이고 재미있을 것입니다.

수학 공부도 마찬가지입니다. 잘못된 방법으로 공부하면 효율도 떨어지고, 수학에 대한 흥미와 자신감마저 잃어버릴 수도 있습니다. **반면 수학의 구조와 원리, 그리고 흐름을 알고 공부한다면 훨씬 효율적이고 재미있게 공부할 수 있을 것입니다.**

교육현장에서 문제집을 7-8권씩 푸는데도 성적이 오르지 않아 괴로워하는 학생들을 많이 봅니다. 고등학교 수학을 그저 열심히‘만’ 공부한다면 실패할 확률이 높습니다. **이 책은 학생들이 수학의 구조와 원리, 그리고 흐름을 바탕으로 효과적으로 공부할 수 있도록 구성하였습니다.**

② 누구를 위한 건가요?

- 2등급에서 1등급으로 도약하고 싶은 학생
- 압도적인 1등급을 원하는 학생**
- 내신, 수능, 면접, 논술까지 한 번에 끝내고 싶은 학생
- 최상위권 대학 진학을 희망하는 학생

③ 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

- 수학실력 향상을 통한 **압도적인 1등급 달성**
- 수학에 대한 흥미와 자신감 향상
- 효과적인 내신 · 수능 · 논술 · 면접 준비 및 성공적인 대학 입시**

④ 당부의 말 : 당연한 얘기지만 단순히 이 책을 읽는 것만으로 수학 성적이 향상되지는 않습니다. 이 책은 별로 노력하지 않고도 수학 1등급을 받게 해주는 책이 아닙니다.

이 책에서 다루는 내용에 대해 충분히 고민해보고, 철저한 복습을 통해 책의 내용을 온전히 자신의 것으로 만드는 것을 강력하게 권장합니다. **이 책의 내용을 숙지한 후에, 여러분이 공부하는 교재의 모든 개념과 문제에 이를 적용하기 위해 노력해야 합니다.** 이와 같이 ‘성실’하게 ‘노력’한다면 시행착오는 줄어들고, 수학 1등급까지 걸리는 시간은 단축되며, 그 과정은 즐거워질 것입니다. 그리고 그 결과 압도적인 1등급 및 최상위권 대학 진학도 어렵지 않을거라 생각합니다.

들어가며

- ① 이 파일은 **맞보기 파일입니다**. 먼저 문제 1번부터 5번까지 풀어본 후에 4페이지의 QR코드 영상으로 공부할 것을 권장합니다. **본 파일에는 효과적인 공부방법과 인사이트, 그리고 문제 30번까지 모든 문제의 해설 영상 QR코드가 포함되어 있습니다.**
- ② 수학의 구조 Part 1은 집합, 명제, 연산, 문제분석의 네 단원으로 구성되어 있고, Part 2는 존재성과 유일성, 분할, 귀류법과 귀납법으로 구성할 예정입니다. 이 책은 “수학의 구조 Part 1”이고, “수학의 구조 Part 2”는 2026년 12월에 공개할 예정입니다. (상황에 따라 변동될 수 있습니다.)
- ③ 전자책 “**서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀**”는 수학의 구조 특강의 1강 집합, 2강 명제, 3강 연산을 Text로 구현한 것이고, 전자책 “수학의 구조”는 이를 영상으로 구현한 것입니다. 때문에 집합, 명제, 연산의 내용 및 예제는 겹치는 부분이 많습니다.
- ④ 고1을 위한 연습문제, 고2를 위한 연습문제, 수험생을 위한 연습문제와 해설을 담은 책을 추가로 출간할 계획입니다.

목차

1	집합	4
2	명제	14
3	연산	22
4	문제 분석	28

집합

① 집합에 대한 설명 + 문제 1번부터 5번까지 해설입니다.



[문제1] $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값을 구하시오.¹

[문제2] 모든 실수 x, y, z 에 대하여, 부등식

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq ax(y - z)$$

가 성립하도록 실수 a 의 값의 범위를 정하십시오.²

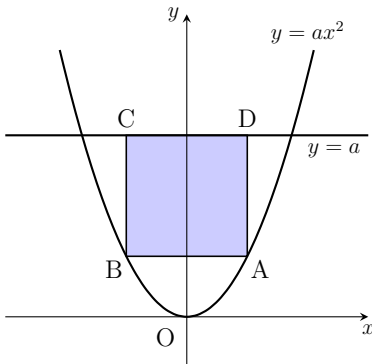
[문제3] 3보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

(가) $a \geq 3$

(나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

$f(4) + f(5) + f(6) + \cdots + f(20)$ 의 값을 구하시오.³

[문제4] 함수 $y = ax^2$ ($a > 0$)의 그래프 위의 두 점 A, B와 직선 $y = a$ 위의 두 점 C, D에 대하여 사각형 ABCD가 정사각형일 때, 정사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하자. 이때, $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ 의 값을 구하시오. (단, A의 x 좌표는 양수이고 y 좌표는 a 보다 작다.)⁴



[문제5] 두 집합

$$M = \{4a + 5b \mid a, b \text{는 정수}\}, N = \{2a + 3b \mid a, b \text{는 정수}\}$$

에 대하여 $M = N$ 임을 증명하시오.⁵

[문제6] 정의역과 공역이 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+2} + k & (x > -1) \\ -\sqrt{-3x+b} + k & (x \leq -1) \end{cases}$$

가 일대일대응이고 $f(-1) = 2$ 일 때, $f^{-1}\left(-\frac{k}{2}\right) + f^{-1}(3k)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, k 는 상수)⁶

[문제7] 실수의 부분집합 A 에 대하여 $n(A) = 4$ 이고 $n(A + A) = 7$ 일 때, A 의 원소들이 이루는 수열은 어떤 수열인가? (단, $A + A = \{x + y \mid x \in A \text{이고 } y \in A\}$ 이다.)⁷

[문제8] 두 수 x, y 에 대하여

$$x + y = -6 \text{이고 } xy = 4$$

일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 의 값을 구하시오.⁸

[문제9] 다음 조건을 만족하는 일차함수 $f(x)$ 를 모두 찾으시오.⁹

$$\{f(xy)\}^2 = f(x^2)f(y^2)$$

명제

[문제10] 두 집합 $\{1, 2, 3\}$ 과 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여

$$\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하시오.¹⁰

[문제11] 두 집합 $\{1, 2, 3\}$ 과 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에 대하여

$$\{1, 2, 3\} \subset X \subset Y \subset Z \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

을 만족하는 집합 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수를 구하시오.¹¹

[문제12] x 에 대한 방정식 $(k+2)x^2 + 2(k+3)x + k+6 = 0$ 이 실근을 가지도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.¹²

[문제13] 다음의 (보기)와 같이 놓인 4장의 카드 중에서 다음 규칙에 맞는 카드인지 반대쪽 면을 반드시 확인해야 하는 것을 모두 고르시오.¹³

(규칙)	카드의 한쪽 면에 자음이 적혀 있으면 반대쪽 면에는 짝수가 적혀 있다.
(보기)	<div style="display: inline-block; border: 1px solid black; padding: 2px 10px; margin: 0 10px;">1</div> <div style="display: inline-block; border: 1px solid black; padding: 2px 10px; margin: 0 10px;">2</div> <div style="display: inline-block; border: 1px solid black; padding: 2px 10px; margin: 0 10px;">a</div> <div style="display: inline-block; border: 1px solid black; padding: 2px 10px; margin: 0 10px;">b</div>

[문제14] 100 이하의 자연수 n 에 대하여 다음 명제의 반례가 될 수 있는 것의 개수를 구하시오.¹⁴

n^2 이 12의 배수이면 n 도 12의 배수이다.

[문제15] 실수 x, y 에 대한 두 조건

$$p : |x - a| < 1 \text{이고 } |y - b| < 1$$

$$q : |(x + y) - (a + b)| < k$$

에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 양의 실수 k 의 값의 범위를 구하시오. (단, a, b 는 상수)¹⁵

[문제16] 실수 a, b 와 실수 전체의 집합 \mathbb{R} 에 대하여 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1}$$

라 하자. 이때 함수 f 의 치역이 $[0, 1]$ 이 되도록 하는 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 자취의 길이를 구하시오.¹⁶

연산

[문제17] 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 Δ 을

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

라 하자. 이때 네 집합 A, B, C, D 와 공집합 \emptyset 에 대하여

$$\left[\{(A \Delta B) \Delta (C \Delta D)\} \Delta \{(A^c \Delta C^c) \Delta D\} \right] \Delta \{(\emptyset \Delta B) \Delta C\}$$

를 간단히 하시오.¹⁷

[문제18] 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$, $g(n) = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ 라 할 때,

$$f(1)g(2)f(3)g(4)f(5)g(6)\cdots f(49)g(50)$$

의 값을 구하시오.¹⁸

[문제19] 복소수 z 에 대하여 $3z^3 - 2\bar{z}^3 = 2 + 10i$ 일 때, $z\bar{z}$ 의 값을 구하시오. (단, \bar{z} 는 z 의 켈레복소수)¹⁹

[문제20] x 에 대한 사차식 $f(x)$ 에 대하여

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4)$$

가 성립할 때, $f(6)$ 의 값을 구하시오.²⁰

[문제21] 임의의 자연수 n 에 대하여

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

은 짝수인 자연수이다. 이를 이용하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left\{ (2 + \sqrt{3})^n \pi + \frac{\pi}{3} \right\}$$

를 구하시오.²¹

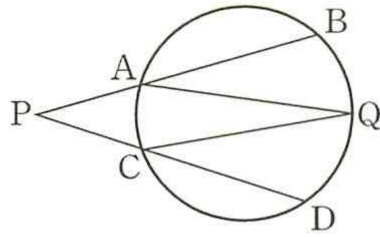
문제 분석

[문제22] x 에 대한 이차방정식 $x^2 + a(1 + i)x + (1 + 2i) = 0$ 이 실근을 가지도록 실수 a 의 값을 정하십시오.²²

[문제23] $1 < a < b$ 인 두 상수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\log_a b$ 의 값을 구하시오.²³

$$\frac{2a}{\log_a b^3} = \frac{b}{\log_b a^5} = \frac{2a+b}{8}$$

[문제24] 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원의 외부에 한 점 P가 있다.
 $\widehat{BQ} = 0.29$ 이고 $\widehat{QD} = 0.31$ 일 때, $\angle P + \angle Q$ 의 값을 구하시오.²⁴



[문제25] 자연수 m, n 에 대하여

$$n^2 - 2mn + 2m + n = 8$$

가 성립할 때, $m + n$ 의 최솟값을 구하시오.²⁵

[문제26] 실수 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에 대하여

$$\frac{2}{\cos^2\left(x + \frac{1}{12}\pi\right)} - \frac{4 \cos\left(\frac{5}{12}\pi - x\right)}{\sin\left(x + \frac{7}{12}\pi\right)} + 3$$

의 최댓값과 최솟값을 구하시오.²⁶

[문제27] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{이고 } \lim_{x \rightarrow a} \{3f(x) - g(x)\} = 2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) + g(x)}{f(x) - 2g(x)}$ 의 값을 구하시오.²⁷

[문제28] 다항식 $f(x)$ 가 모든 실수 x, y 와 $a + b = 1$ 을 만족하는 모든 실수 a, b 에 대하여

$$af(x) + bf(y) \geq f(ax + by)$$

를 만족시킬 때, 모든 실수 x, y, z 와 $a + b + c = 1$ 을 만족하는 모든 실수 a, b, c 에 대하여

$$af(x) + bf(y) + cf(z) \geq f(ax + by + cz)$$

가 성립함을 증명하시오.²⁸

[문제29] 서로 다른 세 원 C, C_1, C_2 에 대하여, 원 $C : (x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ 가 실수 q 의 값에 관계없이

$$C_1 : (x - p)^2 + (y - 3)^2 = 9^2, C_2 : (x - 3)^2 + \left(y + \sqrt{q^2 - 2q + 4}\right)^2 = q^2 - 2q + 76$$

의 두 교점을 지난다고 할 때, $\left(\frac{b+c}{2p}\right)^a$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, p 는 실수이고 a, b, c 는 자연수)²⁹

[문제30] 두 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} + b & (x \leq -8) \\ -3^{x-3} + 8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.³⁰

집합 $\{f(x) \mid x \leq k\}$ 의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위는 $3 \leq k < 4$ 이다.

맺음말

: 그저 열심히‘만’ 공부 중인가요? **잘못된 방법으로 그저 열심히‘만’ 공부한다면 ‘노력’이 당신을 ‘배신’할 수도 있습니다.** 열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는다면 공부 방법을 바꾸어야 합니다. **수학의 구조와 원리에 대한 이해를 바탕으로 공부한다면 훨씬 쉽고 재미있게 공부할 수 있습니다.**

이 책에서는 효과적인 공부방법을 제시하고, 이에 대한 이해를 돕기 위해 내신 · 수능 · 논술 · 면접 기출 문항 등 다양한 예제를 제시하였지만, 사실은 수학의 모든 문제가 예제입니다. 공부 방법을 숙지한 후에는 수학의 개념과 문제에 이를 적용하기 위한 노력해야 합니다.

공부 방법을 바꾸는 것은 무척 어려운 일이지만 ‘의식적’으로 ‘노력’한다면 충분히 가능합니다. **이 책의 내용을 숙지한 후에 수학의 모든 개념과 문제에 이를 적용해 공부한다면, 시행착오는 줄어들고, 수학 1등급까지 걸리는 시간은 단축되며, 그 과정은 즐거워질 것입니다.** 이를 통해 수학에 대한 흥미와 자신감을 되찾고, 수학 시험뿐 아니라 대학 입시에서도 좋은 결과를 거두기를 바랍니다.

더 많은 전자책, 무료 칼럼, 손풀이, 강의가 보고싶다면?

- 어수강 수학 홈페이지 (강의) : soogangmath.com
- 어수강 선생님 블로그 (칼럼, 손풀이) : blog.naver.com/math-fish
- 어수강 선생님 유튜브 (해설 영상) : youtube.com/@soogangmath
- 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀 (전자책) : docs.orbi.kr/docs/11799/
- 당신이 수학을 망치는 N가지 이유 (전자책) : docs.orbi.kr/docs/11802/

어수강 선생님 소개

[약력]

서울대학교 이학박사 (Ph.D. in Mathematics)

(前) 하나고등학교 교사

(前) 서울과학고등학교 교사

(前) EBS & KAIST 수학캠프 지도교사

(前) 서울대학교 과학영재원 지도교사

(現) 어수강 수학 학원 원장

하나고, 민사고, 외대부고 및 강남지역 최상위권 학생 지도
최근 10년간 지도한 학생의 70% 이상 SKY 및 의치한 진학
이산수학 교과서 집필 및 문항 제작, 교재 및 논문 검토 다수

[논문]

석사논문

[A study on competition numbers of planar graphs \(2016\)](#)

박사논문

[Study on structures of digraphs and graphs in the aspect of their holes \(2019\)](#)

국제 전문학술지 게재 논문¹⁾

1. [On \(1, 2\)-step competition graphs of bipartite tournaments \(2017\)](#)
2. [The partial order competition dimensions of bipartite graphs \(2019\)](#)
3. [A graph with the partial order competition dimension greater than five \(2019\)](#)
4. [The graph grabbing game on \$\{0, 1\}\$ -weighted graphs \(2019\)](#)
5. [The niche graphs of bipartite tournaments \(2020\)](#)
6. [On \$m\$ -step competition graphs of bipartite tournaments \(2020\)](#)
7. [On chordal phylogeny graphs \(2021\)](#)
8. [The niche graphs of multipartite tournaments \(2023\)](#)
9. [The phylogeny number of a graph in the aspect of its triangles and diamonds \(2025\)](#)

¹⁾현재 국제 전문학술지에 투고하여 심사 중인 논문은 scholar.google.com에서 “Soogang Eoh”로 검색하면 확인하실 수 있습니다.

정답

¹ $x = 3$ 이고 $y = 2$

² $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

³56

⁴4

⁵i) $x \in M$ 이라 하자. 그러면 $x = 4a + 5b$ (a, b 는 정수)이다. 그런데 $x = 2(2a) + 3(a + b)$ 이므로 $x \in N$ 이다.
따라서 $M \subset N$ 이다.

ii) 이제 $x \in N$ 이라 하자. 그러면 $x = 2a + 3b = 4(-2a + 2b) + 5(2a - b)$ (a, b 는 정수)이므로 $x \in M$ 이다.
따라서 $N \subset M$ 이다.

i), ii)로부터 $M = N$ 이다. ■

⁶3

⁷등차수열

⁸ $\sqrt{10}i$

⁹ $f(x) = ax$ ($a \neq 0$)

¹⁰4

¹¹4⁷

¹² $k \leq -\frac{3}{2}$

¹³1, a, b

¹⁴8

¹⁵ $k \geq 2$

¹⁶0

¹⁷C

¹⁸ $\frac{\sqrt{2}}{2}(i - i)$

¹⁹2

²⁰ $\frac{1}{2}$

²¹ $\frac{1}{2}$

²² ± 2

²³ $\frac{5}{3}$

²⁴0.3

²⁵4

²⁶최댓값은 11, 최솟값은 3

²⁷-1

²⁸ $a+b \leq 0, b+c \leq 0, c+a \leq 0$ 이면 $a+b+c \leq 0$ 이므로 모순이다. 따라서 $a+b, b+c, c+a$ 중 적어도 하나는 양수이다. $a+b > 0$ 라 가정하자. (일반성을 잃지 않는다!) 그러면

$$\begin{aligned} af(x) + bf(y) &= (a+b) \times \left(\frac{a}{a+b}f(x) + \frac{b}{a+b}f(y) \right) \\ &\geq (a+b)f\left(\frac{a}{a+b}x + \frac{b}{a+b}y\right) \quad \left(\because \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1 \text{이고 } a+b > 0\right) \end{aligned}$$

이다. 위 식의 양변에 $cf(z)$ 를 더하면

$$\begin{aligned} af(x) + bf(y) + cf(z) &\geq (a+b)f\left(\frac{a}{a+b}x + \frac{b}{a+b}y\right) + cf(z) \\ &\geq f\left((a+b)\left(\frac{a}{a+b}x + \frac{b}{a+b}y\right) + cz\right) \quad (\because a+b+c=1) \\ &= f(ax + by + cz) \end{aligned}$$

이다. ■

²⁹243

³⁰13