

02

근의 분리

생각 | 이해

암기 | 적용

▶ ‘근의 분리’란 ?

이차방정식의 실근과 어떤 상수와의 대소 관계가 주어져 있는 것을
근의 분리의 상황
이라고 한다.

근의 분리의 상황을 대략적으로 정리해 보면 다음과 같다.

상황 1. 이차방정식의 두 근이 모두 p 보다 크다.

상황 2. 이차방정식의 두 근이 모두 p 보다 작다.

상황 3. 이차방정식의 두 근 사이에 p 가 있다. (단, p 는 상수)

위와 같은 상황이 되도록 조건식을 써야한다면

문제의 상황을 그래프의 관점에서 해석

하여, 원하는 상황을 반영하는

‘목표 그래프’를 그려두고,

‘목표 그래프’가 반드시 그려지도록

다음의 세 가지 조건을 고려하여 식을 작성

하면 된다.

- ① 경계에서의 함숫값
- ② 판별식
- ③ 대칭축의 위치

이때, 위의 세 가지 조건식을 차례대로 하나씩 쓸 때마다

다음과 같은 생각의 과정을 거치도록 한다.

“방금까지 쓴 조건식들만 모두 만족시키면 반드시 ‘목표 그래프’가 그려지나?”



방금까지 작성한 모든 조건식을 만족시키지만
‘목표 그래프’에서 벗어나는 경우가 있는지 검토한다.

예시 1 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 4k = 0$ 의 두 근이 모두 3보다 클 때,
실수 k 의 값의 범위를 구해보자.

생각 1 문제의 상황을 그래프의 관점에서 해석하자.

$$\text{이차방정식 } \underbrace{x^2 - 2kx + 4k = 0}_{f(x) = x^2 - 2kx + 4k} \text{의 두 근이 모두 3보다 크다.}$$

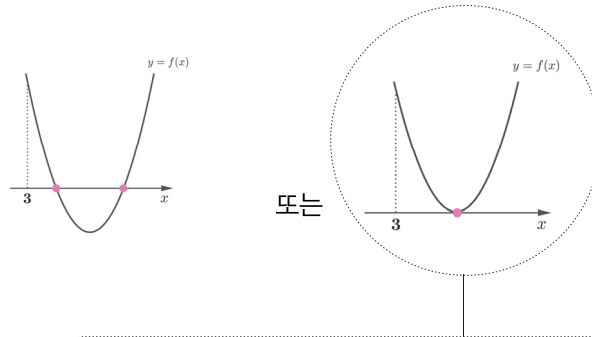


그래프 관점에서 해석

이차함수 $f(x) = x^2 - 2kx + 4k$ 의 x 절편이 모두 3보다 크다.

생각 2 원하는 상황을 반영하는 '목표 그래프'를 그리자.

이차함수 $f(x) = x^2 - 2kx + 4k$ 의 x 절편이 모두 3보다 큰 상황을 반영하도록
목표 그래프를 그리면 다음과 같다.



이차방정식 $x^2 - 2kx + 4k = 0$ 의 두 근이 서로 다르다는 조건이 없다. 따라서
이차방정식의 두 근이 서로 같아도 되므로,
이차함수 $f(x) = x^2 - 2kx + 4k$ 가 x 축과 1개의 교점을 가져도 된다.

생각 3 '목표 그래프'가 반드시 그려지도록 조건식을 작성하자.

① **경계에서의 함숫값**을 고려한다.

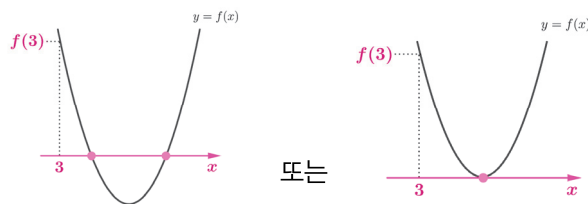
이차함수 $f(x)$ 의 x 절편은 모두 3을 경계로 오른쪽에 있어야하므로

경계가 되는 지점은 $x = 3$ 이다.

목표 그래프가 그려지려면 $f(x)$ 의 $x = 3$ 에서의 함숫값이 x 축보다 위에 있어야 하므로,

$$f(3) > 0$$

이어야 한다.



조건식을 차례대로 하나씩 쓸 때마다 해야 하는 생각

“ $f(3) > 0$ 이지만 하면 반드시 목표 그래프가 그려지나?”

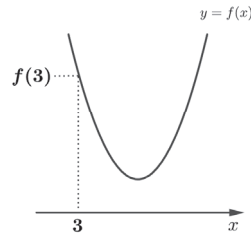
즉, “ $f(3)$ 이 x 축보다 위에 있지만 하면, 반드시 목표 그래프가 그려지나?”

→ $f(3)$ 이 x 축보다 위에 있지만, 목표 그래프에서 벗어나는 경우가 있는지 검토하자.

다음과 같이 $f(3)$ 이 x 축보다 위에 있지만,

이차함수 $f(x)$ 와 x 축의 교점이 없어서

목표 그래프에서 벗어나는 상황이 생길 수 있다.



따라서 두 번째 조건식인

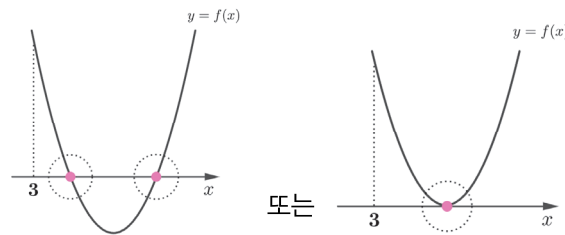
판별식

을 통해 위와 같은 상황이 나타나지 않도록 해야 한다.

② **판별식**을 고려한다.

위와 같은 상황을 배제하기 위해서는 다음과 같이

이차함수 $f(x)$ 가 x 축과 교점을 2개 또는 1개 가지도록 만들면 된다.



따라서 이차함수 $f(x)$ 와 x 축이 포함된 방정식인

$$x^2 - 2kx + 4k = 0 \text{의 서로 다른 실근이 2개 또는 1개}$$

여야 한다. → 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

조건식을 차례대로 하나씩 쓸 때마다 해야 하는 생각

“ $f(3) > 0$ 이고 $D \geq 0$ 이지만 하면 반드시 목표 그래프가 그려지나?”

즉, “ $f(3)$ 이 x 축보다 위에 있으면서 $f(x)$ 가 x 축과 교점을 2개 또는 1개 가지기만 하면

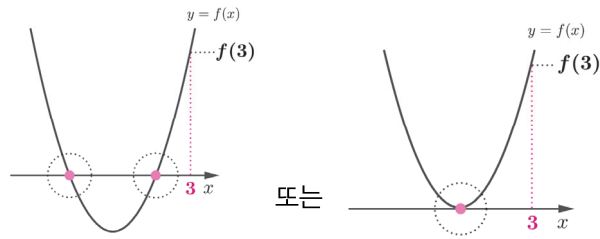
반드시 목표 그래프가 그려지나?”

→ $f(3)$ 이 x 축보다 위에 있으면서, $f(x)$ 와 x 축의 교점이 2개 또는 1개이지만,

목표 그래프에서 벗어나는 경우가 있는지 검토하자.

다음과 같이

$x = 3$ 이 $f(x)$ 의 두 x 절편보다 오른쪽에 있어서
 목표 그래프에서 벗어나는 상황이 생길 수 있다.



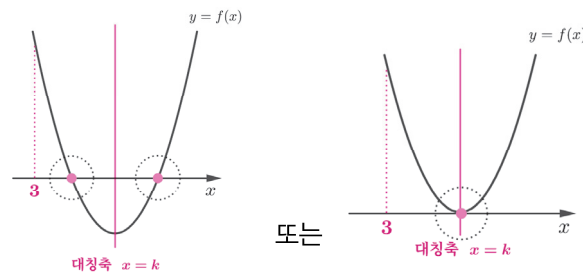
따라서 세 번째 조건식인

대칭축의 위치

를 고려하여 위와 같은 상황이 나타나지 않도록 해야 한다.

③ 대칭축의 위치를 고려한다.

$f(x) = x^2 - 2kx + 4k$ 의 대칭축 $x = k$ 가 $x = 3$ 보다 오른쪽에 있으면 방금과 같이
 $x = 3$ 이 $f(x)$ 의 두 x 절편보다 오른쪽에 있는 상황이 나오지 않도록 할 수 있다.



따라서 대칭축 $x = k$ 가 $x = 3$ 보다 오른쪽에 있어야 하므로, $k > 3$ 이어야 한다.

생각 4 얻은 조건들의 공통범위를 구하자.

$f(3) > 0$, $D \geq 0$, $k > 3$ 의 공통범위를 계산하면

- $f(3) = 9 - 2k > 0 \Rightarrow k < \frac{9}{2}$
- $\frac{D}{4} = k^2 - 4k = k(k - 4) \geq 0 \Rightarrow k \geq 4$ 또는 $k \leq 0$
- $k > 3$

수직선을 그려서 공통범위를 구하면
 $4 \leq k < \frac{9}{2}$ 임을 알 수 있다.

답 : $4 \leq k < \frac{9}{2}$

종합 정리 이차방정식의 근과 어떤 상수의 대소관계를 다루는 패턴

이차방정식의 근과 어떤 상수의 대소관계가 조건으로 제시되면
아래와 같은 단계를 거쳐 문제를 풀도록 한다.



※ 참고

목표 그래프는 문제의 상황에 따라 여러 개가 나올 수도 있다.

예시 2 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 4k = 0$ 의 두 근 사이에 3이 있을 때,
실수 k 의 범위를 구해보자.

생각 1 문제의 상황을 그래프의 관점에서 해석하자.

$$\text{이차방정식 } \underbrace{x^2 - 2kx + 4k}_{f(x) = x^2 - 2kx + 4k} = \underbrace{0}_{x\text{축}} \text{의 두 근 사이에 3이 있다.}$$

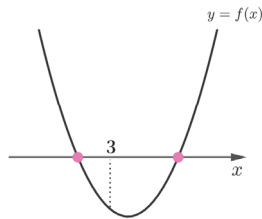


그래프 관점에서 해석

이차함수 $f(x) = x^2 - 2kx + 4k$ 의 두 x 절편 사이에 3이 있다.

생각 2 원하는 상황을 반영하는 ‘목표 그래프’를 그리자.

이차함수 $f(x) = x^2 - 2kx + 4k$ 의 두 x 절편 사이에 3이 있는 상황을 반영하도록
목표 그래프를 그리면 다음과 같다.



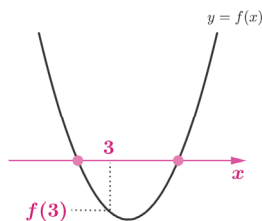
생각 3 ‘목표 그래프’가 반드시 그려지도록 조건식을 작성하자.

① **경계에서의 함숫값**을 고려한다.

경계가 되는 지점은 $x = 3$ 이다. 목표 그래프가 그려지려면 아래와 같이 $f(x)$ 의 $x = 3$ 에서의 함숫값이 x 축보다
아래에 있어야 하므로,

$$f(3) < 0$$

이어야 한다.



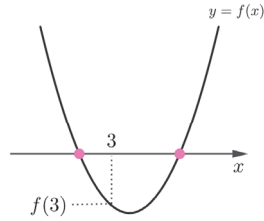
조건식을 차례대로 하나씩 쓸 때마다 해야 하는 생각

“ $f(3) < 0$ 이지만 하면 반드시 목표 그래프가 그려지나?”

즉, “ $f(3)$ 이 x 축보다 아래에 있기만 하면, 반드시 목표 그래프가 그려지나?”

→ $f(3)$ 이 x 축보다 아래에 있지만, 목표 그래프에서 벗어나는 경우가 있는지 검토하자.

$f(3)$ 이 x 축보다 아래에 있기만 하면 그래프가 반드시 다음과 같이 그려질 수밖에 없고,



이는 목표 그래프와 정확히 일치한다.

따라서 더 이상 조건식을 쓸 필요 없이 $f(3) < 0$ 만 풀어서 정리해주면 된다.

$$f(3) < 0 \rightarrow 9 - 2k < 0 \rightarrow k > \frac{9}{2}$$

$$\text{답 : } k > \frac{9}{2}$$

유제
409

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 3a + 4 = 0$ 의 두 근이 모두 -1 보다 작을 때,
실수 a 의 값의 범위를 구하시오.

유제
410

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - a^2 + 7 = 0$ 의 두 근 사이에 -1 이 있을 때,
실수 a 의 값의 범위를 구하시오.

유제
411

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x - k + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 이차방정식
 $x^2 - 3x = 0$ 의 두 근 사이에 있을 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.

유제
412

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax - 8 = 0$ 의 두 근 중에서 한 근만이 이차방정식
 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근 사이에 있도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.

난이도 UP