기하 · 문제편

규토 라이트 N제

개념, 유형, 기출, N제를 한 권으로 Compact하게

유성민 지음

orbibooks

01

이차곡선

포물선

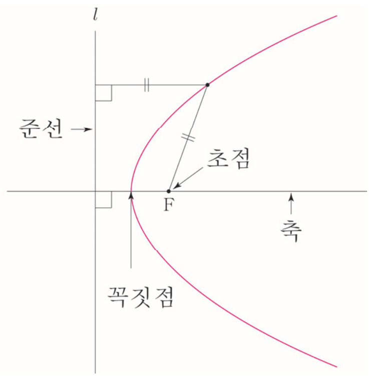
성취 기준 - 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

개념 파악하기 (1) 포물선의 방정식은 어떻게 구할까?

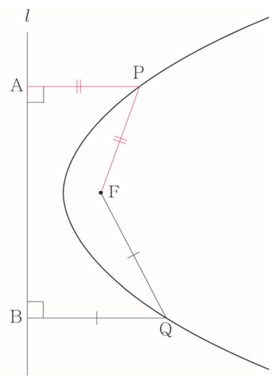
포물선의 뜻

평면 위에 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때,
점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라 한다.
이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 l을 포물선의 **준선**이라 한다.

또한 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**,
포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 **꼭짓점**이라 한다.

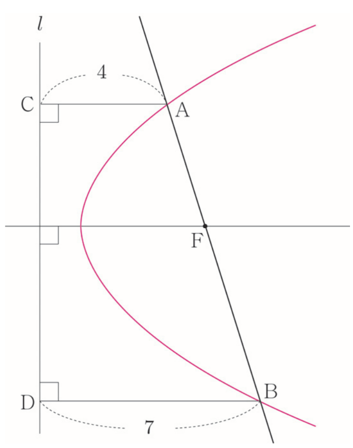


포물선 위의 어느 점에서도 초점까지의 거리와 준선까지의 거리는 같다.
예를 들어 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PF}=\overline{PA}$, $\overline{QF}=\overline{QB}$가 성립한다.



개념 확인문제 1

그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=7$일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.



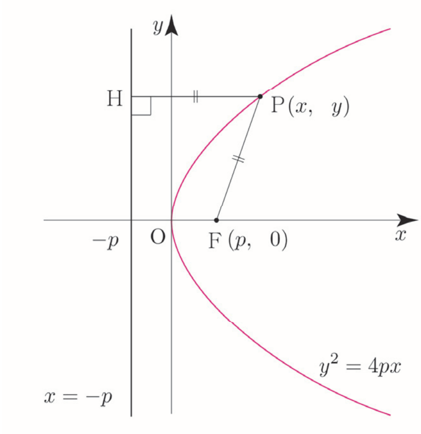
초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

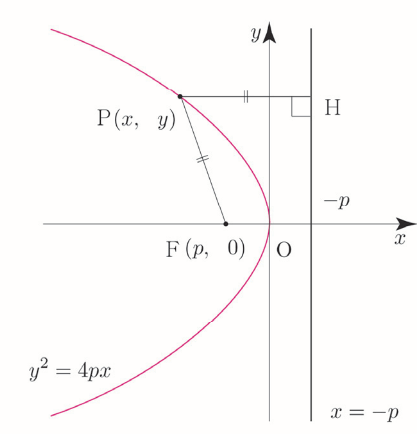
좌표평면에서 0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구하여 보자.

포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$이다.
포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로 $\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$이고,
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$y^2=4px \quad \cdots \quad ㉠$$

역으로 방정식 ㉠을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$를 만족시키므로 주어진 포물선 위의 점이다.
따라서 ㉠은 구하는 포물선의 방정식이다.





초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식 요약

초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq 0$)

ex1 초점이 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 준선이 $x=-1$인 포물선의 방정식은
$y^2=4px$에서 $p=1$이므로 $y^2=4\times1\times x=4x$, 즉 $y^2=4x$이다.

ex2 초점이 $\mathrm{F}(-3,\ 0)$이고, 준선이 $x=3$인 포물선의 방정식은
$y^2=4px$에서 $p=-3$이므로 $y^2=4\times(-3)\times x=-12x$, 즉 $y^2=-12x$이다.

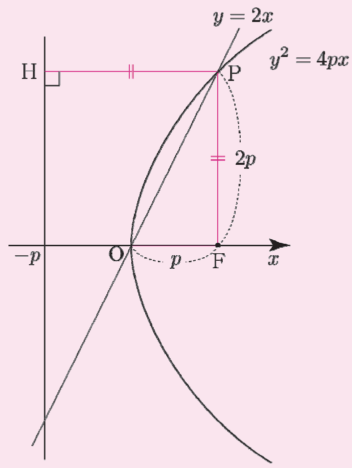
Tip 1 포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점은 원점이고, 초점이 x축 위에 있고, 축의 방정식은 $y=0$이다.

Tip 2 포물선 $y^2=4px$는 $p>0$이면 왼쪽으로 볼록한 포물선이고,
$p<0$이면 오른쪽으로 볼록한 포물선이다.

Tip 3 초점과 준선의 가운데에 꼭짓점이 존재한다.

Tip 4 〈포물선 작도법〉

초점 F를 지나고 축에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=2\overline{\mathrm{OF}}$가 성립한다.



[1단계] 포물선의 꼭짓점 O, 초점 F을 찍고, 준선을 그린다.

[2단계] 초점 F를 지나고 축에 수직인 직선 위에
$2\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{PF}}$가 성립하도록 점 P를 찍는다.

[3단계] 점 P를 지나도록 포물선을 그린다.

$\overline{\mathrm{OF}}:\overline{\mathrm{PF}}=1:2$인 직각삼각형을 그림으로 기억하자.

기울기가 $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=2$이고 원점을 지나므로 직선 OP의 방정식이 $y=2x$라는 것을 알 수 있다.

또한 $y=2x$와 포물선 $y^2=4px$이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 P라 했을 때, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발이 곧 초점이 된다는 사실을 알 수 있다.

개념 확인문제 2 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, 준선이 $x=-2$인 포물선

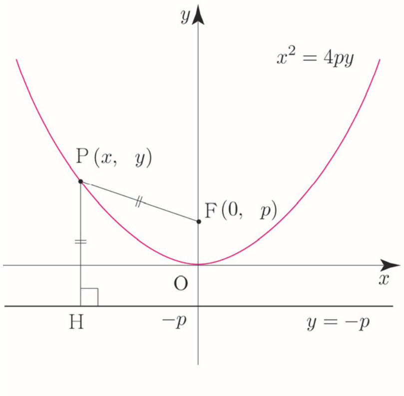
(2) 초점이 $\mathrm{F}(-1,\ 0)$, 준선이 $x=1$인 포물선

초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식

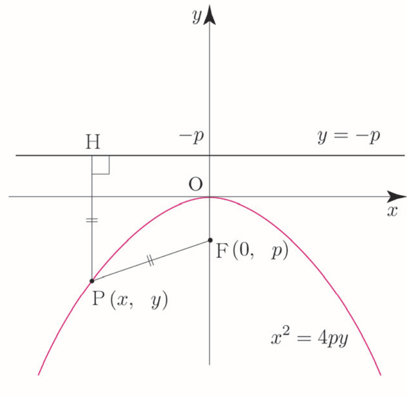
좌표평면에서 0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $\mathrm{F}(0,\ p)$를 초점으로 하고
직선 $y=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 앞에서와 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$x^2=4py$$

① $p>0$



② $p<0$



초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식 요약

초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p\neq 0$)

ex 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 1)$이고, 준선이 $y=-1$인 포물선의 방정식은
$x^2=4py$에서 $p=1$이므로 $x^2=4\times1\times y=4y$, 즉 $x^2=4y$이다.

Tip 1 포물선 $x^2=4py$의 꼭짓점은 원점이고, 초점이 y축 위에 있고, 축의 방정식은 $x=0$이다.

Tip 2 포물선 $x^2=4py$는 $p>0$이면 아래로 볼록한 포물선이고,
$p<0$이면 위로 볼록한 포물선이다.

Tip 3 포물선의 방정식 $x^2=4py$를 변형하면 $y=\dfrac{1}{4p}x^2$이다. 즉, 이차함수의 그래프와 같다.

Tip 4 포물선 $y^2=4px$의 초점은 x축 위에 있고, 포물선 $x^2=4py$의 초점은 y축 위에 있다.
두 포물선의 그래프를 헷갈리지 않도록 유의하자.

개념 확인문제 4 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 $\mathrm{F}\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$, 준선이 $y=-\frac{1}{3}$인 포물선

(2) 초점이 $\mathrm{F}(0,\ -2)$, 준선이 $y=2$인 포물선

개념 확인문제 5 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $x^2=6y$

(2) $x^2=-y$

개념 확인문제 35 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$에 접하고, 기울기가 -2인 접선

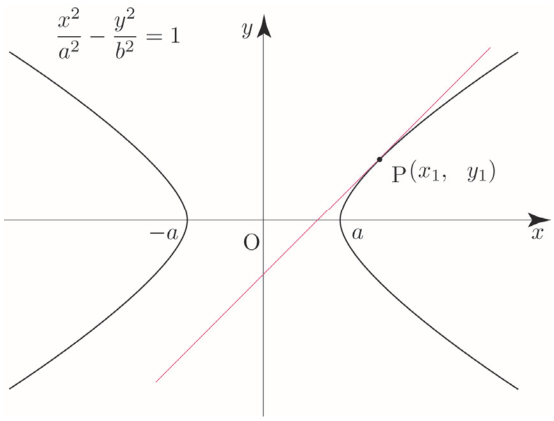
(2) 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$에 접하고, 직선 $x-3y+4=0$에 수직인 접선

(3) 쌍곡선 $\frac{(x-1)^2}{8}-\frac{(y-3)^2}{7}=1$에 접하고, 기울기가 2인 접선

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

(i) 점 P가 x축 위의 점이 아닌 경우 ($y_1 \neq 0$일 때)



접선의 기울기를 $m\,(m \neq 0)$이라 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=m(x-x_1)+y_1$$

$$y=mx-mx_1+y_1 \quad \cdots \text{㉠}$$

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡에서 $-mx_1+y_1=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \quad \cdots$ ㉢

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$이므로 ㉢의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\left(\frac{a}{b}y_1m-\frac{b}{a}x_1\right)^2=0,\ \text{즉}\ m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x_1+y,\quad \frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1x}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

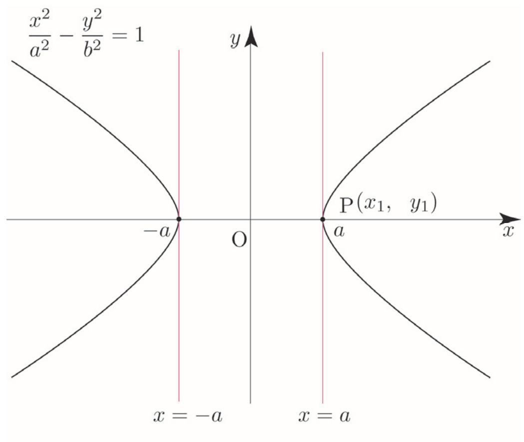
$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$이므로 $\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1x}{a^2}-1$, 즉 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$이다.

(ii) 점 P가 x축 위의 점인 경우 ($y_1=0$일 때)

점 $(a,\ 0)$에서의 접선의 방정식 $x=a$와
점 $(-a,\ 0)$에서의 접선의 방정식 $x=-a$도

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이 성립한다.



마찬가지 방법으로 포물선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

임을 알 수 있다.

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식 요약

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$

ex 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(5,\ -4)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

$\frac{5x}{5}-\frac{-4y}{4}=1$, 즉 $y=-x+1$

개념 확인문제 36 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선

(2) 쌍곡선 $2x^2-y^2=1$ 위의 점 $(5,\ 7)$에서의 접선

예제 14

점 $(0,\ 1)$에서 포물선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

풀이

풀이1) 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{3}-\dfrac{y_1y}{2}=1$이다.

이 접선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $y_1=-2$ ⋯ ㉠

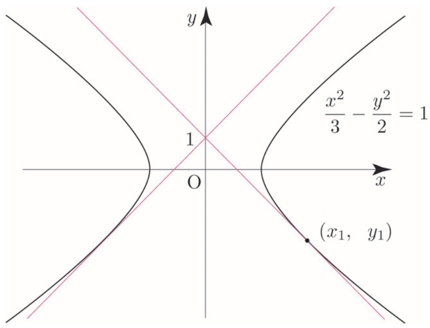
또, 점 $(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{x_1^2}{3}-\dfrac{y_1^2}{2}=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 정리하면

$x_1=-3,\ y_1=-2$ or $x_1=3,\ y_1=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x+1$ or $y=-x+1$이다.



풀이2) 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{3m^2-2}$이다.

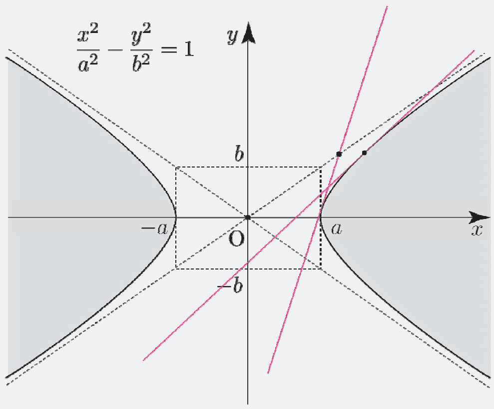
이 접선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=\pm\sqrt{3m^2-2} \Rightarrow 1=\sqrt{3m^2-2} \Rightarrow 1=3m^2-2 \Rightarrow m=1$ or $m=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x+1$ or $y=-x+1$이다.

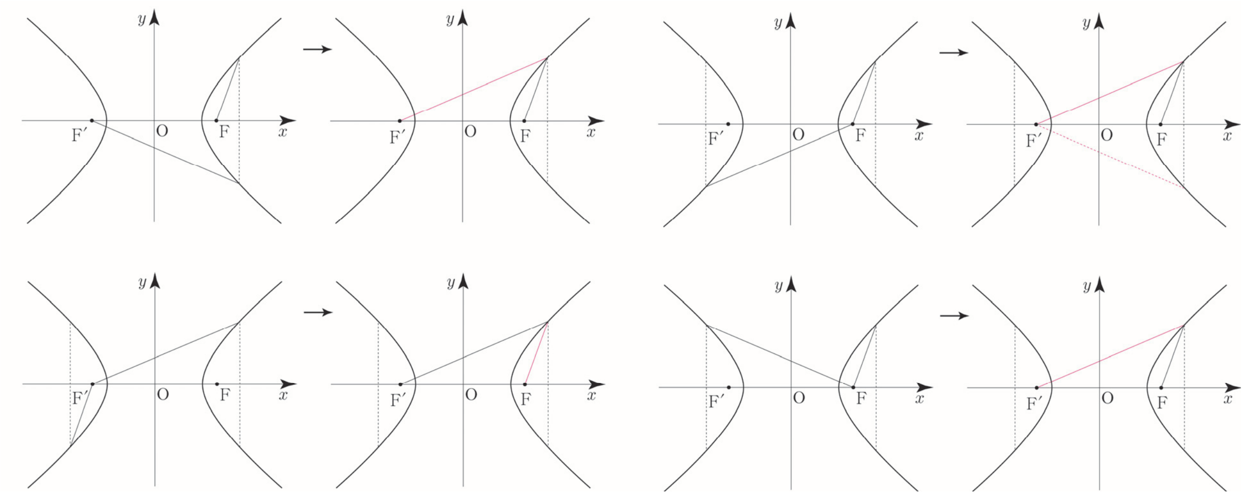
Tip 〈쌍곡선의 접선의 개수〉

① 원점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 0개
② 원점을 제외한 점근선 위의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 1개
③ 쌍곡선 위의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 1개
④ 색칠한 영역에 속한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 0개
⑤ 위에서 언급하지 않은 영역에 속한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 2개



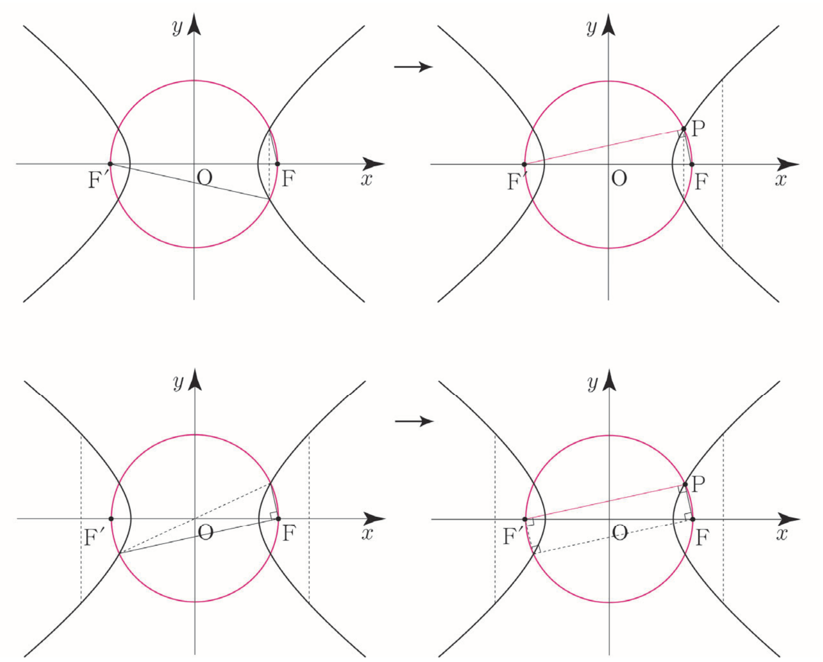
쌍곡선의 대칭성

쌍곡선은 중심에 대하여 점대칭이고, 축에 대하여 선대칭이다. 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.



쌍곡선의 대칭성과 두 초점을 지름의 양 끝으로 하는 원

쌍곡선과 쌍곡선의 두 초점을 지름의 양 끝으로 하는 원의 교점들 중 하나를 P라 하면
$\angle FPF' = 90°$, $\overline{OP} = \overline{OF} = \overline{OF'}$



Tip 대칭성은 출제자 입장에서 매우 매력적인 소재이므로 항상 쓸 준비가 되어있어야 한다.

규토 라이트 N제

이차곡선

Training – 1 step

필수 유형편

1. 이차곡선

Theme 1

포물선의 정의와 방정식

001

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF}=7$일 때, 점 P의 x좌표를 구하시오.

002

점 $(-5,\ 0)$을 초점으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 $(a,\ 5a)$를 지날 때, a의 값은? (단, $a\neq0$)

① -1　② $-\dfrac{4}{5}$　③ $-\dfrac{3}{5}$
④ $-\dfrac{2}{5}$　⑤ $-\dfrac{1}{5}$

003

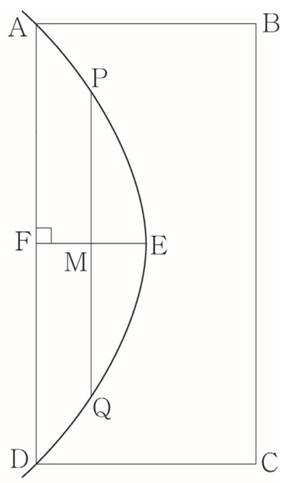
좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(4,\ a)$와 초점이 F인 포물선 $y^2=-16x$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}=\overline{FQ}=13$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

004

포물선 $y^2=8x$와 직선 $x=k$ $(k>2)$이 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 포물선 $y^2=8x$의 초점 F에 대하여 $\overline{PF}=5$일 때, 삼각형 PFQ의 넓이는 s이다. s^2+k의 값을 구하시오.

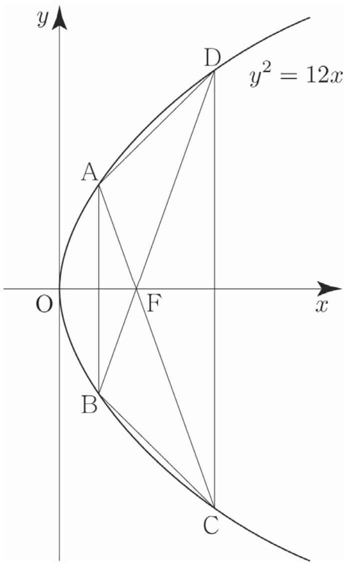
005

그림의 사각형 ABCD는 직사각형이고, 곡선 AED는 선분 AD의 중점 F를 초점으로 하는 포물선의 일부분이다. 선분 EF의 중점을 M이라 할 때, 점 M을 지나고 선분 EF에 수직인 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{AE}=\overline{BE}$이고, 사각형 ABCD의 넓이가 18일 때, $\overline{PQ}=k$이다. k^2의 값을 구하시오.



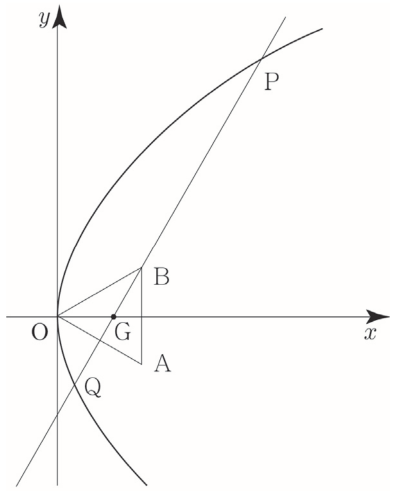
020

그림과 같이 포물선 $y^2=12x$ 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD에 대하여 두 선분 AB, CD가 각각 y축과 평행하다. 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 포물선의 초점 F와 일치하고 $\overline{\mathrm{AF}}=\frac{9}{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 k이다. $\sqrt{2}\times k$의 값을 구하시오.



021

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? (단, O는 원점이다.)



① 10　② $\frac{31}{3}$　③ $\frac{32}{3}$　④ 11　⑤ $\frac{34}{3}$

039

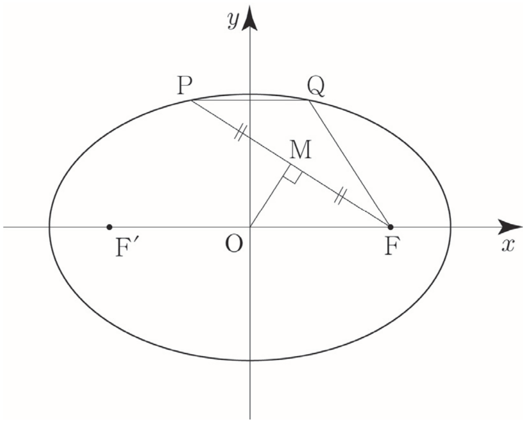
두 초점을 각각 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F′를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF′이 만나는 점 중 P가 아닌 점을 A라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF가 만나는 점 중 P가 아닌 점을 B라 할 때, 삼각형 PAB의 둘레의 길이를 구하시오.

040

그림과 같이 두 초점이 각각 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 위의 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF의 중점을 M이라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
원점 O에서 선분 PF에 내린 수선의 발은 M이고,

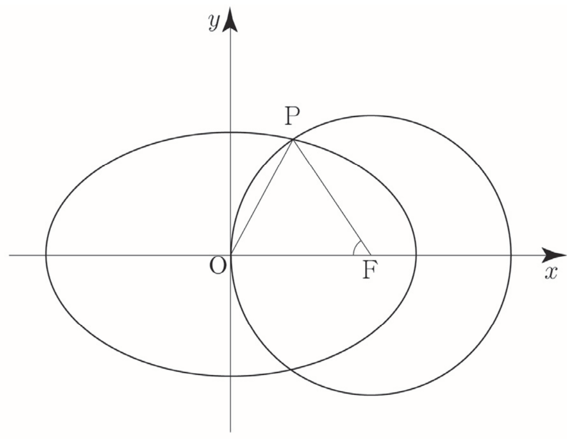
$$\overline{OM}=1,\ \overline{PF}+\overline{QF}=6$$

일 때, 이 타원의 단축의 길이를 구하시오.



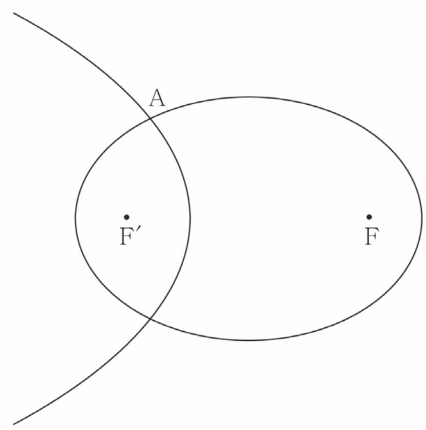
041

타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ $(a>b>0)$의 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 원점 O를 지나는 원이 타원과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. $\overline{OP}=2\sqrt{2}$, $\cos(\angle OFP)=\frac{5}{9}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.



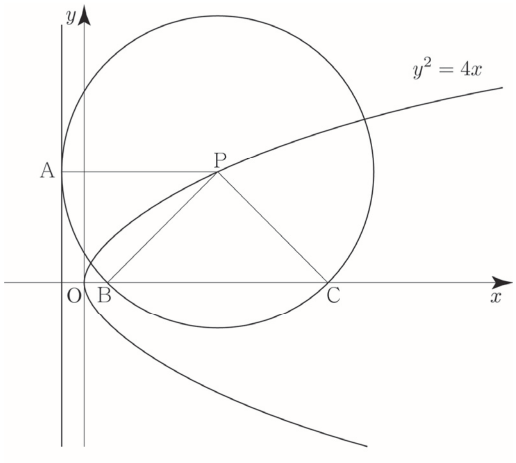
042

그림과 같이 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2\sqrt{2}$, 단축의 길이가 2인 타원과 선분 FF′을 3 : 1로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하고 F′가 초점인 포물선이 있다.
타원과 포물선의 교점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 선분 FF′에 평행한 직선과 타원의 교점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 사각형 ABFF′의 둘레의 길이가 k일 때, $(k+6)^2$의 값을 구하시오.



123 • 2017학년도 사관학교 가형

그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 1보다 크고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [3점]

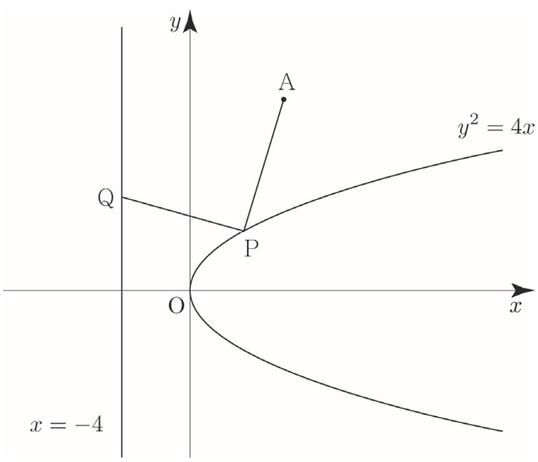


① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{3}$
④ $4+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

124 • 2021년 고3 3월 교육청 기하

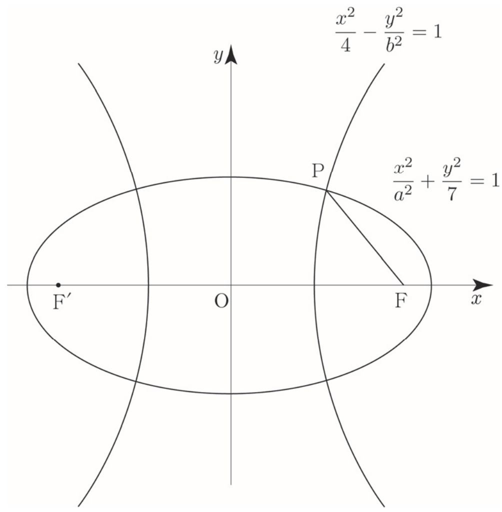
점 A(6, 12)와 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P, 직선 $x=-4$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20



125 • 2021년 고3 4월 교육청 기하

그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{7}=1$과 두 점 F, F$'$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=3$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

규토 라이트 N제

평면벡터

Guide step

개념 익히기편

01

평면벡터

벡터의 뜻과 덧셈, 뺄셈

성취 기준 - 벡터의 뜻을 안다.
- 벡터의 덧셈, 뺄셈을 할 수 있다.

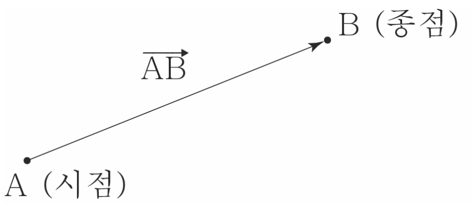
개념 파악하기 (1) 벡터란 무엇일까?

벡터의 뜻

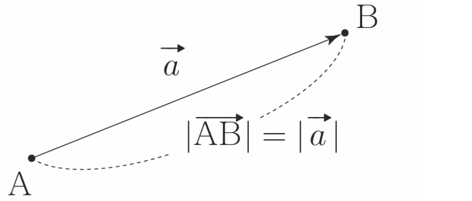
텐트의 넓이, 열에너지, 배낭의 질량 등은 크기만을 가지고 있으므로 측정 단위를 미리 정하면 그 양을 하나의 실수로 나타낼 수 있다. 하지만 새가 날아가는 속도, 바람이 부는 속도, 풀을 뽑는 힘, 물이 흐르는 속도 등은 크기뿐만 아니라 방향도 함께 나타내어야 그 양을 정확히 알 수 있다.

예를 들면 바람은 '서풍 10m/s'와 같이 '서쪽에서 동쪽'이라는 방향과 '10m/s'라는 크기를 함께 나타내어야 그 양을 정확히 알 수 있다. 이와 같이 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **벡터**라고 한다.
벡터는 평면이나 공간 어디에서든 생각할 수 있는데 평면에서의 벡터를 **평면벡터**라고 한다.

벡터를 그림으로 나타낼 때에는 오른쪽 그림과 같이 방향이 주어진 선분을 이용한다. 점 A에서 점 B로 향하는 방향과 크기가 주어진 선분 AB를 벡터 AB라고 하며, 기호로 $\overrightarrow{\text{AB}}$ 와 같이 나타낸다.
이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$의 **시점**, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$의 **종점**이라 한다.
벡터를 한 문자로 나타낼 때는 기호로 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \cdots$ 와 같이 나타낸다.

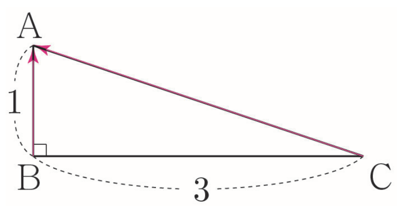


또 선분 AB의 길이를 벡터의 크기라 하며,
기호로 $|\overrightarrow{\text{AB}}|$ 또는 $|\vec{a}|$와 같이 나타낸다.
특히 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라 한다.



한편 벡터 $\overrightarrow{\text{AA}}$와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라 하며,
기호로 $\vec{0}$와 같이 나타낸다. 영벡터의 크기는 0이고 그 방향은 생각하지 않는다.

ex $\overline{\text{AB}}=1,\ \overline{\text{BC}}=3$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\text{CA}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이므로
$|\overrightarrow{\text{CA}}|=\sqrt{10},\ |\overrightarrow{\text{BA}}|=1$
($\overrightarrow{\text{BA}}$는 단위벡터이다.)



Tip 1 벡터는 크기와 방향만으로 결정되고 놓여 있는 위치와는 관계없음에 유의하도록 하자.

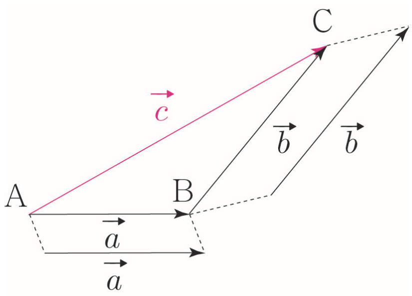
Tip 2 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$의 크기는 선분 AB의 길이와 같으므로 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$의 크기를 $|\overrightarrow{\text{AB}}|$와 같이 나타낸다.

Tip 3 〈서로 다른 두 점 A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$와 벡터 $\overrightarrow{\text{BA}}$〉
벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$는 시점이 A, 종점이 B인 벡터이고, 벡터 $\overrightarrow{\text{BA}}$는 시점이 B, 종점이 A인 벡터이다.
즉, 방향이 다르므로 두 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{BA}}$는 서로 다른 벡터이다. 하지만 두 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{BA}}$의 크기는 선분 AB의 길이로 서로 같다.

개념 파악하기 (2) 벡터의 덧셈은 어떻게 할까?

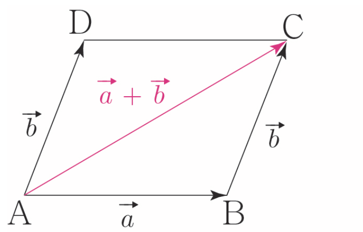
벡터의 덧셈

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 덧셈에 대하여 알아보자.
오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 임의의 한 점 A를 잡고
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$가 되도록 두 점 B, C를 잡는다.
이때 벡터 $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하며, 기호로
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 또는 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$와 같이 나타낸다.



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

또, 평행사변형을 이용하여 두 벡터의 합을 나타낼 수도 있다.
오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고,
사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$이므로
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$이다. 즉, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$이다.

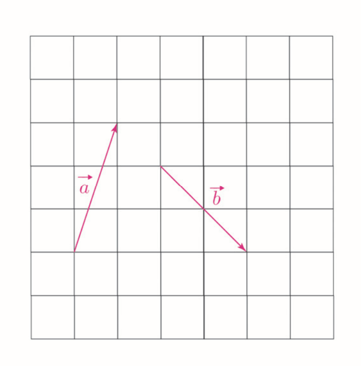


Tip 1 삼각형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때는 벡터 $\vec{a}$의 종점과 벡터 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

Tip 2 평행사변형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때는 벡터 $\vec{a}$의 시점과 벡터 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

Tip 3 특히 두 벡터가 주어졌을 때 어느 한 벡터의 종점이 다른 벡터의 시점과 일치할 때는 삼각형법을 이용하고, 두 벡터의 시점이 일치할 때는 평행사변형법을 이용하는 것이 편리하다.

개념 확인문제 4 다음 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$를 삼각형법과 평행사변형법을 사용하여 각각 모눈종이 위에 나타내시오.



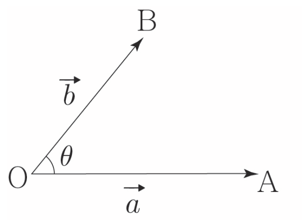
평면벡터

성취 기준 - 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

개념 파악하기 (9) 평면벡터의 내적이란 무엇일까?

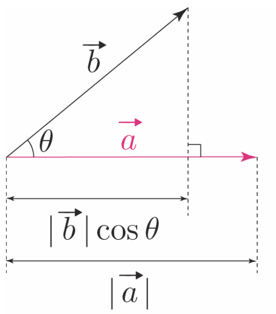
평면벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$일 때
$\theta=\angle AOB$ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라 한다.

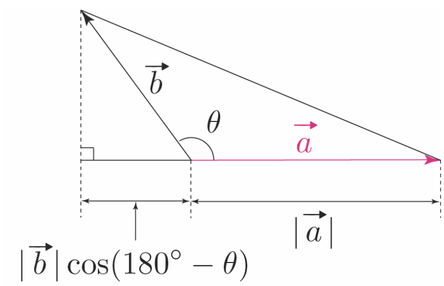


영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,
$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**을 각 θ의 크기에 따라 다음과 같이 정의하고,
기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 와 같이 나타낸다.

① $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ 일 때
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



② $90^\circ < \theta \le 180^\circ$ 일 때
$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$



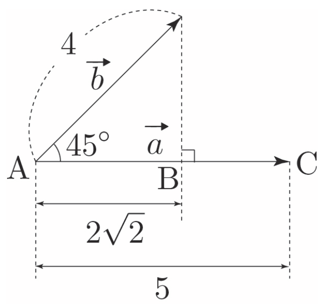
또 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=0$일 때는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

평면벡터의 내적 요약

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때
① $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ 이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
② $90^\circ < \theta \le 180^\circ$ 이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$

ex1 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos0^\circ=|\vec{a}|^2$

ex2 $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, $\theta=45^\circ$



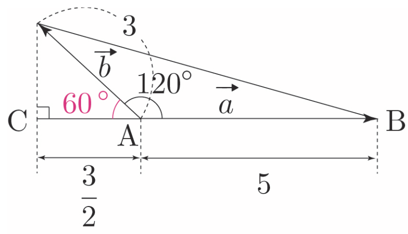
풀이1) 내적공식을 이용한 풀이

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45^\circ=5\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$$

풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\cos45^\circ=|\overrightarrow{AC}|\times|\overrightarrow{AB}|=5\times2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$$

ex3 $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=3,\ \theta=120^\circ$



풀이1) 내적공식을 이용한 풀이

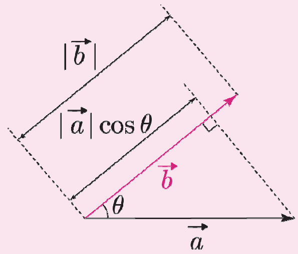
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=5\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{2}$$

풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\times|\vec{b}|\cos60^\circ=-|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|=-5\times\frac{3}{2}=-\frac{15}{2}$$

Tip 1 내적이란 벡터의 방향요소를 제외하고 크기만을 곱하여 결과가 스칼라(방향을 가지고 있지 않고 크기만 가지고 있는 물리량)가 되는 연산을 말한다.
즉, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터가 아니고 실수이다. (중요★)

Tip 2 내적은 두 벡터의 크기를 단순히 곱해주는 것이 아니라
한 쪽을 기준으로 잡았을 때, 다른 한 쪽의 크기를 곱하는 것이다.
위의 개념설명에서는 $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 벡터 $\vec{a}$의 크기와 벡터 $\vec{b}$의
벡터 $\vec{a}$ 위로 수선의 발을 내려 그 크기를 곱하여 나타냈지만
기준을 바꿔서 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{b}$의 크기와 벡터 $\vec{a}$의
벡터 $\vec{b}$ 위로 수선의 발을 내려 그 크기를 곱하여 나타낼 수 있다.

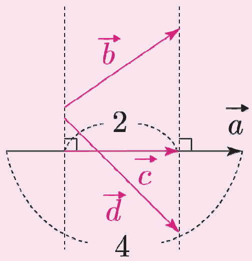


Tip 3 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로 내적의 부호는 θ의 크기에 따라 결정된다.
(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니다.)
① $0^\circ\le\theta<90^\circ$ 일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$
② $\theta=90^\circ$ 일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
③ $90^\circ<\theta\le180^\circ$ 일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$

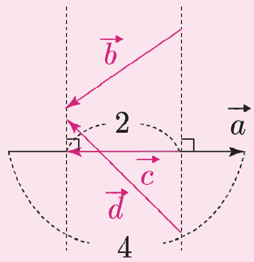
Tip 4 내적공식도 물론 중요하지만 너무 공식에만 초점을 맞추지 말고 그림으로도 기억하자.
특히 어려운 문제일수록 단순 공식보다는 수선의 발을 작도하여 그림으로 해결하는 문제가 주로 출제된다.

Tip 5 실전에서는 내적의 값을 구할 때, 두 벡터의 시점이 일치하지 않은 경우가 대다수이다.
이때 평행이동을 하여 시점을 일치시키지 않아도 수선의 발을 작도하여 내적의 값을 구할 수 있다.

ex1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=4\times2=8$



ex2 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=(-1)\times2\times4=-8$



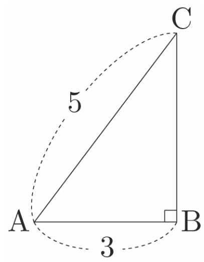
벡터 $\vec{b}$를 벡터 $\vec{a}$ 위로 수선의 발을 내려 나타낸 벡터 $\vec{c}$와 $\vec{a}$의 방향에 따라 내적의 부호가 정해진다. ex1)와 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$의 방향이 같으면 양수이고, ex2)와 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$의 방향이 반대이면 음수이다. 실전에서는 수선의 발을 내려 길이를 통해 내적의 절댓값을 구한 후 방향에 따라 내적의 부호를 결정해주면 된다.

개념 확인문제 28 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=6$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구하시오.

(1) 0°　　(2) 60°　　(3) 90°　　(4) 135°

예제 8

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$, $\angle ABC=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}$

풀이

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

풀이1) 내적공식을 이용한 풀이

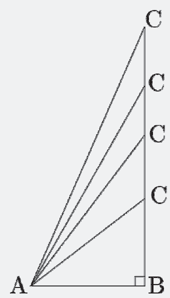
$|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{AC}|=5$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$이므로

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta=3\times5\times\frac{3}{5}=9$$

풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이

이미 그림상에서 수선의 발 작도가 끝난 상태이므로 아주 땡큐한 상황이다.
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|$이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}|^2=9$

Tip 오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서는
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기 θ와 상관없이 $|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|$이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|^2$가 성립한다.

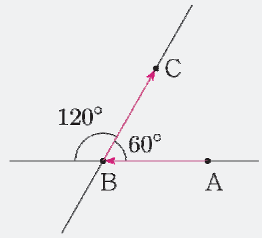


(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}$이도록 점 D를 잡아서 시점을 통일하면 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$이다.

Tip 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$는 두 벡터의 시점을 일치시킬 때, 두 반직선이 이루는 각의 크기이다.

오른쪽 그림에서 두 직선 AB, BC가 이루는 각의 크기는 60° 또는 120°이지만 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터의 시점이 일치된 상태에서 측정하므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점이 B가 되도록 평행이동하면 120°임을 알 수 있다.

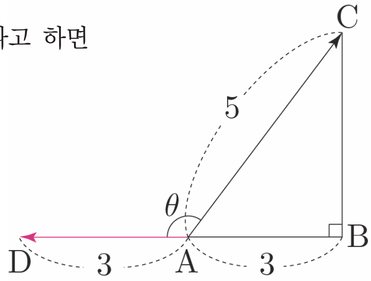


풀이1) 내적공식을 이용한 풀이

$|\overrightarrow{AC}|=5$, $|\overrightarrow{AD}|=3$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}\left(\because\ \cos(180^\circ-\theta)=\dfrac{3}{5}\right)$이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\theta=5\times3\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-9$

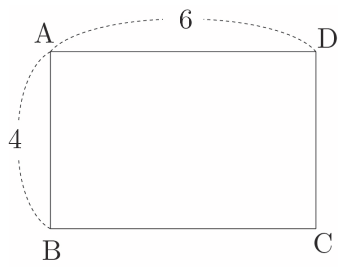


풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이

이미 그림상에서 수선의 발 작도가 끝난 상태이므로 아주 땡큐한 상황이다.
두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $|\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ-\theta)=|\overrightarrow{AB}|$이므로
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-|\overrightarrow{AD}|\times|\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ-\theta)=-|\overrightarrow{AD}|\times|\overrightarrow{AB}|=-3\times3=-9$

개념 확인문제 29

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=6$인 직사각형 ABCD에서 다음을 구하시오.



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(4) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}$

평면벡터의 내적과 성분

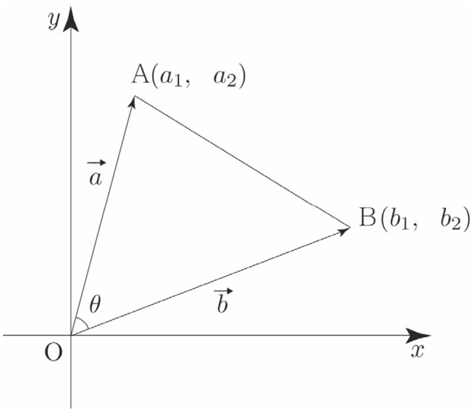
영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$의 내적을 성분으로 나타내어 보자.
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하자.

① $0^\circ<\theta<180^\circ$ 일 때

삼각형 OAB에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ 이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2}$$
$$=\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+{b_1}^2+{b_2}^2-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}}{2}$$
$$=\frac{2a_1b_1+2a_2b_2}{2}=a_1b_1+a_2b_2$$



Tip 참고로 2015 개정교육과정에서 기하는 수1, 수2와 독립적인 과목으로 편성되어 있지만 수능을 위한 교재인 만큼 공통과목인 수1은 당연히 학습했다는 전제로 책을 집필하였다. 기존 교과서에서는 수1에서 배운 코사인법칙을 사용할 수 없기 때문에 수선의 발을 작도해서 증명했지만 코사인법칙을 통해 간단히 증명할 수 있다.

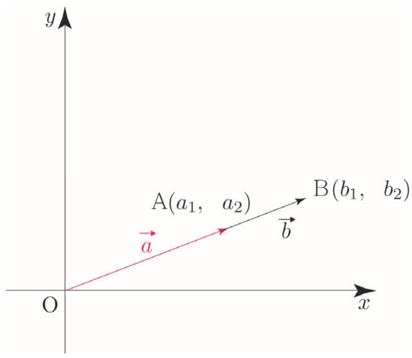
② $\theta=0^\circ$ 일 때

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ (k>0)$이므로 $(b_1,\ b_2)=(ka_1,\ ka_2)$이다.

즉, $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$가 성립한다.

$2a_1b_1a_2b_2=2k^2{a_1}^2{a_2}^2={a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2$ 이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$$
$$=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}=\sqrt{{a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2}$$
$$=\sqrt{{a_1}^2{b_1}^2+2a_1b_1a_2b_2+{a_2}^2{b_2}^2}=\sqrt{(a_1b_1+a_2b_2)^2}=|a_1b_1+a_2b_2|$$
$$=a_1b_1+a_2b_2$$



($k>0$, $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$ 이므로 $a_1b_1+a_2b_2=k{a_1}^2+k{a_2}^2=k({a_1}^2+{a_2}^2)>0$이다.)

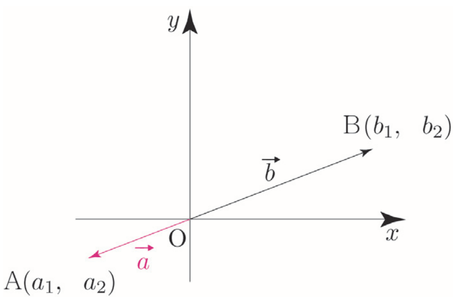
③ $\theta=180^\circ$ 일 때

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ (k<0)$이므로 $(b_1,\ b_2)=(ka_1,\ ka_2)$이다.

즉, $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$가 성립한다.

$2a_1b_1a_2b_2=2k^2{a_1}^2{a_2}^2={a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2$ 이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$$
$$=-\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}=-\sqrt{{a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2}$$
$$=-\sqrt{{a_1}^2{b_1}^2+2a_1b_1a_2b_2+{a_2}^2{b_2}^2}=-\sqrt{(a_1b_1+a_2b_2)^2}=-|a_1b_1+a_2b_2|$$
$$=a_1b_1+a_2b_2$$



($k<0$, $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$ 이므로 $a_1b_1+a_2b_2=k{a_1}^2+k{a_2}^2=k({a_1}^2+{a_2}^2)<0$이다.)

평면벡터의 내적과 성분 요약

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

ex1 $\vec{a}=(1,\ 4)$, $\vec{b}=(-2,\ 3)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+4\times3=-2+12=10$

ex2 $\vec{c}=(3,\ 4)$일 때, $\vec{c}\cdot\vec{c}=3\times3+4\times4=25$

Tip 1 위 공식은 $0^\circ\le\theta\le180^\circ$일 때 모두 성립하고, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=0$일 때에도 성립한다.

Tip 2 ⟨$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 증명⟩
① 내적공식으로 증명 : $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos0^\circ=|\vec{a}|^2$
② 성분내적공식으로 증명 : $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2=a_1{}^2+a_2{}^2=|\vec{a}|^2$

Tip 3 성분을 이용한 평면벡터의 내적은 두 벡터가 이루는 각의 크기를 사용하지 않고 나타낼 수 있기에 유용하다.

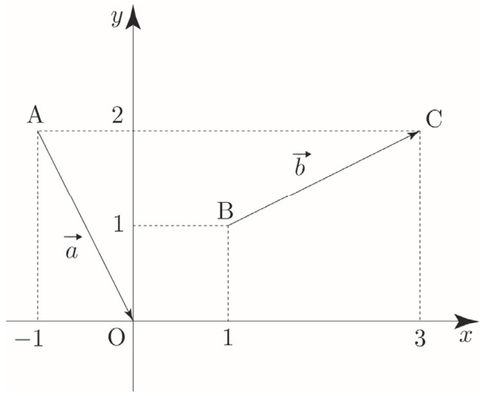
개념 확인문제 30 다음 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적을 구하시오.

(1) $\vec{a}=(-2,\ -5)$, $\vec{b}=(1,\ -3)$

(2) $\vec{a}=(0,\ -4)$, $\vec{b}=(10,\ 1)$

벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기

오른쪽 그림의 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 성분으로 나타내어 보자.



① 좌표를 이용하는 방법

A$(-1,\ 2)$, B$(1,\ 1)$, C$(3,\ 2)$, O$(0,\ 0)$

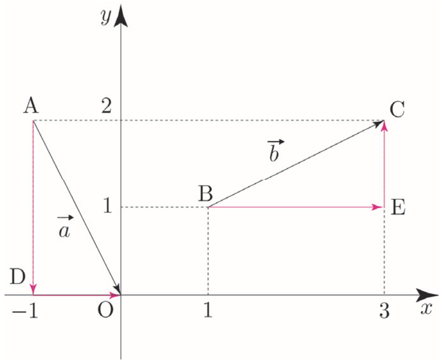
$\vec{a} = \overrightarrow{AO} = (0-(-1),\ 0-2) = (1,\ -2)$

$\vec{b} = \overrightarrow{BC} = (3-1,\ 2-1) = (2,\ 1)$

② 벡터의 분해를 이용하는 방법 (실전용)

오른쪽 그림과 같이 x축, y축에 수직이 되도록 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 분해하면 다음과 같다.

$\vec{a} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$, $\quad \vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$



이때, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OP}$가 되도록 점 P를 잡으면

점 P$(0,\ -2)$이므로 $\overrightarrow{AD} = (0,\ -2)$이고,

$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OQ}$가 되도록 점 Q를 잡으면

점 Q$(1,\ 0)$이므로 $\overrightarrow{DO} = (1,\ 0)$이다.

따라서 $\vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = (0,\ -2) + (1,\ 0) = (1,\ -2)$이다.

위와 마찬가지 논리로 $\overrightarrow{BE} = (2,\ 0)$이고, $\overrightarrow{EC} = (0,\ 1)$이다.

따라서 $\vec{b} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = (2,\ 0) + (0,\ 1) = (2,\ 1)$이다.

Tip 실전에서는 수직으로 분해된 벡터들의 방향(→ ← ↑ ↓)과 크기만 보고 벡터의 성분을 빠르게 구하면 된다.

ex1 위 문제에서 $\overrightarrow{AD}$의 방향은 ↓이므로 $(0,\ -1)$의 실수배이고, $\overline{AD} = 2$이므로 $\overrightarrow{AD} = (0,\ -2)$인 것을 알 수 있다.

ex1 위 문제에서 $\overrightarrow{BE}$의 방향은 →이므로 $(1,\ 0)$의 실수배이고, $\overline{BE} = 2$이므로 $\overrightarrow{BE} = (2,\ 0)$인 것을 알 수 있다.

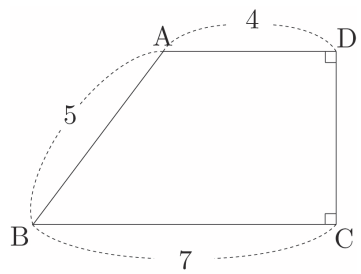
[예제 13], [개념 확인문제 38]을 통해 이를 적용하여 내적의 값을 구해보자.

평면벡터

예제 13

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$, $\overline{AD}=4$, $\angle BCD=\angle CDA=90^\circ$ 인 사다리꼴 ABCD에서 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$ (2) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}$



풀이

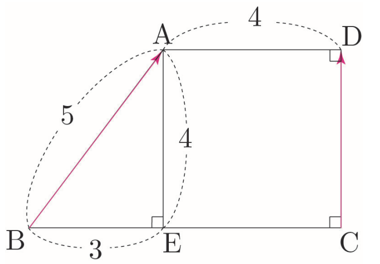
(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}=7-4=3$이고,

삼각형 ABE에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$\overline{AE}=\sqrt{5^2-3^2}=4$이다.



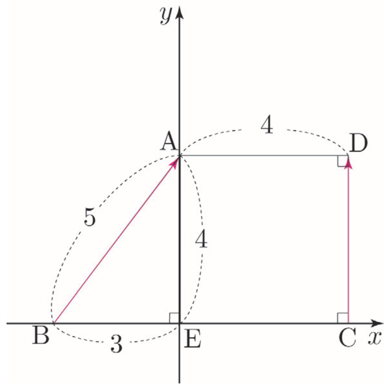
오른쪽 그림과 같이 x축과 y축을 설정한 후

벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 보자.

$\overrightarrow{BA}=(3,\ 0)+(0,\ 4)=(3,\ 4)$

$\overrightarrow{CD}=(0,\ 4)$

따라서 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=3\times0+4\times4=16$이다.



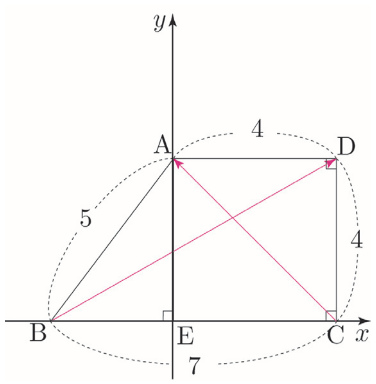
(2) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}$

(1)과 같은 논리로 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 보자.

$\overrightarrow{BD}=(7,\ 0)+(0,\ 4)=(7,\ 4)$

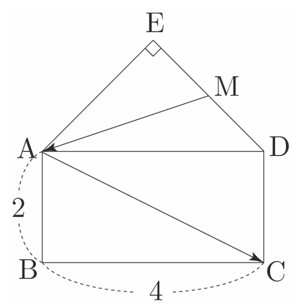
$\overrightarrow{CA}=(0,\ 4)+(-4,\ 0)=(-4,\ 4)$

따라서 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=7\times(-4)+4\times4=-28+16=-12$이다.



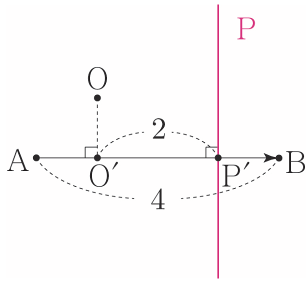
개념 확인문제 38

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD와 $\overline{EA}=\overline{ED}$, $\angle AED=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 ADE가 있다. 선분 DE의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값을 구하시오.



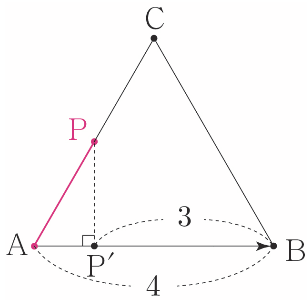
벡터의 내적과 점 P 자취

① $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$, $|\overrightarrow{AB}| = 4$



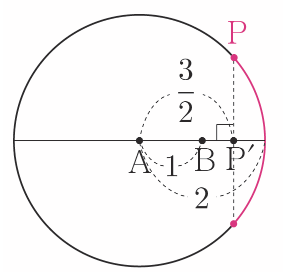
세 점 O, A, B의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,
점 O에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 O′라 하고
점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P′라 하자.
내적값이 양수이므로 두 벡터 $\overrightarrow{O'P'}$, $\overrightarrow{AB}$의 방향이 같으면서
$|\overrightarrow{O'P'}| = 2$가 되도록 점 P′를 잡으면
점 P의 자취는 점 P′를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이다.

② $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} \leq -12$, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC}$ $(0 \leq t \leq 1)$



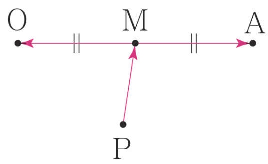
세 점 A, B, C의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,
$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC}$ $(0 \leq t \leq 1)$이므로 점 P는 선분 AC 위를 움직인다.
점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P′라 하자.
내적값이 음수이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP'}$의 방향이 반대면서
$|\overrightarrow{BP'}| \geq 3$가 되도록 점 P′를 잡으면
점 P의 자취는 오른쪽 그림에서 색칠한 선분이다.

③ $|\overrightarrow{AP}| = 2$, $|\overrightarrow{AB}| = 1$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \frac{3}{2}$

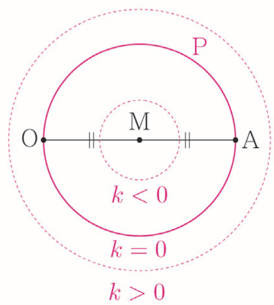


두 점 A, B의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,
$|\overrightarrow{AP}| = 2$이므로 점 P는 중심이 A이고 반지름이 2인 원의 둘레 위를 움직인다. 점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P′라 하자. 내적값이 양수이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AP'}$, $\overrightarrow{AB}$의 방향이 같으면서
$|\overrightarrow{AP'}| \geq \frac{3}{2}$가 되도록 점 P′를 잡으면
점 P의 자취는 오른쪽 그림에서 색칠한 호이다.

④ $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = k$



두 점 O, A의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,
선분 OA의 중점을 M이라 하고, 중점으로 분해하면
$\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}$이므로
$(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MO}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) = k$이다.
이때 $\overrightarrow{MO} = -\overrightarrow{MA}$이므로
$(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = k$
$\therefore$ $|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{|\overrightarrow{MA}|^2 + k}$



점 P의 자취는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\sqrt{|\overrightarrow{MA}|^2 + k}$인 원이다. ($k$의 범위에 따라 반지름의 길이가 달라진다.)

Tip ④에서 소개한 중점분해 Technique은 실전에서 굉장히 유용하게 쓰이는 Technique 중 하나이니
$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = (\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = k$가 유도되는 과정을 반드시 기억하도록 하자.

평면벡터

07 사교좌표계 (심화 특강)

성취 기준 - 사교좌표계를 이용하여 벡터를 일차결합으로 나타낼 수 있다.

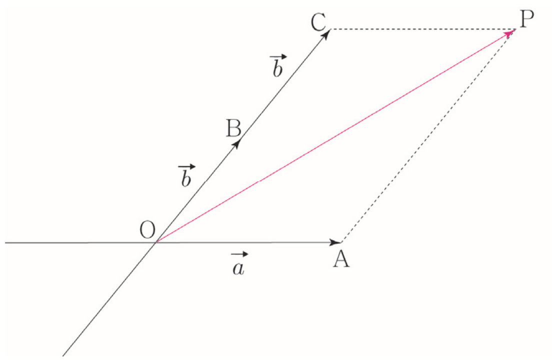
개념 파악하기 (16) 사교좌표계란 무엇일까?

사교좌표계

원하는 좌표를 효과적으로 표현하기 위해 우리가 자주 보는 직교좌표계부터 극좌표계, 천구 좌표계, 관성 좌표계 등 정말 다양한 좌표계가 존재한다.
여러 좌표계 중에서 사교좌표계는 평면벡터 문제 풀이에 큰 도움이 되기에 이를 소개하고자 한다.

직교좌표계가 두 좌표축이 직각으로 교차하는 좌표계라면 사교좌표계는 두 좌표축이 사선으로 교차하는 좌표계를 의미한다.

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 임의의 점 P의 위치벡터가 $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s, t는 실수)로 나타내어질 때, 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이 평면의 기저라고 한다.
오른쪽 그림처럼 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 기저로 하는 평면에 대하여 점 P의 위치벡터는 $\overrightarrow{OP}=\vec{a}+2\vec{b}$로 나타낼 수 있다.



사교좌표계를 도입해서 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 성분으로 표현해보자.
직교좌표계에서 좌표평면 위의 두 점 $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$의 원점 O에 대한 위치벡터를 각각 단위벡터 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$라고 정의한 뒤 성분으로 나타내었다.

이때 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대응시켜
$\vec{a}=(1, 0)$라 하고, $\vec{b}=(0, 1)$라 하면 $\overrightarrow{OP}=(1, 2)$로 간단히 표현할 수 있다.

Tip **<조심해야 할 점>**

$(1, 2)$는 실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안 된다. 실제는 $\overrightarrow{OP}=\vec{a}+2\vec{b}$와 같다.

크기와 각이 직교좌표계와 다르기 때문에 $|\overrightarrow{OP}|$의 값을 구할 때도 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$라 할 수 없다. 실제 $|\overrightarrow{OP}|$의 값을 구하기 위해서는 다시 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 일차결합으로 돌려준 후 제곱을 해서 구하면 된다.

만약 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}$라면 $|\overrightarrow{OP}|=|\vec{a}+2\vec{b}| \Rightarrow |\overrightarrow{OP}|^2=|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+4|\vec{b}|^2=\frac{19}{3}$

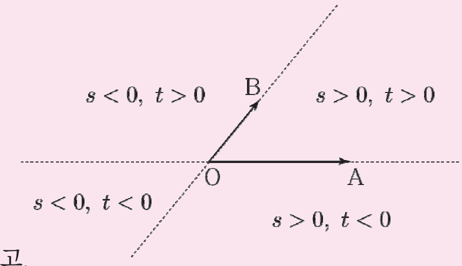
이므로 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\frac{19}{3}}=\frac{\sqrt{57}}{3}$이다.

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s, t는 실수)를 만족시키는 점 P의 자취

이번에는 사교좌표계를 이용하여 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s, t는 실수)를 만족시키는 점 P의 자취를 구해보자.

Tip 사교좌표계는 직교좌표계를 살짝 찌그러트렸다고 생각하면 되고, 헷갈리는 경우에는 사교좌표계와 상대적인 위치관계가 동일한 직교좌표계를 설정하여 직교좌표계를 먼저 해석하고 이를 바탕으로 사교좌표계를 해석하면 된다.

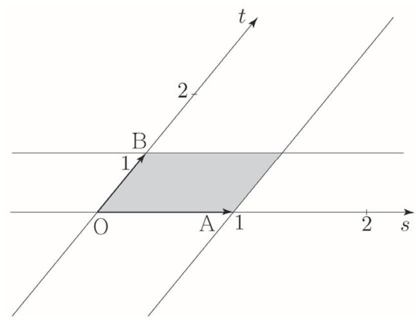
직교좌표계를 떠올리면서 s, t의 부호에 따라 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s, t는 실수)를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 구분하면 오른쪽 그림과 같다.



$s=0$일 때, $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB}$이므로 점 P의 자취는 직선 OB이고,
$t=0$일 때, $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}$이므로 점 P의 자취는 직선 OA이다.

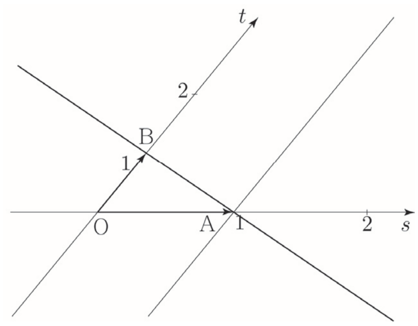
① $0 \le s \le 1$, $0 \le t \le 1$일 때

점 P의 자취는 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형과 그 내부이다.



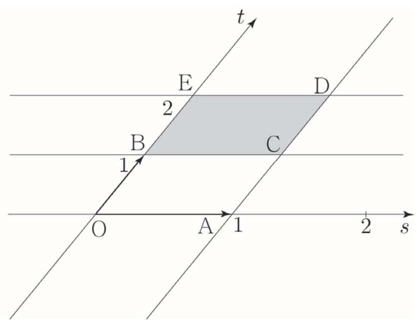
② $s+t=1$일 때

점 P의 자취는 직선 AB이다.
(직선 $x+y=1$을 떠올려보자.)



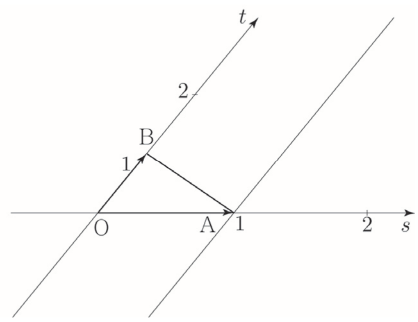
③ $0 \le s \le 1$, $1 \le t \le 2$일 때

점 P의 자취는 평행사변형 BCDE와 그 내부이다.



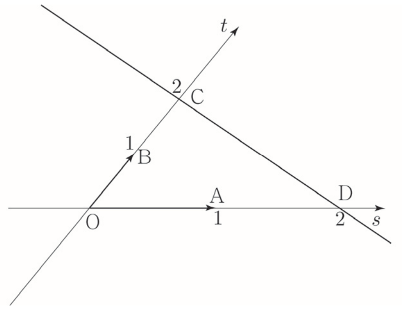
④ $s \ge 0$, $t \ge 0$, $s+t=1$일 때

점 P의 자취는 선분 AB이다.



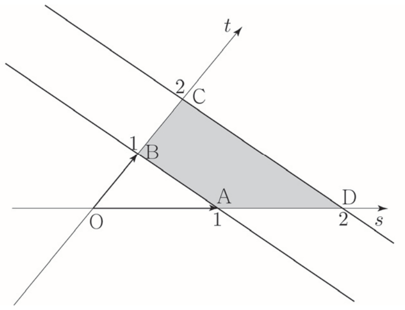
⑤ $s+t=2$일 때

점 P의 자취는 직선 CD이다.
(직선 $x+y=2$을 떠올려보자.)

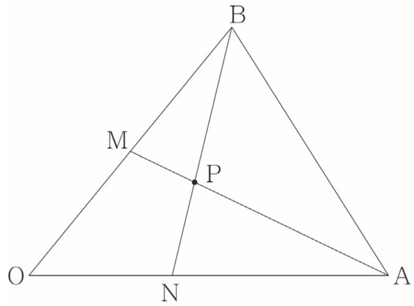


⑥ $s \geq 0$, $t \geq 0$, $1 \leq s+t \leq 2$일 때

점 P의 자취는 사각형 ABCD와 그 내부이다.
(직선 $x+y=a$에서 $1 \leq a \leq 2$일 때를 떠올려보자.)



벡터를 일차결합으로 나타내기

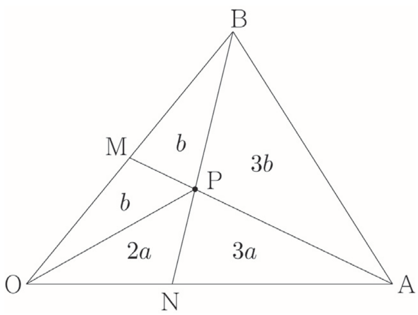


오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABO에서 선분 OB의 중점을 M,
선분 OA를 2 : 3로 내분하는 점을 N이라 하고,
두 선분 BN, AM의 교점을 P라 할 때,
$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 s, t의 값을 구해보자.

① **넓이비를 이용하는 방법 (중학교 도형 해석)**

$\overrightarrow{ON} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$이므로 선분 BP와 선분 PN의 길이비만 구하면 된다.

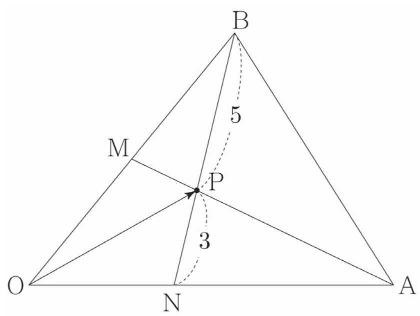
넓이비를 이용하여 이를 구해보자.



삼각형 OPN의 넓이를 $2a$라 하면, 높이가 동일하고 밑변의 길이비가
$\overline{ON} : \overline{NA} = 2 : 3$이므로 삼각형 PNA의 넓이는 $3a$이다.
삼각형 OPM의 넓이를 b라 하면, 높이가 동일하고 밑변의 길이비가
$\overline{OM} : \overline{MB} = 1 : 1$이므로 삼각형 PMB의 넓이는 b이다.

삼각형 BPA의 넓이를 x라 하면
삼각형 OBN의 넓이는 $2a+2b$, 삼각형 BNA의 넓이는 $3a+x$이다.
이때 두 삼각형 OBN, BNA는 높이가 동일하고 밑변의 길이비가
$\overline{ON} : \overline{NA} = 2 : 3$이므로 $2a+2b : 3a+x = 2 : 3 \Rightarrow 6a+2x = 6a+6b \Rightarrow x = 3b$

삼각형 OAM의 넓이는 $b+5a$, 삼각형 BAM의 넓이는 $4b$이다.
이때 두 삼각형 OAM, BAM는 높이가 동일하고 밑변의 길이비가
$\overline{OM} : \overline{MB} = 1 : 1$이므로 $b+5a = 4b \Rightarrow 5a = 3b \Rightarrow a : b = 3 : 5$



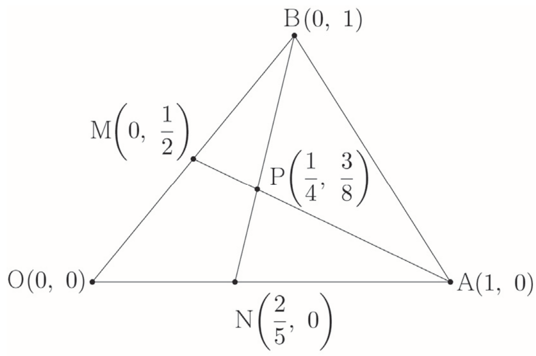
$a=3k$, $b=5k$라 하면 삼각형 BPA의 넓이는 $15k$, 삼각형 PNA의
넓이가 $9k$이다.
이때 두 삼각형 BPA, PNA는 높이가 동일하고 밑변의 길이비는
$\overline{BP} : \overline{PN} = 5 : 3$이다.

$\overrightarrow{OP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{ON} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$이므로 $s = \frac{1}{4}$, $t = \frac{3}{8}$이다.

② **사교좌표계를 이용하는 방법**

이번에는 사교좌표계를 이용하여 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 s, t의 값을 구해보자.

$O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$라 하면 $M\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{2}{5},\ 0\right)$이다.



직선 AM의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이고,

직선 BN의 방정식은 $y=-\frac{5}{2}x+1$이므로

두 직선의 교점의 좌표를 구하면 $P\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)$이다.

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$에서

$\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)=(s,\ 0)+(0,\ t)=(s,\ t)$이므로 $s=\frac{1}{4}$, $t=\frac{3}{8}$이다.

별개로 $\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 k, l의 값을 구해보자.

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)-\left(0,\ \frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$에서 $\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)=(k,\ 0)+(0,\ l)=(k,\ l)$이므로 $k=\frac{1}{4}$, $l=-\frac{1}{8}$이다.

이처럼 사교좌표계를 이용하면 원하는 벡터를 일차결합으로 손쉽게 나타낼 수 있다.

Tip 이전 Tip에서도 언급했듯이 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)$는 실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안 된다.

예를 들어 선분 BP와 선분 PN의 길이를 구할 때, $B(0,\ 1)$, $P\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)$, $N\left(\frac{2}{5},\ 0\right)$에서

$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{8}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{25}{64}}=\frac{\sqrt{29}}{8}$,

$|\overrightarrow{PN}|=\sqrt{\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{400}+\frac{9}{64}}=\frac{3\sqrt{29}}{40}$

라고 판단하지 않도록 유의해야 한다.

올바르게 구하면 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{5}{8}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PN}=\frac{3}{20}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$이므로 다음과 같다.

$|\overrightarrow{BP}|^2=\left|\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{5}{8}\overrightarrow{OB}\right|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{BP}|=\sqrt{\frac{1}{16}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{5}{16}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{25}{64}|\overrightarrow{OB}|^2}$

$|\overrightarrow{PN}|^2=\left|\frac{3}{20}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}\right|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{PN}|=\sqrt{\frac{9}{400}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{9}{80}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{9}{64}|\overrightarrow{OB}|^2}$

또한 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MP}$의 값을 구할 때, $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)$, $\overrightarrow{MP}=\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$에서

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MP}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}-\frac{3}{64}=\frac{1}{64}$라고 판단하지 않도록 유의해야 한다.

올바르게 구하면 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}$이므로 다음과 같다.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MP}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{16}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1}{16}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{3}{64}|\overrightarrow{OB}|^2$

즉, 사교좌표계는 단순히 벡터를 일차결합으로 손쉽게 표현하기 위해 도입한 도구로서 받아들이면 된다.

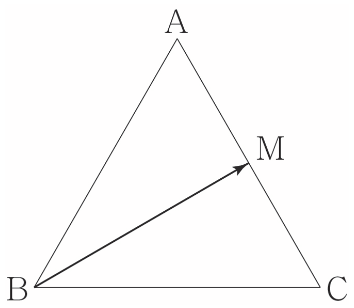
Theme 1 평면벡터의 크기와 연산

001

한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$의 값을 구하시오.

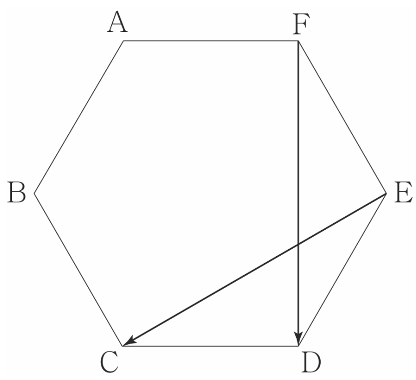
002

그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC의 변 AC의 중점을 M이라 하자. $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 되도록 점 D를 잡을 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$의 값을 구하시오.



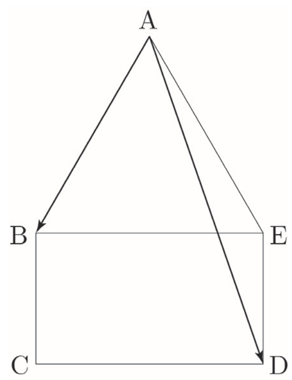
003

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{FD}}|$의 값을 구하시오.



004

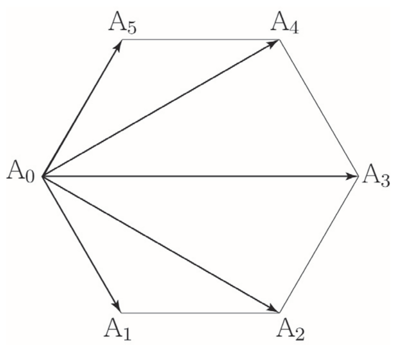
그림과 같이 정삼각형 ABE와 직사각형 BEDC가 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=8$일 때, 삼각형 ABE의 넓이는?



① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

005

그림과 같이 정육각형 $\mathrm{A_0A_1A_2A_3A_4A_5}$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{A_4A_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_5A_2}}|=4\sqrt{3}$일 때, $\left|\sum_{k=1}^{5}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_k}}\right|$의 값을 구하시오.



013

두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$가 있다. 벡터 $\vec{c}$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}+\vec{c}$가 서로 평행할 때, $|\vec{c}|^2$의 최솟값은 k이다. $20k$의 값을 구하시오

014

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$에 대하여 벡터 $\vec{p}=(a,\ b)$가 다음 조건을 만족시킨다.

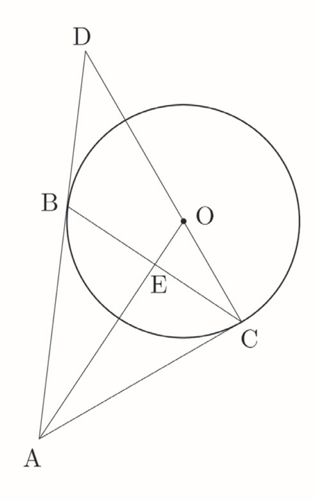
(가) 벡터 $\vec{p}$는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 방향이 반대이다.
(나) $|\vec{p}|=3$

$25(a-b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

Theme 4 내분점과 외분점의 위치벡터

015

그림과 같이 점 A에서 중심이 O인 원에 접하도록 접선을 그을 때, 두 접점을 B, C라 하자.
직선 AB와 직선 CO가 만나는 점을 D라 하고,
선분 AO와 선분 BC가 만나는 점을 E라 하자.
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=5$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=m\overrightarrow{\mathrm{AC}}+n\overrightarrow{\mathrm{AD}}$이고
$k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}$이다. 세 실수 m, n, k에 대하여
$40(m-n+k)$의 값을 구하시오.

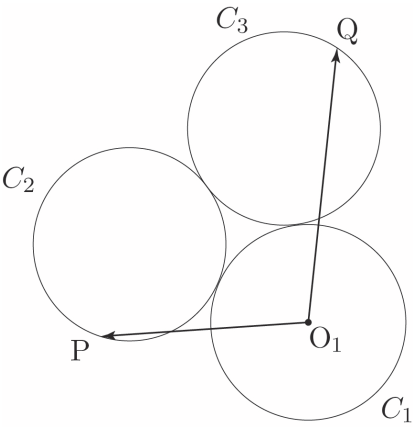


016

정삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자.
$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+3\overrightarrow{\mathrm{GB}}|=8$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

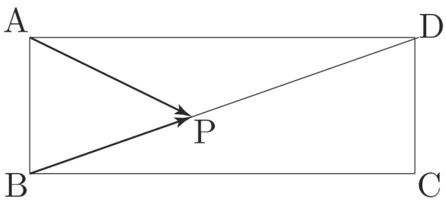
027

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 세 개의 원 C_1, C_2, C_3가 서로 외접하고 있다. 원 C_1의 중심을 O_1이라 하고, 두 원 C_2, C_3 위를 움직이는 점을 각각 P, Q라 할 때, $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1Q}|$의 최댓값은 $a\sqrt{3}+b$이다. $a\times b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.)



028

그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD에서 대각선 BD 위의 점을 P라 하자. $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



Theme 6 평면벡터의 자취

029

평면 위의 세 점 O, A, B에 대하여

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=3,\quad |\overrightarrow{OB}|=2$$

일 때, $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(0\le m\le 2,\ 0\le n\le 1)$를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오.

030

평면 위에 한 변의 길이가 2인 정삼각형 OAB이 있다.

$$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (m\ge 0,\ n\ge 0)$$

를 만족시키는 점 P가 그리는 도형에 대한 설명을 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $m+n=1$일 때, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.

ㄴ. $3m+n=1$일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는 $\frac{2\sqrt{7}}{3}$이다.

ㄷ. $2m+n\le 2$일 때, 점 P가 그리는 영역의 넓이는 $\sqrt{3}$이다.

ㄹ. $1\le m+n\le 2$일 때, 점 P가 그리는 영역의 넓이는 $3\sqrt{3}$이다.

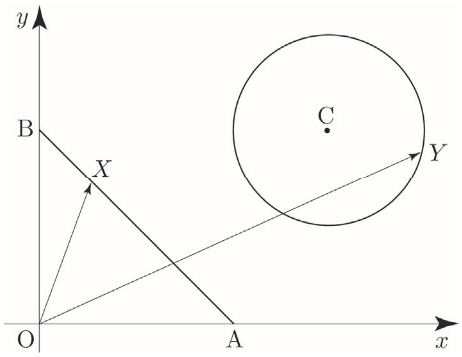
ㅁ. $6m+4n=4$일 때, $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$이다.

031

좌표평면 위에 세 점 A(2, 0), B(0, 2), C(3, 2)이 있다. 선분 AB 위를 움직이는 점 X와 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역의 넓이는 $a\pi+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.)

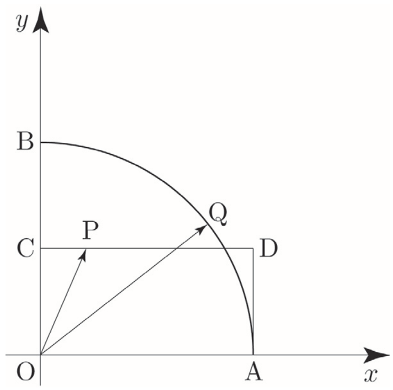


032

좌표평면 위에 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(0, 1), D(2, 1)가 있다. 사각형 OADC의 변 위를 움직이는 점 P와 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직이는 점 Q에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역을 R라 하자.
점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하고, 영역 R의 넓이를 S라 할 때, $M+m+S=a+\sqrt{b}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.)



086 • 2023학년도 수능 기하

좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(2,\ 4),\quad \vec{b}=(2,\ 8),\quad \vec{c}=(1,\ 0)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

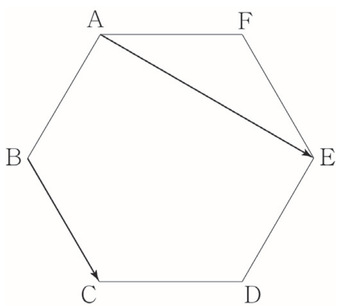
$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0,\quad \vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}\quad (t\text{는 실수})$$

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

087 • 2022학년도 고3 6월 평가원 기하

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]



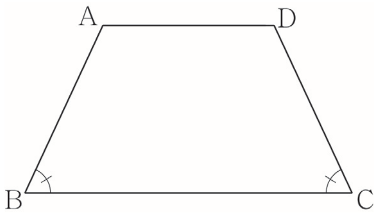
① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

088 • 2021년 고3 10월 교육청 기하

그림과 같이 변 AD가 변 BC와 평행하고 $\angle CBA=\angle DCB$인 사다리꼴 ABCD가 있다.

$$|\overrightarrow{AD}|=2,\ |\overrightarrow{BC}|=4,\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$$

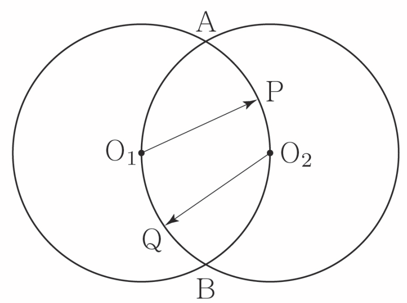
일 때, $|\overrightarrow{BD}|$의 값은? [3점]



① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

089 • 2009학년도 고3 9월 평가원 가형

평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

삼수선의 정리

성취 기준 - 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

개념 파악하기 (5) 삼수선의 정리란 무엇일까?

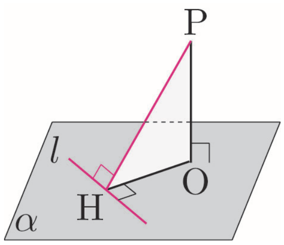
삼수선의 정리

삼수선의 정리에 대하여 알아보자.

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음이 성립한다.

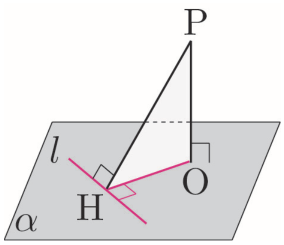
① $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\overline{PH}\perp l$

$\overline{PO}\perp\alpha$이고 직선 l은 평면 α 위의 직선이므로 $\overline{PO}\perp l$이다.
또, $\overline{OH}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{PO}$와 $\overline{OH}$에 의하여 결정되는 평면 PHO와 수직이다.
이때 $\overline{PH}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{PH}\perp l$이다.



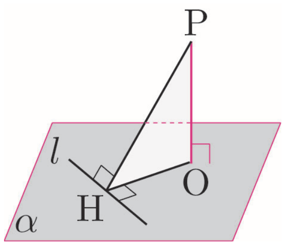
② $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$

$\overline{PO}\perp\alpha$이고 직선 l은 평면 α 위의 직선이므로 $\overline{PO}\perp l$이다.
또, $\overline{PH}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{PO}$와 $\overline{PH}$에 의하여 결정되는 평면 PHO와 수직이다.
이때 $\overline{OH}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{OH}\perp l$이다.



③ $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

$\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$에서 $\overline{PH}$와 $\overline{OH}$에 의하여 결정되는 평면 PHO는 직선 l과 수직이다.
이때 $\overline{PO}$는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{PO}$와 직선 l은 수직이다.
또 $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이므로 $\overline{PO}$는 두 직선 OH와 직선 l로 결정되는 평면 α와 수직이다. 즉, $\overline{PO}\perp\alpha$이다.

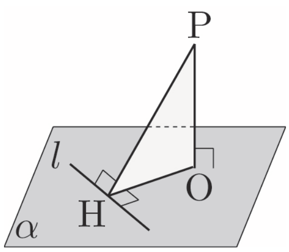


이를 **삼수선의 정리**라고 한다.

삼수선의 정리 요약

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여

① $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\overline{PH}\perp l$
② $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$
③ $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

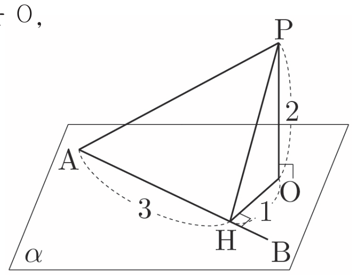


공간도형과 공간좌표

Tip 만약 삼수선의 정리를 사용할 때, 아래 그림과 같이 교선이 짧아서 점 P에서 교선에 수선의 발을 내리기 어려운 경우에는 교선을 연장하면 된다.

예제 5

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{PO}=2$, $\overline{HO}=1$, $\overline{AH}=3$일 때, 삼각형 AHP의 넓이를 구하시오.



풀이

$\overline{PO}\perp\alpha$이고 $\overline{HO}$가 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO}\perp\overline{HO}$이다.

삼각형 HOP는 직각삼각형이므로 $\overline{PH}^2=\overline{HO}^2+\overline{PO}^2=1^2+2^2=5 \Rightarrow \overline{PH}=\sqrt{5}$이다.

한편 $\overline{PO}\perp\alpha$이고 $\overline{HO}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$이다.

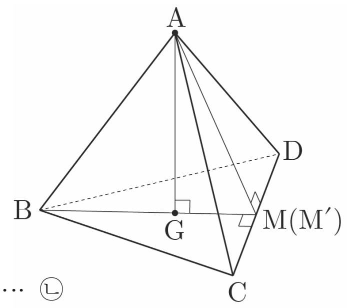
삼각형 AHP는 직각삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{HP}=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$이다.

따라서 삼각형 AHP의 넓이는 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$이다.

정사면체

자주 출제되는 입체도형인 정사면체의 특징에 대하여 알아보자.
한 변의 길이를 a라 할 때, 다음이 성립한다.

① 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발 = 삼각형 BCD의 무게중심



점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 M, 점 B에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 M′이라 하면 $\overline{AM}\perp\overline{CD}$, $\overline{BM'}\perp\overline{CD}$이다.
이때 삼각형 ACD와 삼각형 BCD가 정삼각형이므로 점 M과 점 M′은 선분 CD의 중점이 되어 점 M과 점 M′이 서로 일치한다.
즉 $\overline{BM'}\perp\overline{CD}$에서 $\overline{BM}\perp\overline{CD}$ ⋯ ㉠
한편 $\overline{AG}\perp$(평면 BCD), $\overline{AM}\perp\overline{CD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{GM}\perp\overline{CD}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 점 G는 선분 BM 위에 있다.
같은 방법으로 점 G는 점 C에서 선분 BD에 내린 수선 위에 있고, 삼각형 BCD는 정삼각형이므로 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

② 정사면체의 높이 $=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

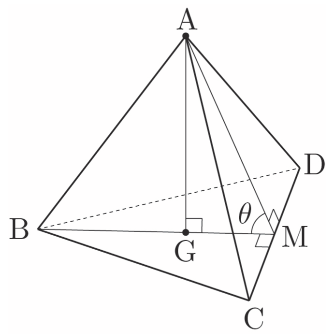
$\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{GM}=\dfrac{1}{3}\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$이므로 삼각형 AGM에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{GM}^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2-\dfrac{1}{12}a^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$이다.

따라서 한 변의 길이가 a인 정사면체의 높이는 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$이다.

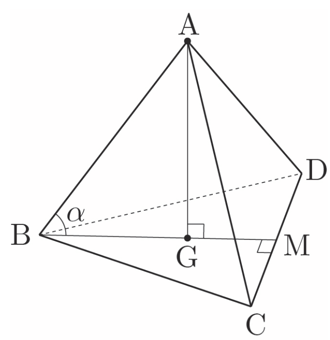
③ 정사면체의 두 면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$$\cos\theta=\frac{\overline{GM}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}$$



④ 정사면체의 한 모서리와 평면이 이루는 각을 α라 할 때, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

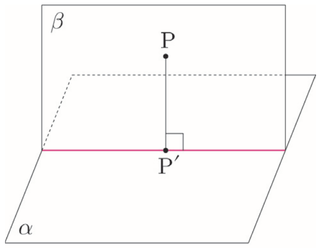


평면에 내린 수선의 발 작도하기

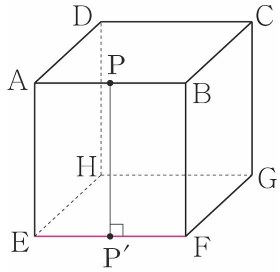
평면 α 위에 있지 않은 점에서 평면 α에 내린 수선의 발을 작도하는 방법에 대해 알아보자.

① 수직인 평면을 이용하기

오른쪽 그림과 같이 평면 α에 수직인 평면 β라 하면 평면 β 위의 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′은 두 평면의 교선 위에 떨어진다.
즉, 수직인 평면이 이미 작도되어 있는 상태에서는 교선만 찾으면 비교적 쉽게 수선의 발을 작도할 수 있다.

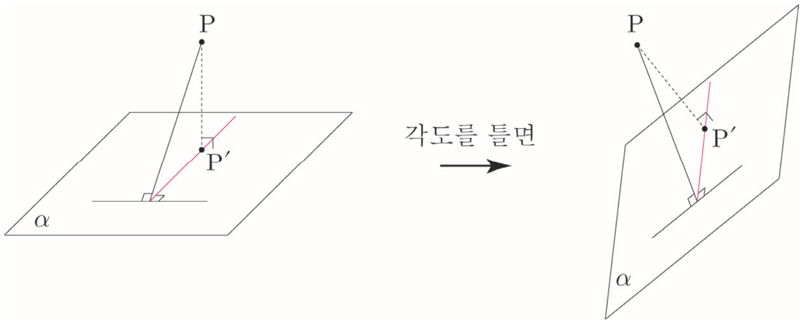


ex 오른쪽 그림과 같이 정육면체에서 두 평면 AEFB와 EFGH은 서로 수직이므로 점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발은 직선 EF(교선)에 떨어진다.

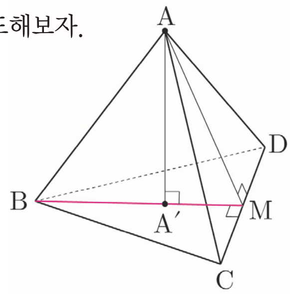


② 삼수선의 정리를 이용하기

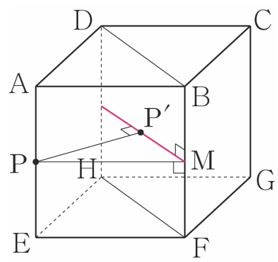
수직인 평면이 작도되어 있지 않다면 삼수선의 정리를 이용하여 수직인 평면을 작도한 뒤 수선의 발이 떨어지는 교선을 만들어주면 된다.
다음 그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발은 색칠한 선 위에 떨어진다.



ex1 오른쪽 그림과 같이 정사면체에서 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 작도해보자.
선분 CD의 중점을 M이라 할 때, 삼수선의 정리를 이용하여 평면 BCD에 수직인 평면을 작도하면 두 평면의 교선은 색칠한 선이다.
따라서 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 색칠한 선(교선)위에 떨어진다.

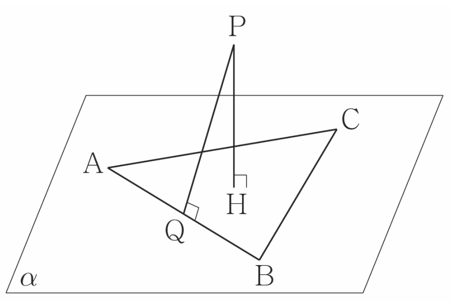


ex2 오른쪽 그림과 같이 정육면체에서 선분 AE의 중점인 P에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발을 작도해보자. 선분 BF의 중점을 M이라 할 때, 삼수선의 정리를 이용하여 평면 DHFB에 수직인 평면을 작도하면 두 평면의 교선은 색칠한 직선이다.
따라서 점 P에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발은 색칠한 선(교선) 위에 떨어진다.



034 • 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

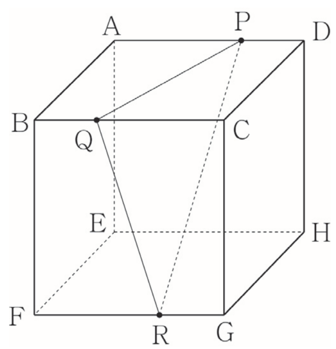
그림과 같이 평면 α 위에 넓이가 24인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고, $\overline{\mathrm{PH}}=4$, $\overline{\mathrm{AB}}=8$일 때, 선분 PQ의 길이는? [3점]



① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{26}$

035 • 2005학년도 수능 가형

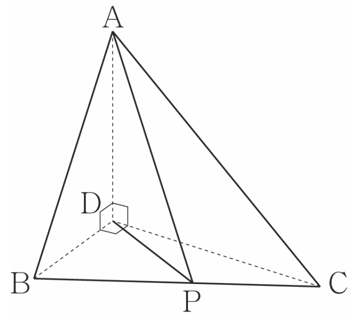
그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 ABCD − EFGH의 세 모서리 AD, BC, FG 위에 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{GR}}=1$인 세 점 P, Q, R가 있다. 평면 PQR와 평면 CGHD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]



① $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ④ $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{11}}{11}$

036 • 2022학년도 고3 9월 평가원 가형

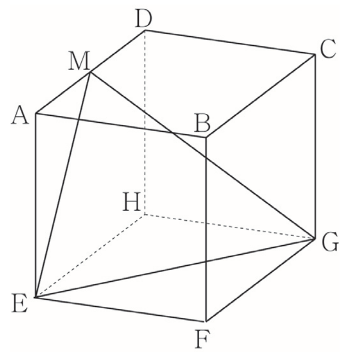
그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{DB}}=2$, $\overline{\mathrm{DC}}=2\sqrt{3}$이고 $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDC}=\frac{\pi}{2}$인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{DP}}$의 최솟값은? [3점]



① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

037 • 2022학년도 수능 기하

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD − EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]



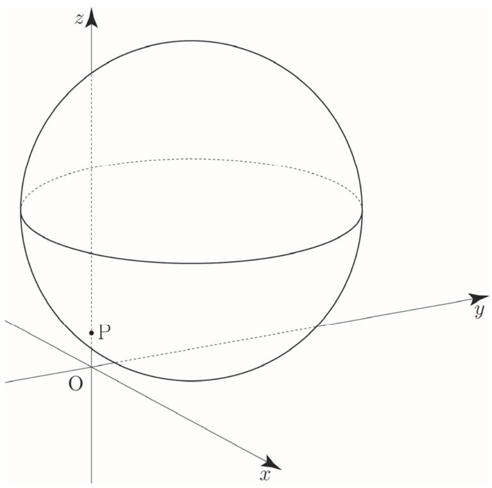
① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

068 • 2022학년도 수능 기하

좌표공간에 중심이 C$(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 P$(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S : (x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



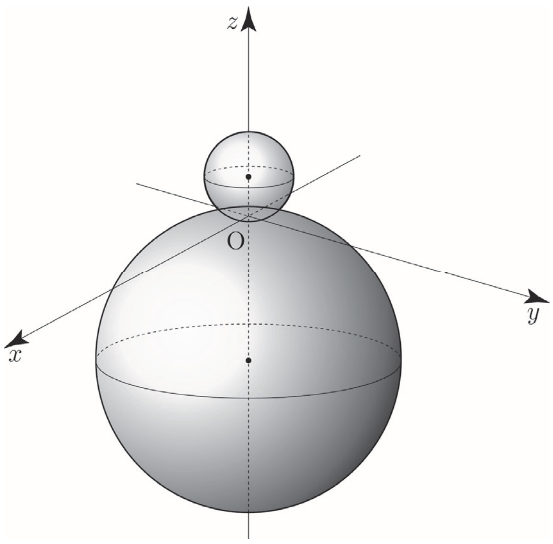
069 • 2023학년도 고3 9월 평가원 기하

좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4,\quad S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 A$(\sqrt{5},\ 0,\ 0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자.

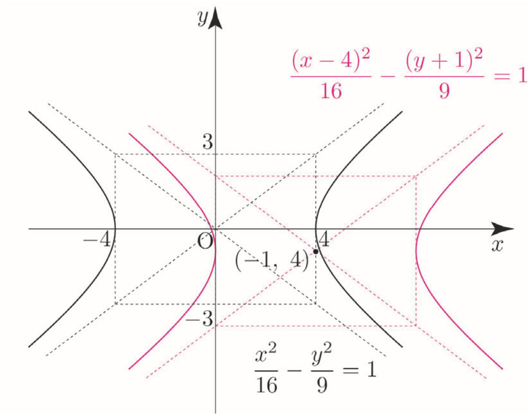
원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



공간도형과 공간좌표

개념 확인문제 25

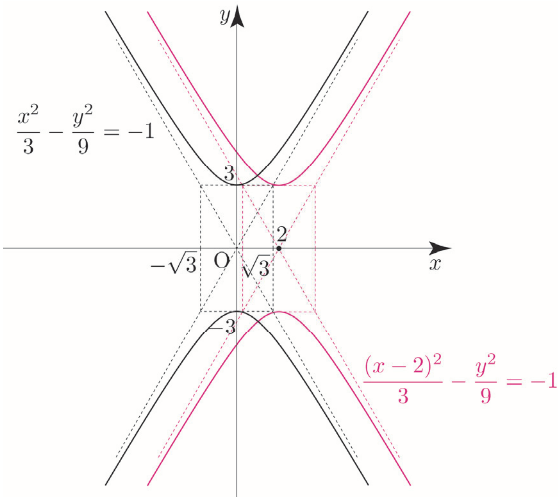
(1) 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것으로 주어진 쌍곡선은 다음 그림과 같다.



(2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$3(x-2)^2-y^2=-9 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3}-\frac{y^2}{9}=-1$이고,

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=-1$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것으로 주어진 쌍곡선은 다음 그림과 같다.



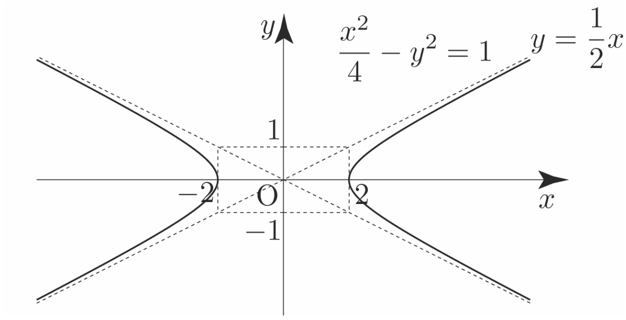
개념 확인문제 26

두 꼭짓점의 x좌표가 각각 -1, -5이므로
두 꼭짓점 사이의 거리는 4이다.

직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$이 점근선이므로

점근선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

평행이동하여도 두 꼭짓점 사이의 길이와 점근선의 기울기는 변하지 않으므로 평행이동하기 전 쌍곡선은 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$이다.



쌍곡선의 중심은 두 꼭짓점의 중점이므로
평행이동한 후 중심의 좌표를 $(-3, k)$라 하면

쌍곡선의 중심이 $(0, 0)$에서 $(-3, k)$로 평행이동하였으므로

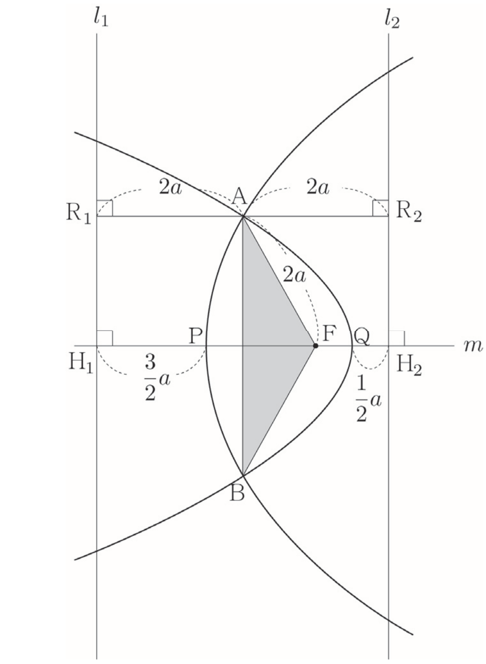
주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

즉, 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$은 직선 $y=\frac{1}{2}x$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

$y=\frac{1}{2}(x+3)+k \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+k$

$\frac{3}{2}+k=\frac{9}{2} \Rightarrow k=3$이므로 $\frac{(x+3)^2}{4}-(y-3)^2=1$이다.

답 $\frac{(x+3)^2}{4}-(y-3)^2=1$



$\overline{PQ} = \overline{H_1H_2} - \left(\overline{H_1P} + \overline{H_2Q}\right) = 4a - \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\right) = 2a = 4$

따라서 두 포물선의 꼭짓점 사이의 거리는 4이다.

답 4

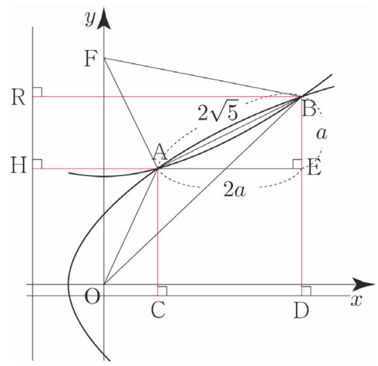
017

두 점 A, B에서 원점을 초점으로 하는 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, R이라 하고,
두 점 A, B에서 점 F를 초점으로 하는 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D이라 하자.

포물선의 정의에 의해서 $\overline{OA} = \overline{AH}$, $\overline{OB} = \overline{BR}$이고 $\overline{AF} = \overline{AC}$, $\overline{BF} = \overline{BD}$이다.

점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하자.

$$\begin{aligned}\overline{OB} + \overline{BF} - \left(\overline{OA} + \overline{AF}\right) &= \overline{OB} - \overline{OA} + \overline{BF} - \overline{AF} \\ &= \overline{BR} - \overline{AH} + \overline{BD} - \overline{AC} \\ &= \overline{AE} + \overline{BE}\end{aligned}$$



직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $\overline{AE} = 2a$, $\overline{BE} = a$라 하자.

삼각형 ABE에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 \Rightarrow (2\sqrt{5})^2 = (2a)^2 + a^2$

$\Rightarrow 20 = 5a^2 \Rightarrow a = 2$

따라서 $\overline{OB} + \overline{BF} - \left(\overline{OA} + \overline{AF}\right) = \overline{AE} + \overline{BE}$

$= 2a + a$

$= 6$

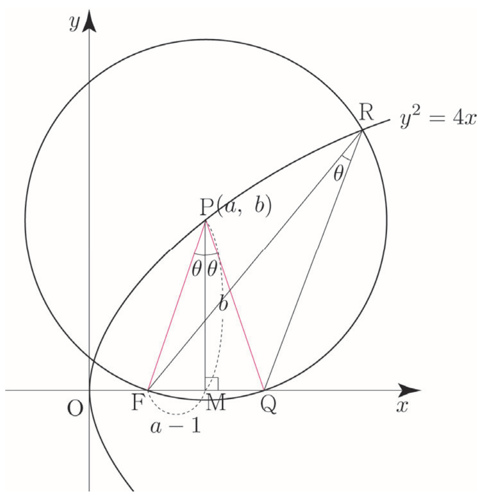
이다.

답 6

018

$\angle FRQ = \theta$라 하면
(중심각의 크기) $= 2\times$(원주각의 크기)
이므로 $\angle FPQ = 2\angle FRQ = 2\theta$이다.
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 M이라 하면
삼각형 PFQ는 $\overline{PF} = \overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로
$\angle FPM = \theta$이다.

$\overline{FM} = a-1$, $\overline{PM} = b$



$\sin\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$이므로

$\frac{\overline{FM}}{\overline{PM}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a-1}{b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow b = 2\sqrt{2}(a-1) \cdots$ ㉠

점 P$(a,\ b)$는 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점이므로

$b^2 = 4a \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$8(a-1)^2=4a \Rightarrow 2a^2-4a+2=a \Rightarrow 2a^2-5a+2=0$

$\Rightarrow (2a-1)(a-2)=0 \Rightarrow a=2\ (\because\ a>1)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2\sqrt{2}$이다.

삼각형 PFM에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{FM}}^2}=\sqrt{1+8}=3$

삼각형 FPQ의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하고,

$\sin(\angle\mathrm{PFQ})=\dfrac{\overline{\mathrm{PM}}}{\overline{\mathrm{FP}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}=3$이므로

삼각형 FPQ에서 사인법칙을 사용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle\mathrm{PFQ})}=2R \Rightarrow \dfrac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2R \Rightarrow R=\dfrac{9}{4\sqrt{2}}$

이다.

삼각형 FPQ의 외접원의 넓이는 $\dfrac{81}{32}\pi$이므로 $k=\dfrac{81}{32}$이다.

따라서 $64k=64\times\dfrac{81}{32}=162$이다.

답 162

019

포물선 $y^2=kx$에서 $4p=k \Rightarrow p=\dfrac{k}{4}$이므로

초점의 좌표는 $\mathrm{F}\left(\dfrac{k}{4},\ 0\right)$이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

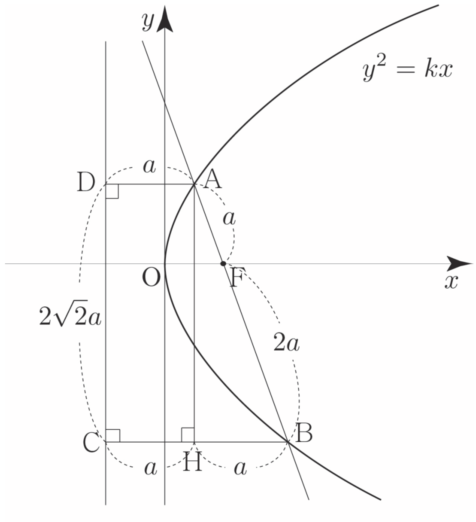
$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{BF}}=2a$이다.

포물선의 정의에 의해서

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BF}}=2a$이다.

삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2}=\sqrt{9a^2-a^2}=2\sqrt{2}a$이다.



사각형 ABCD의 넓이가 $27\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DC}}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}a\times(a+2a)=3\sqrt{2}a^2$

$=27\sqrt{2}$

$\Rightarrow a=3$

직선 AB가 포물선의 초점을 지나므로 Guide step에서

배운 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$를 사용하여 a와 k의 관계를 구해보자.

(낯설게 느껴졌다면 개념 파악하기 - (12) 포물선의 초점을 지나는 직선은 어떠한 성질이 있을까? 를 참고하도록 하자.)

$\dfrac{1}{\frac{k}{4}}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2a} \Rightarrow \dfrac{4}{k}=\dfrac{3}{2a} \Rightarrow k=\dfrac{8a}{3}=8\ (\because\ a=3)$

따라서 $k=8$이다.

답 8

020

포물선 $y^2=12x$에서 $4p=12 \Rightarrow p=3$이므로

초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이다.

두 점 A, D에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, R이라 하고, 두 점 A, D에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.

포물선의 정의에 의해서 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{9}{2}$이다.

직선 AC가 포물선의 초점을 지나므로 Guide step에서

배운 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$를 사용하여 선분 FC의 길이를 구해보자.

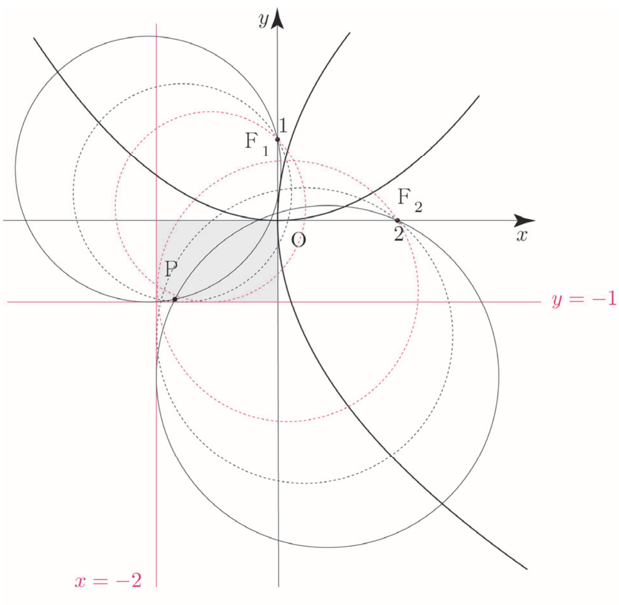
$\overline{\mathrm{FC}}=x$라 하면 $\dfrac{1}{\frac{9}{2}}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=9$

186

포물선 $C_1 : x^2 = 4y$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}_1(0,\ 1)$이고, 준선은 $y = -1$이다. 포물선의 정의에 의해서 중심이 C_1 위에 있고 초점 F_1을 지나는 원 S_1은 준선 $y = -1$과 접하므로 원 S_1 위의 점의 y좌표는 -1보다 크거나 같다.

포물선 $C_2 : y^2 = 8x$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}_2(2,\ 0)$이고, 준선은 $x = -2$이다. 포물선의 정의에 의해서 중심이 C_2 위에 있고 초점 F_2를 지나는 원 S_2는 준선 $x = -2$와 접하므로 원 S_2 위의 점의 x좌표는 -2보다 크거나 같다.

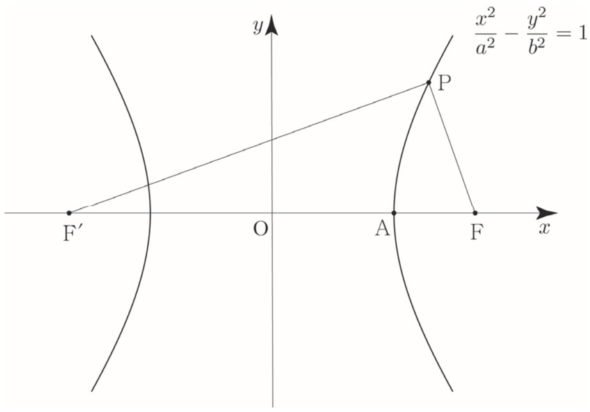
즉, 두 원 S_1, S_2의 교점 P는 제3사분면에 존재하므로 네 점 $(0,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(-2,\ -1)$, $(0,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형의 둘레 또는 내부영역에 존재할 수 있다.



따라서 $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값은 점 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$일 때, $(-2)^2+(-1)^2=5$이다.

답 5

187



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$라 하면

점근선의 방정식이 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3} \Rightarrow b=\dfrac{4}{3}a$이다.

(가) 조건에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=30,\ 16\le\overline{\mathrm{PF}}\le 20$ 이므로

$\overline{\mathrm{PF'}} > \overline{\mathrm{PF}}$ 이고, 쌍곡선의 정의에 의해서

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a \Rightarrow \overline{\mathrm{PF}}=30-2a$이다.

$16\le\overline{\mathrm{PF}}\le 20 \ \Rightarrow\ 16\le 30-2a\le 20$

$\Rightarrow\ 5\le a\le 7$

점 A는 x좌표가 양수인 꼭짓점이므로 좌표를 구하면 $\mathrm{A}(a,\ 0)$이다.

두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$이므로

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=a^2+\dfrac{16}{9}a^2=\dfrac{25}{9}a^2$

$\Rightarrow c=\dfrac{5}{3}a$

이다.

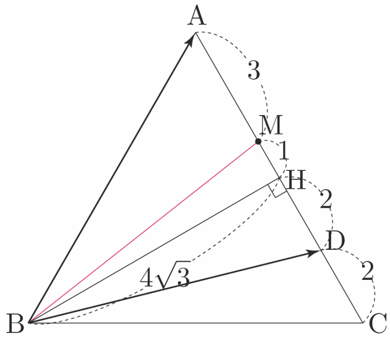
즉, 점 F의 좌표를 구하면 $\mathrm{F}\left(\dfrac{5}{3}a,\ 0\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{5}{3}a-a=\dfrac{2}{3}a$

$5\le a\le 7 \Rightarrow \dfrac{10}{3}\le\dfrac{2}{3}a\le\dfrac{14}{3}$

$\Rightarrow 3+\dfrac{1}{3}\le\dfrac{2}{3}a\le 4+\dfrac{2}{3}$

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{3}a$는 자연수이므로 $\dfrac{2}{3}a=4 \Rightarrow a=6$이다.



따라서 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{BM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = 49 - 9 = 40$이다.

답 40

046

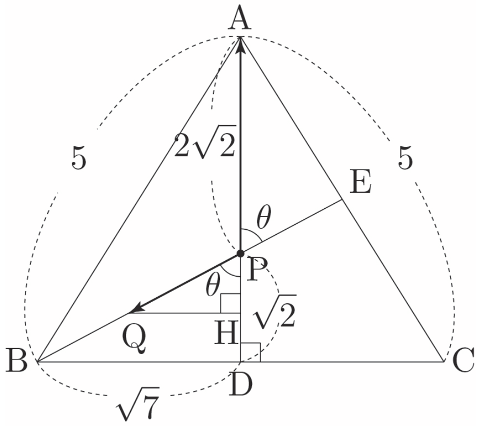
선분 BC의 중점이 D이므로 두 선분 AD, BE의 교점 P는 삼각형 ABC의 무게중심과 같다.

$\overline{AD} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{7})^2} = 3\sqrt{2}$이므로

$\overline{DP} = \frac{1}{3}\overline{AD} = \sqrt{2}$이고, $\overline{BP} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2} = 3$이다.

$\angle BPD = \theta$라 하면 $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

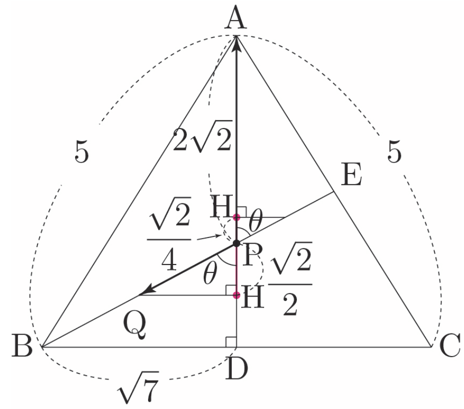
점 Q에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자.



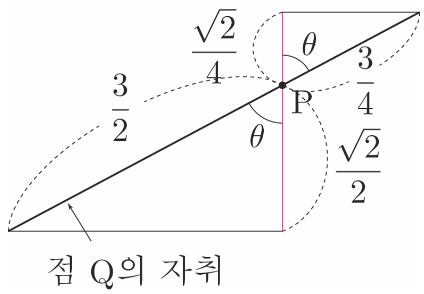
$-2 \le \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} \le 1$를 만족시키는 점 Q의 자취를 구하기 위해서 경계값부터 조사해보자.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = -2$를 만족하려면 $\overrightarrow{PH}$와 $\overrightarrow{PA}$의 방향이 서로 반대이고, $\overline{PH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$이면 된다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$를 만족하려면 $\overrightarrow{PH}$와 $\overrightarrow{PA}$의 방향이 서로 같고, $\overline{PH} = \frac{\sqrt{2}}{4}$이면 된다.



이때 $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$를 만족하도록 점 Q의 자취를 구하면 다음 그림과 같다.



점 Q가 그리는 도형의 길이는 $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$이다.

따라서 $p + q = 13$이다.

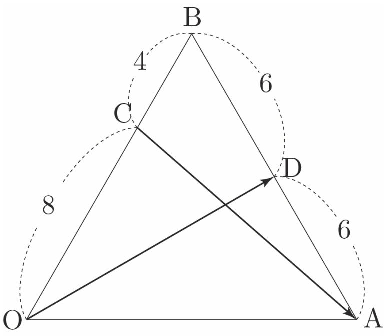
답 13

047

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하자.

$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\vec{b}$이므로 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$이다.

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$이다.



$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\left(\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$이므로

$$|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|^2=\left|\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}\right|^2$$
$$=\frac{9}{4}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{36}|\vec{b}|^2$$

이다.

이때 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 12인 정삼각형이므로

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=12$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=72$이다.

따라서

$$|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|^2=\left|\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}\right|^2$$
$$=\frac{9}{4}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{36}|\vec{b}|^2$$
$$=324-36+4=292$$

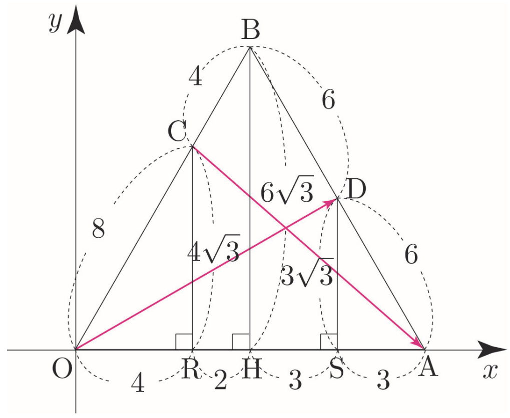
이다.

답 292

이번에는 x축과 y축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 $|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|^2$의 값을 구해보자.

(개념 파악하기 - (1) 두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까? 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기 참고)

점 C, B, D에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 각각 R, H, S라 하고, 선분들의 길이를 구하면 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{OD}=(9,\ 0)+(0,\ 3\sqrt{3})=(9,\ 3\sqrt{3})$이고,

$\overrightarrow{CA}=(8,\ 0)+(0,\ -4\sqrt{3})=(8,\ -4\sqrt{3})$이므로

$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}=(17,\ -\sqrt{3})$이다.

따라서 $|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|^2=17^2+(-\sqrt{3})^2=292$이다.

048

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하자.

선분 OP 위에 점 Q가 존재하므로 $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$이다.

$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$이므로 $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}$이다.

점 Q는 직선 MN 위의 점이므로 실수 t에 대하여

$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{ON}$이 성립한다.

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{3}{4}\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{b}$이다.

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}$이고, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{b}$이므로

$$\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}k-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}k-\frac{3(1-t)}{4}\right)\vec{b}=\vec{0}$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{3}k=\frac{3(1-t)}{4}$이다.

$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}t \Rightarrow k=\frac{3}{4}t$이므로

$\frac{1}{3}k=\frac{3(1-t)}{4} \Rightarrow k=\frac{9}{4}(1-t) \Rightarrow \frac{3}{4}t=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}t$

$\Rightarrow 3t=\frac{9}{4} \Rightarrow t=\frac{3}{4}$

즉, $k=\frac{3}{4},\ t=\frac{9}{16}$이다.

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}$

$\overline{OA}=3,\ \overline{OB}=6$이므로 $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=6$이다.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}|^2&=\left|\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}\right|^2\\&=\frac{9}{64}\left|\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right|^2\\&=\frac{9}{64}\left(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2\right)\\&=\frac{9}{64}(9+18\cos(\angle AOB)+9)\\&=\frac{9}{64}(18+18\cos(\angle AOB))\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OQ}|=\frac{3}{4}\sqrt{6}$이므로

$|\overrightarrow{OQ}|^2=\frac{27}{8} \Rightarrow \frac{9}{64}(18+18\cos(\angle AOB))=\frac{27}{8}$

$\Rightarrow 18+18\cos(\angle AOB)=24 \Rightarrow \cos(\angle AOB)=\frac{1}{3}$

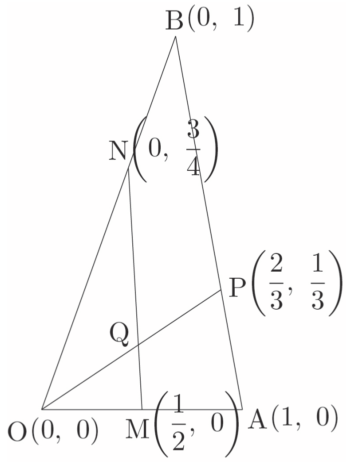
따라서 $\cos(\angle AOB)=\frac{1}{3}$이다.

답 ④

이번에는 Guide step에서 배운 사교좌표계를 이용하여 벡터 $\overrightarrow{OQ}$를 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$로 나타내보자.

$O(0,\ 0),\ A(1,\ 0),\ B(0,\ 1)$이라 하면

$M\left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ N\left(0,\ \frac{3}{4}\right),\ P\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$이다.



직선 OP의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이고,

직선 MN의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$이므로

두 직선의 교점의 좌표를 구하면 $Q\left(\frac{3}{8},\ \frac{3}{16}\right)$이다.

즉, $\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}$이다.

Tip

〈조심해야 하는 point〉

Guide step에서 언급했듯이 $Q\left(\frac{3}{8},\ \frac{3}{16}\right)$는 실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안된다.

즉, $|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{16}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{16}$라고 판단하지 않도록 유의해야 한다.

091

$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$라 하자.

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\vec{b}$이고, $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b}$이다.

$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$이다.

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$이므로

$$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = \left|\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

이다.

이때 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \frac{9}{2}$이다.

따라서

$$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = \left|\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

$$= 9 + 6 + 4 = 19$$

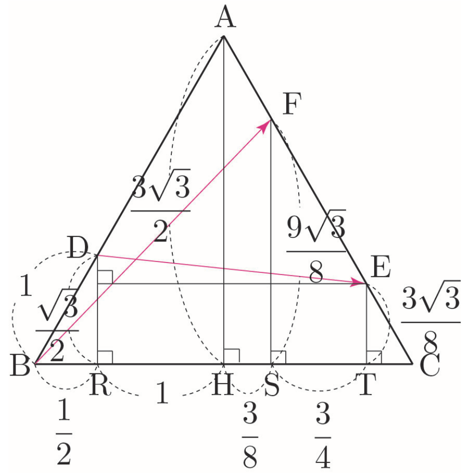
이다.

답 ③

이번에는 x축과 y축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$의 값을 구해보자.

(개념 파악하기 - (1) 두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까? 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기 참고)

점 D, A, F, E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 R, H, S, T라 하고, 선분들의 길이를 구하면 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{BF} = \left(\frac{15}{8},\ 0\right) + \left(0,\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) = \left(\frac{15}{8},\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$이고,

$\overrightarrow{DE} = \left(\frac{17}{8},\ 0\right) + \left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \left(\frac{17}{8},\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$이므로

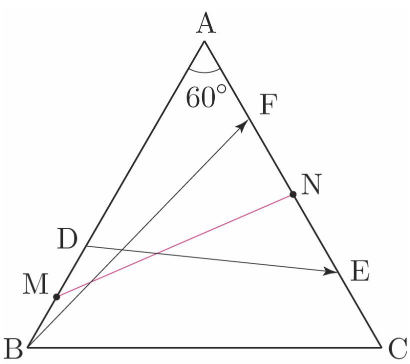
$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} = (4,\ \sqrt{3})$이다.

따라서 $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = 4^2 + (\sqrt{3})^2 = 19$이다.

이번에는 중점벡터와 코사인법칙을 이용하여 $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$의 값을 구해보자.

Guide step에서 반드시 시점이 일치하지 않아도 중점을 이용하여 두 벡터의 합을 하나의 벡터로 나타낼 수 있다고 학습한 바 있다. 이를 이용하여 두 벡터의 합 $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}$를 하나의 벡터로 나타내보자.

두 선분 BD, FE의 중점을 각각 M, N이라 하면 $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}| = 2|\overrightarrow{MN}|$이다.
(개념 파악하기 - (6) 위치벡터란 무엇일까?
두 벡터의 합을 하나의 벡터로 나타내기 참고)



$\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{BM} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $\overline{AN} = \frac{3}{2}$이고

$\angle BAC = 60^\circ$이므로 삼각형 AMN에서 코사인법칙을 사용하면

$\overrightarrow{OA}=(6,\ 0)$이고,

$$\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{4\sqrt{10}}{10},\ 0\right)+\left(0,\ \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\left(\frac{4\sqrt{10}}{10},\ \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

이므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=\dfrac{24\sqrt{10}}{10}+0=\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$이다.

따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$이다.

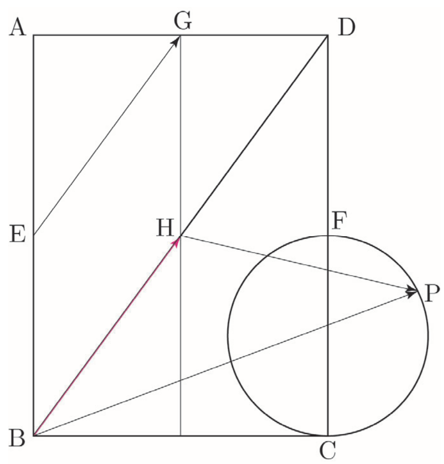
답 ③

물론 수선의 발을 작도하여 바로

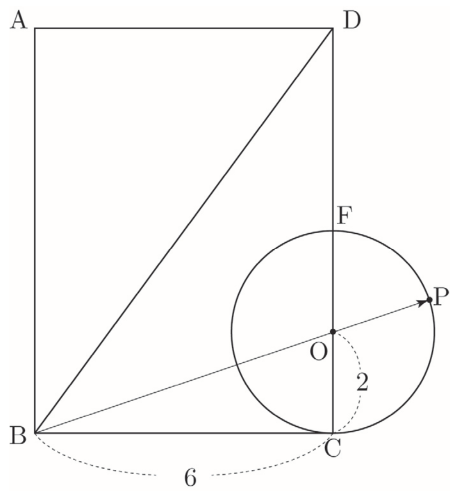
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MR}|=\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$ 라고 판단해도 좋다.

101

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BH}$이므로 $|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BP}|$이다.



선분 CF를 지름으로 하는 원의 중심을 O라 하면 $|\overrightarrow{BP}|$의 최댓값은 다음 그림과 같이 직선 BP이 원의 중심 O를 지날 때이다.



$\overline{BO}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$

따라서 $|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|$의 최댓값은 $2+2\sqrt{10}$이다.

답 ②

102

원 C_2의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}$이므로

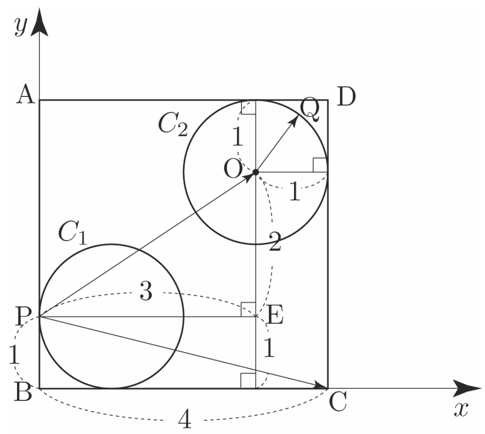
$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ})=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{OQ}$

이다.

점 O를 지나고 직선 AB에 평행한 직선과 점 P를 지나고 직선 BC에 평행한 직선의 교점을 E라 하자.

$\overline{PE}=3,\ \overline{OE}=2$

x축과 y축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO}$의 값을 구해보자.



$\overrightarrow{PC}=(4,\ 0)+(0,\ -1)=(4,\ -1)$이고,

$\overrightarrow{PO}=(3,\ 0)+(0,\ 2)=(3,\ 2)$이므로

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO}=12-2=10$이다.

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{OQ}=10+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{OQ}$이므로

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{OQ}$가 최대일 때, $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$는 최댓값을 갖는다.

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값은 두 벡터 $\overrightarrow{PC},\ \overrightarrow{OQ}$의 방향이 서로 같을 때이므로 $|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{17}\times1=\sqrt{17}$이다.

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $10+\sqrt{17}$이므로

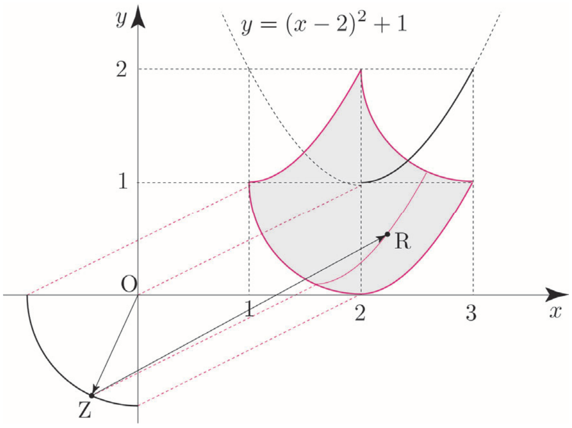
$a=10,\ b=17$이다.

따라서 $a+b=27$이다.

답 27

103

$-\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OZ}$이 되도록 점 Z를 잡고,
(호 AB를 점 O에 대하여 대칭이동)
$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{ZR}$이 되도록 점 R을 잡으면
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{ZR}+\overrightarrow{OZ}$ 이므로 점 P가 나타내는 영역 R은 다음 그림과 같이 색칠한 영역과 같다.



Tip 1

Training 1step에서 자취를 물어보는 문제들을 학습한 바 있었다. 아직 익숙하지 않다면 지난 문제들을 복습하고 난 후 103번을 다시 도전해보도록 하자.

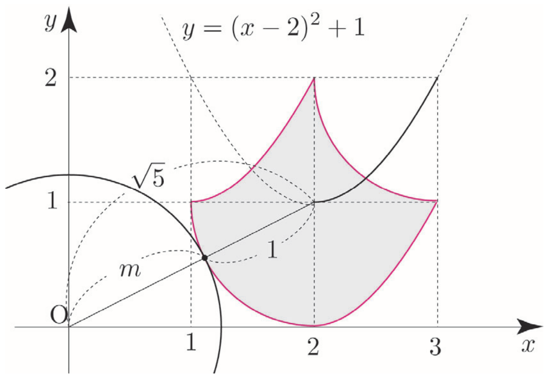
Tip 2

처음부터 한 번에 점 P의 자취를 그리려 하지말고 점 Z을 점 $(0,\ -1)$부터 점 $(-1,\ 0)$까지 조금씩 이동시켜보면서 해당 점 Z에 대한 점 P의 자취의 그려본 후 감을 찾으면 된다.

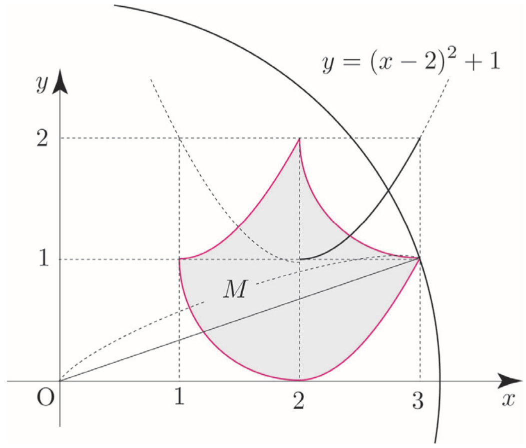
점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리는 $|\overrightarrow{OP}|$와 같다.

한 점과 같은 거리에 있는 점들의 집합은 원이므로 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|\overrightarrow{OP}|$인 원을 생각해보자.

원이 영역 R과 처음으로 접할 때, $|\overrightarrow{OP}|$는 최솟값 $m=\sqrt{5}-1$을 갖는다.



원이 $(3,\ 1)$을 지날 때, $|\overrightarrow{OP}|$는 최댓값 $M=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$을 갖는다.

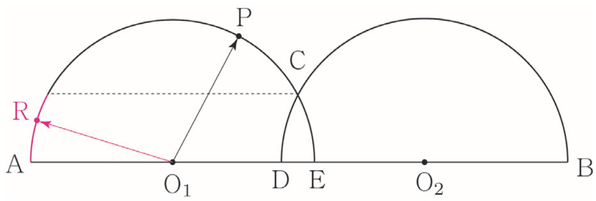


따라서 $M^2+m^2=10+(\sqrt{5}-1)^2=16-2\sqrt{5}$이다.

답 ①

104

$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1R}$이 되도록 점 R을 잡으면 점 R의 자취는 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1R}$이므로 $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}|=|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}|$이다.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}|^2&=|\overrightarrow{O_1P}|^2+2\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1R}+|\overrightarrow{O_1R}|^2\\&=|\overrightarrow{O_1P}|^2+2|\overrightarrow{O_1P}||\overrightarrow{O_1R}|\cos\theta+|\overrightarrow{O_1R}|^2\\&=2+2\cos\theta\end{aligned}$$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1R}$가 이루는 각 $\theta\,(0\le\theta\le\angle AO_1C)$가 최대일 때, ($\cos\theta$가 최소일 때)

$|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}|^2$는 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$를 갖는다.

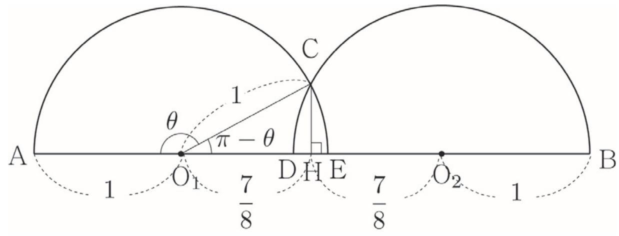
즉 $\theta=\angle AO_1C$이고 $2+2\cos\theta=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \cos\theta=-\frac{7}{8}$일 때,

$|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}|$는 최솟값을 갖는다.

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle CO_1H=\pi-\theta$이므로

$\overline{\mathrm{O_1H}} = \overline{\mathrm{O_1C}}\cos(\pi-\theta)=1\times(-\cos\theta) = \frac{7}{8}$이고,

대칭성에 의해서 $\overline{\mathrm{HO_2}} = \overline{\mathrm{O_1H}} = \frac{7}{8}$이다.



$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AO_1}} + \overline{\mathrm{O_1H}} + \overline{\mathrm{HO_2}} + \overline{\mathrm{O_2B}}$

$=1+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+1=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$

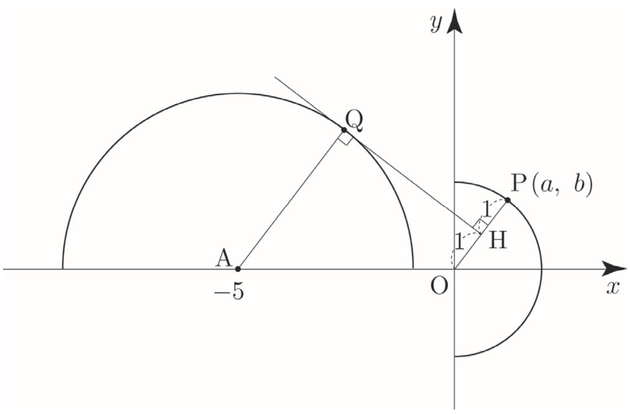
따라서 $p+q=19$이다.

답 19

105

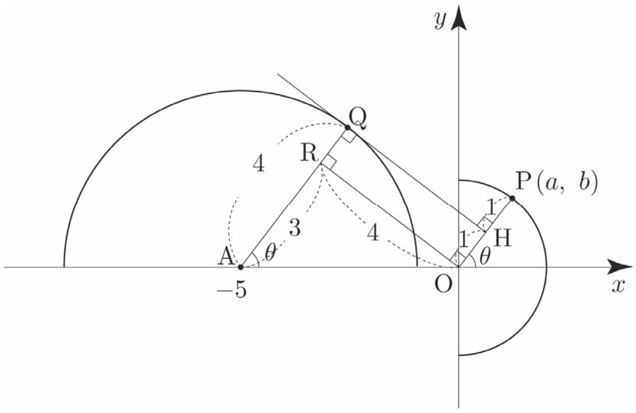
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 $b \le 0$이면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \le 0$이므로
조건을 만족시키지 않는다.
즉, $b>0$이어야 한다.

점 Q에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=2$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2$가 되도록 하는 점 Q는 다음 그림과 같다.



점 O에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 R이라 하자.
$\angle\mathrm{RAO} = \theta$라 하면 $\overline{\mathrm{AO}} = 5,\ \overline{\mathrm{AR}} = 3,\ \overline{\mathrm{OR}} = 4$이므로

$\tan\theta = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{AR}}} = \frac{4}{3}$이다.



직선 OP의 기울기는 $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$이므로
$a=3k,\ b=4k$라 하자.

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 반원의 호 $x^2+y^2=4\ (x \ge 0)$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=4 \Rightarrow 9k^2+16k^2=4 \Rightarrow k^2=\frac{4}{25}$

$\Rightarrow k=\frac{2}{5}\ (\because\ a \ge 0 \Rightarrow k \ge 0)$

따라서 $a+b=7k=\frac{14}{5}$이다.

답 ⑤

106

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = 0$이므로 $\angle\mathrm{CPA}=90^\circ$이다.

$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=3$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=k$라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=3k$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$

$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta=135^\circ$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = -2|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=2\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$

$\Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=2\sqrt{2}k$

$\angle\mathrm{BPC}=135^\circ,\ \angle\mathrm{CPA}=90^\circ$이므로 $\angle\mathrm{APB}=135^\circ$이다.

한 모서리의 길이가 a인 정사면체의 높이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$이므로

(Guide step 정사면체의 특징 ② 참고)

$\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{4}{3} \Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{6}}$이다.

$\frac{4}{\sqrt{6}}<\sqrt{3} \Rightarrow 4<3\sqrt{2}$이므로 $a<\sqrt{3}$이다.

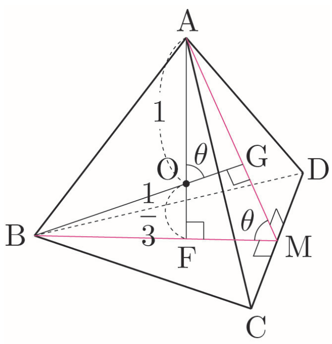
따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $\angle AOG=\theta$일 때, $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

$\overline{OF}=\overline{OG}=\frac{1}{3}$이므로 삼각형 AOG에서

$\cos\theta=\frac{\overline{OF}}{\overline{AO}}=\frac{1}{3}$이다.

따라서 ㄷ은 참이다.



다르게 풀어보자.

직선 AF는 평면 BCD와 수직이고,
직선 BG는 평면 ACD와 수직이므로
두 평면 BCD, ACD가 이루는 각의 크기는
두 직선 AF, BG가 이루는 각의 크기와 같다.
즉, 두 평면 BCD, ACD가 이루는 각의 크기가 θ이므로
$\cos\theta=\frac{1}{3}$이다. (Guide step 정사면체의 특징 ③ 참고)

답 ④

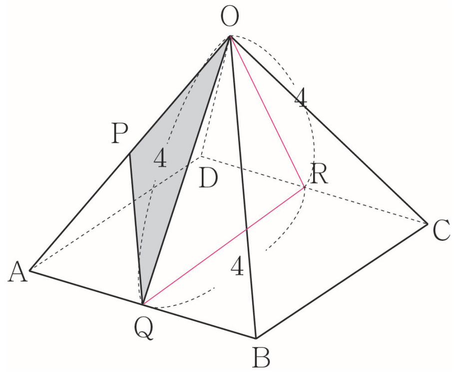
046

선분 CD의 중심을 R이라 하자.

두 평면 OAB, OCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\angle QOR=\theta$이다.

삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로
직선 OQ는 선분 AB를 수직이등분한다.

삼각형 OAQ에서 $\overline{OQ}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$이고,
$\overline{OR}=\overline{OQ}=4$이다.



삼각형 OQR은 정삼각형이므로 $\theta=60^\circ$이다.

점 P는 선분 OA의 중점이므로
삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}\times$(삼각형 OAQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 4=2$이다.

따라서 삼각형 OPQ의 평면 OCD 위로의 정사영의
넓이는 $2\cos 60^\circ=1$이다.

답 ③

047

삼각형 ABQ에서
$\overline{BQ}=\overline{AB}\cos(\angle ABC)=9\times\frac{\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$이고,
$\overline{AQ}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{6}$이다.

삼수선 정리에 의해서 $\overline{QP}\perp\overline{BC}$이다.
삼각형 AQP에서
$\overline{QP}=\overline{AQ}\cos(\angle AQP)=3\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이다.

삼각형 BCP의 넓이는
$k=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{QP}=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$이다.
따라서 $k^2=81\times 2=162$이다.

답 162

삼각형 OBE에서

$\tan 60^\circ = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{OE}} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{2}{\overline{OE}} \Rightarrow \overline{OE} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

$\overline{DE} = \overline{OE} - \overline{OD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

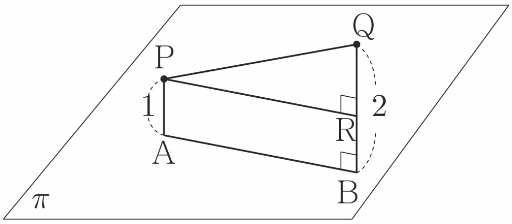
$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{BE} = 3$

$\overline{CB} = \overline{DE} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 삼각형 ABC에서

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$이다.

점 P에서 선분 BQ에 내린 수선의 발을 R이라 하면

$\overline{PR} = \overline{AB} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$이고, $\overline{RQ} = \overline{BQ} - \overline{AP} = 1$이다.



삼각형 QPR에서 $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{93}}{3} = d$이다.

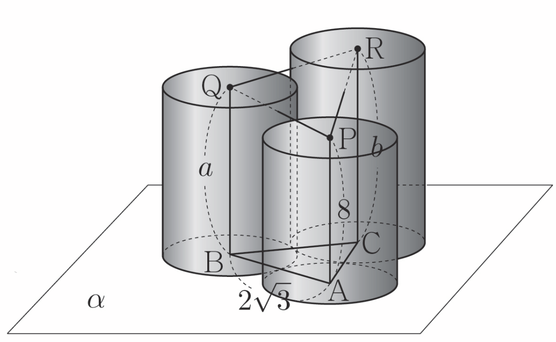
따라서 $3d^2 = 3 \times \dfrac{93}{9} = 31$이다.

답 31

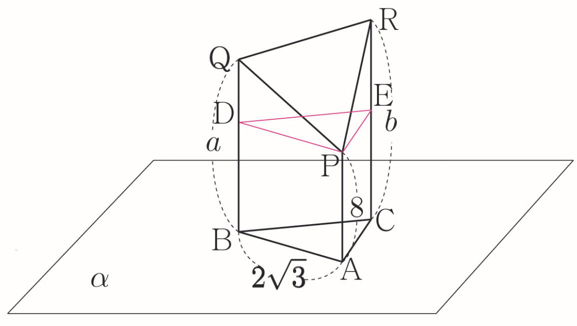
066

세 점 P, Q, R에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하자.

세 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이므로
삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이다.



평면 α에 평행하고 점 P를 지나는 평면이
두 선분 BQ, CR과 만나는 점을 각각 D, E라 하자.



$\overline{BQ} = a-8,\ \overline{ER} = b-8$

점 D에서 선분 PE에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{QP} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (a-8)^2}$

$\overline{QR} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (b-a)^2}$

$\overline{PR} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (b-8)^2}$

에서 $b-8 > a-8,\ b-8 > b-a\ (8 < a < b)$이므로

$\overline{QP} < \overline{PR},\ \overline{QR} < \overline{PR}$이다.

이때 삼각형 QPR는 이등변삼각형이므로

$a-8 = b-a$이고, $\overline{QP} = \overline{QR}$이다.

삼각형 QPR는 이등변삼각형이므로 점 Q에서
선분 PR에 내린 수선의 발을 F라 하고,
평면 DPE에 평행하고 선분 QF를 포함하는 평면이
선분 ER과 만나는 점을 G라 하자.

직선 QF는 선분 PR을 수직이등분하므로

$\overline{PF} = \overline{FR},\ \angle QFG = 90^\circ$이다.

두 삼각형 PFM, PRE은 $1:2$ 닮음이므로 점 F에서
평면 DPE에 내린 수선의 발을 M이라 하면
점 M은 선분 PE의 중점이고, 삼각형 DPE는
정삼각형이므로 $\angle DME = 90^\circ$이다.