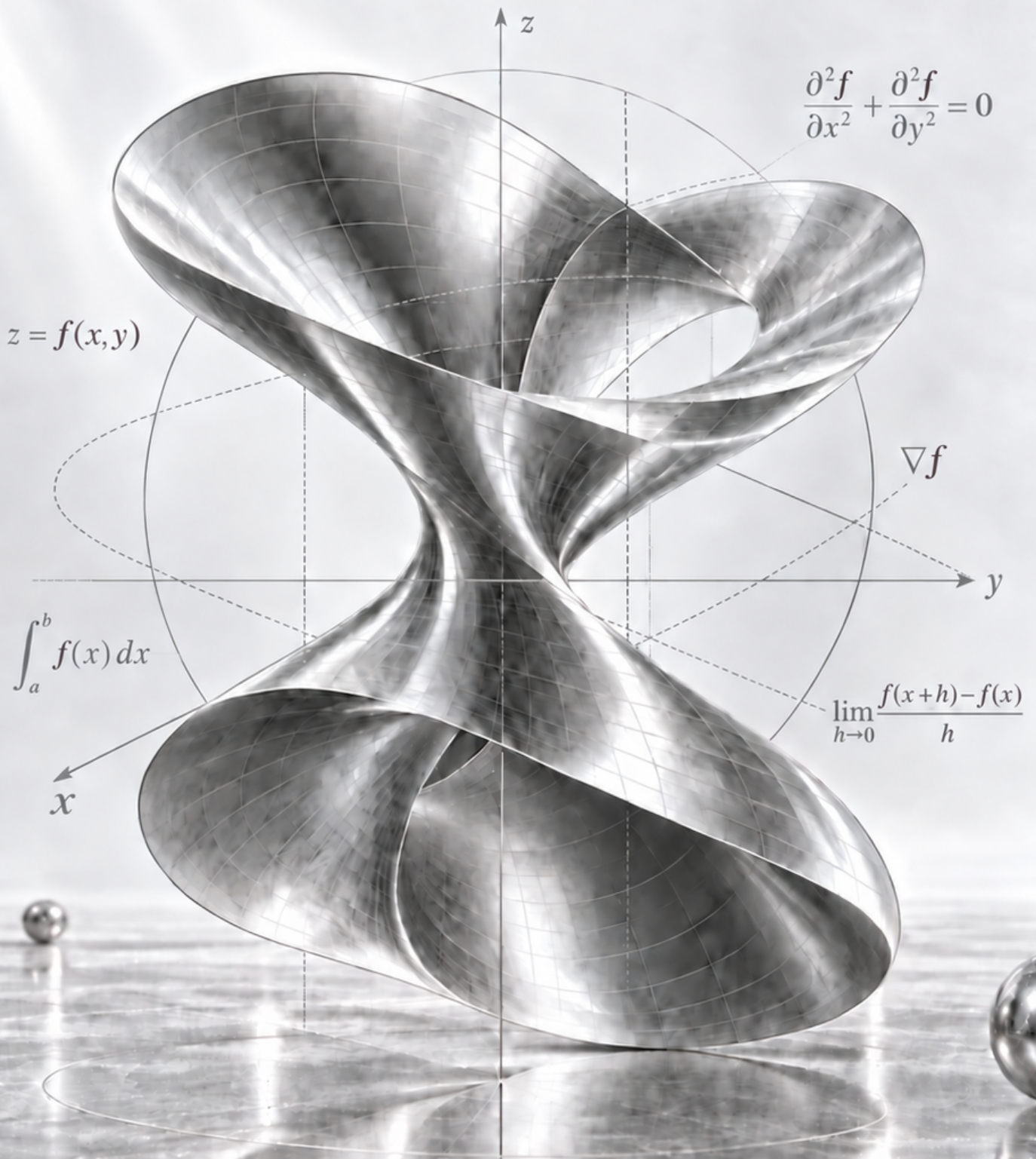


확통 총정리



I. 경우의 수

01 세는 기준부터 정하기

순서를 구별하는지, 중복을 허용하는지부터 문장으로 정한다.

1. 합의 법칙과 곱의 법칙

서로 겹치지 않는 경우로 나누면 더한다. 한 과정을 마친 뒤 다음 과정을 이어 가면 곱한다. 두 번째 단계의 선택지가 달라지면 첫 단계의 경우를 나누어 센다.

$$m + n \quad \text{or} \quad m \times n$$

2. 순열과 조합

서로 다른 n 개에서 r 개를 고른다. 순서까지 구별하면 순열, 고른 대상만 구별하면 조합이다. 여기서 $0 \leq r \leq n$ 이다.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$0! = 1, \quad {}_nP_0 = {}_nC_0 = 1, \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

짧은 예시

5명 중 회장과 부회장을 한 명씩 뽑을 때와 대표 2명을 뽑을 때를 비교하자.

풀이 직책이 다르면 ${}_5P_2 = 20$ 가지, 대표의 역할이 같으면 ${}_5C_2 = 10$ 가지이다. 조합에서는 같은 두 사람이 순서만 바뀌어 중복 집계되지 않도록 $2!$ 로 나눈다.

논술 핵심 답안 첫 줄에 “누가 같고, 무엇을 구별하는가”를 적는다. 곱셈은 단계별 선택을 세는 원리이며, 사건의 독립 여부와는 구별해야 한다.

I. 경우의 수

02 여러 가지 순열

원형 배치, 중복 허용, 같은 대상의 구별 여부를 나누어 생각한다.

1. 원순열

서로 다른 n 개를 원형으로 놓고 **회전해서 같아지는 배치를 하나로** 보면 다음과 같다. 한 대상을 고정하고 나머지를 배열한다.

$$(n - 1)!$$

좌석에 번호가 있으면 일반적인 일렬 배치처럼 센다. 회전으로 같은 것과 거울에 비친 것을 같은 것으로 보는 조건은 서로 다르다.

2. 중복순열 · 같은 것이 있는 순열

$${}_nP_r = n^r, \quad \frac{n!}{p!q!\cdots s!} \quad (p + q + \cdots + s = n)$$

중복순열은 매 자리마다 n 개 중 하나를 고른다. 같은 것이 있는 순열은 서로 구별되지 않는 대상끼리 바꾼 중복만 나눈다.

짧은 예시

서로 다른 5명이 원탁에 앉되 두 사람이 이웃하는 경우의 수는?

풀이 두 사람을 한 묶음으로 보면 원형으로 놓을 대상은 4개이다. 묶음 내부의 순서를 곱하면 $(4 - 1)! \times 2! = 12$ 가지이다.

빠른 비교 세 종류의 문자로 길이 4의 문자열을 만들면 $3^4 = 81$ 가지. 문자 A, A, B, B, C 를 모두 배열하면 $\frac{5!}{2!2!} = 30$ 가지이다.

논술 핵심 묶어서 세었다면 묶음 내부의 순서를 확인한다. “원형이니까 무조건 전체 개수로 나눈다”는 식으로 처리하지 않는다.

I. 경우의 수

03 중복조합과 정수해

고르는 횟수는 여러 번이어도, 최종 결과에서 순서를 구별하지 않는다.

1. 중복조합의 뜻과 공식

서로 다른 n 종류에서 중복을 허용하여 r 개를 고르는 경우의 수이다. 같은 종류를 몇 개 골랐는지를 기록한다.

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$$

2. 음이 아닌 정수해와 일대일 대응

$$x_1 + \cdots + x_n = r, \quad x_i \geq 0$$

$$\Rightarrow {}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$$

r 개의 물건 사이에 $n-1$ 개의 칸막이를 놓는다. 물건과 칸막이를 합친 $r+n-1$ 자리에서 칸막이 자리를 고르는 원리이다. 빈 칸은 해당 종류가 0개임을 뜻한다.

짧은 예시

$x + y + z = 6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해와 양의 정수해의 개수는?

풀이 음이 아닌 정수해는 ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$ 개이다. 양의 정수해는 $x = u + 1, y = v + 1, z = w + 1$ 로 바꾸면 $u + v + w = 3$ 이므로 ${}_3H_3 = {}_5C_2 = 10$ 개이다.

3. 같은 물건을 서로 다른 상자에 넣기

같은 쿠키 6개를 이름이 다른 상자 3개에 빈 상자를 허용하여 나누면 ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$ 가지이다. 쿠키가 서로 다르다면 각 쿠키의 상자를 골라 3^6 가지이다.

논술 핵심 중복조합을 쓰기 전에 “각 변수는 음이 아닌 정수이며, 합이 일정하다”를 확인한다. 물건이 같은지, 상자가 구별되는지에 따라 모델이 달라진다.

I. 경우의 수

04 조건이 붙은 경우의 수

하한은 먼저 옮기고, 상한은 위반하는 경우를 빼며, 중복 집계를 점검한다.

1. 하한과 상한 처리

$x \geq a$ 라면 $x = u + a$ 로 바꾸어 $u \geq 0$ 으로 만든다. 상한이 있으면 전체에서 상한을 넘는 경우를 빼고, 동시에 위반한 경우가 겹치는지 확인한다.

짧은 예시

$x + y + z = 6$ 에서 x, y, z 가 음이 아닌 정수이고 $x \leq 2$ 일 때 해의 개수는?

풀이 전체 ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$ 개에서 $x \geq 3$ 인 경우를 뺀다. $x = u + 3$ 이면 $u + y + z = 3$ 이므로 ${}_3H_3 = {}_5C_2 = 10$ 개이다. 따라서 다음과 같다.

$${}_3H_6 - {}_3H_3 = {}_8C_2 - {}_5C_2 = 28 - 10 = 18$$

2. 크기순 조건을 중복조합으로 읽기

$1 \leq a \leq b \leq c \leq 5$ 는 다섯 종류에서 중복을 허용하여 세 개를 고르고 크기순으로 적는 것과 같다.

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

반면 $1 \leq a < b < c \leq 5$ 에서는 서로 다른 세 수를 고르므로 ${}_5C_3 = 10$ 가지이다.

3. 같은 크기의 조를 만들 때

서로 다른 4명을 이름 없는 두 쌍으로 나누면 $\frac{{}_4C_2}{2!} = 3$ 가지이다. 첫 번째 쌍과 두 번째 쌍을 바꾸어도 같은 분할이므로 나눈다.

논술 핵심 이름 없는 조라고 항상 조의 개수의 계승으로 나누지는 않는다. 실제로 같은 결과가 몇 번 세어졌는지 설명한다. 조 크기가 다르면 중복 구조도 달라진다.