## Ⅰ. 출제분석

| 번호 | 제목 | EBS연계 | 난이도 |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | 같은 것을 포함하는 경우의 순열 | | |
| 6 | 함수극한 : 로피탈 정리 | 수2 p.63 2번 | |
| 7 | 합성변환 | 기벡 p.32 2번 | |
| 8 | 세트형 : 미분계수 | | |
| 9 | 세트형 : $x$축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 | | |
| 10 | 중복조합 | | |
| 11 | 삼각함수 | 수2 p.50 2번 | |
| 12 | 쌍곡선 정의 + 원의 접선 | 기벡 p.74 2번 | |
| 13 | 점화식 주어지고 수열의 일반항 구하는 유형 | | |
| 14 | 행렬의 거듭제곱 : 모든 성분의 합 | 수1 p.15 2번 | 중상 |
| 15 | 회전변환에 의해 옮겨진 도형과의 공통부분의 넓이 | 기벡 p.27 4번 | |
| 16 | 거리함수 $g(t)$ : 미분 ㄱㄴㄷ | | 상 |
| 17 | 지수부등식 | 수1(A형) p.58 2번 | |

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

1. 일차변환 : 2문항 (3점, 4점)

2. 경우의 수 : 5번(같은 것을 포함하는 경우의 순열)

3. 세트형 문제 : $x$축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피

4. 오답률 Best : B형

객관식 21번 : 삼각함수의 극한
객관식 16번 : 거리함수 $g(t)$ 미분 ㄱㄴㄷ

주관식 30번 : 미분 + 적분
주관식 29번 : 포물선의 정의 + 삼각형의 무게중심의 자취

5. 무한등비급수 도형문제 : 없음

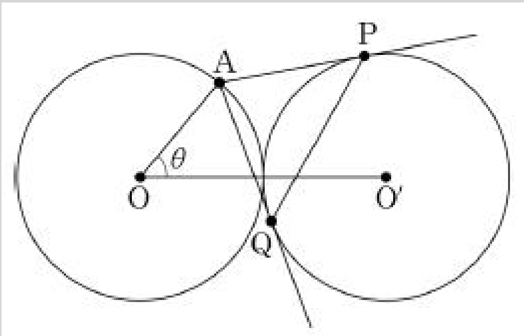
6. 수열 고난이도 문항 : 없음

7. 행렬 ㄱㄴㄷ : 없음

8. 역함수의 미분법 : 없음

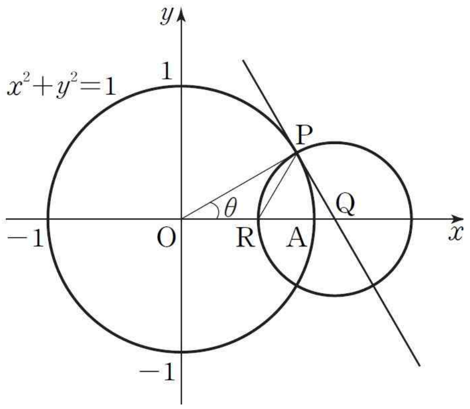
21.

그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 $O, O'$이 외접하고 있다. 원 $O$ 위의 점 $A$에서 원 $O'$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $P, Q$라 하자. $\angle AOO' = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 1) [4점]




① 2　② $\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{3}$

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P 에서의 접선이 $x$ 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 또, 점 Q 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 인 원이 $x$ 축과 만나는 점 중 원 $x^2+y^2=1$ 의 내부에 있는 점을 R 라 하고 $\angle \mathrm{POQ}$ 의 크기를 $\theta$ 라 하자. 점 $\mathrm{A}(1, 0)$ 에 대하여 $\lim_{\theta \to +0} \frac{\theta \cdot \overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}$ 의 값은 ?(단, $O$ 는 원점이다.) 2)




① 2　② $\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{3}$

16.

실수 $t$에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t, t^3)$과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3)] [4점]

보 기

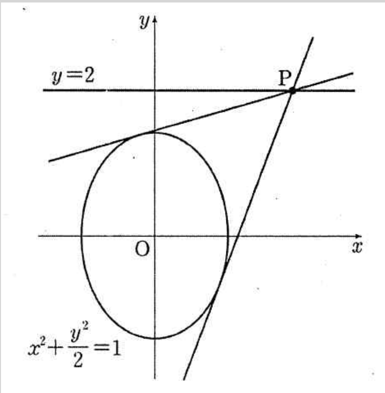
ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $g(t)$는 $0$이 아닌 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

삼차함수 $f(x)=x^3-2x+2$의 그래프 위의 한 점 $(t,\ f(t))$에서 직선 $y=x$까지의 거리를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 극댓값은 $a$이다. $a^2$의 값을 구하시오.[4)]

19.

직선 $y=2$ 위의 점 $P$에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이다. 점 $P$의 $x$좌표를 $k$라 할 때, $k^2$의 값은? 5)[4점]




① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

:: E-연계 ::

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 밖의 점에서 그은 두 접선이 수직인 점들의 자취는 $x^2+y^2=a^2+b^2$임을 보이시오.6)

20.

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $-2 \le x < 2$일 때, $f(x)=2\lvert x\rvert+3$<br>(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(x+4)$<br>이다. |

양수 $m$에 대하여 무리방정식

$$\sqrt{f(x)-mx}=f(x)-mx-2$$

를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 4 이하가 되도록 하는 $m$의 최솟값은? 7)[4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

:: E-연계 ::

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $0 \le x \le 4$일 때<br>$f(x)=-x^2+4x+3$<br>(나) $f(x)=f(x+4)$ |

이때, 무리방정식

$\sqrt{f(x)-\frac{1}{3}x}=f(x)-\frac{1}{3}x-2$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. 8)

1) 정답 : ③

원 $O$의 중심을  좌표 평면상의 원점으로 가져 가면,

$A(\cos\theta, \sin\theta)$

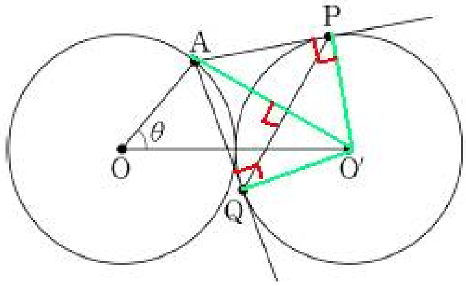
원 $O'$ : $(x-2)^2+y^2=1$

$AP^2=\overline{AO'}^2-1^2 = (\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta-1$

$\square AQO'P=\overline{AP}\cdot\overline{PO'}=\frac{1}{2}\overline{AO'}\cdot\overline{PQ}$

$\therefore \overline{PQ}=2\,\frac{\overline{AP}\ \cdot\ 1}{\overline{AO'}}=2\frac{\sqrt{(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta-1}}{\sqrt{(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta}}$

$=2\sqrt{\frac{4-4\cos\theta}{5-4\cos\theta}}$

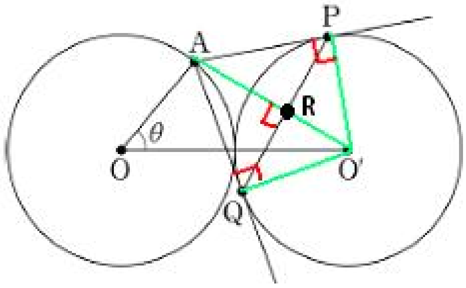



$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{PQ}}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}2\sqrt{\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{4(1-\cos\theta)}{5-4\cos\theta}}=\lim_{\theta\to+0}2\sqrt{\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{4\sin^2\theta}{(5-4\cos\theta)(1+\cos\theta)}}=2\sqrt{2}$$

[별해]

$\triangle AOO'$ 에서 제2 코사인 법칙에 의해  $\overline{AO'}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\theta=5-4\cos\theta$

$\triangle AO'P$에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AP}^2=\overline{AO'}^2-1^2=4-4\cos\theta$




$\triangle ARP \backsim \triangle APO'$ 이므로 $\overline{AP}:\overline{PR}=\overline{AO'}:\overline{PO'}$

따라서  $\sqrt{4-4\cos\theta}:\overline{PR}=\sqrt{5-4\cos\theta}:1$ 에서 $\overline{PR}=\sqrt{\frac{4-4\cos\theta}{5-4\cos\theta}}$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{PQ}}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}2\sqrt{\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{4(1-\cos\theta)}{5-4\cos\theta}}=\lim_{\theta\to+0}2\sqrt{\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{4\sin^2\theta}{(5-4\cos\theta)(1+\cos\theta)}}=2\sqrt{2}$$

2) 정답 : ③

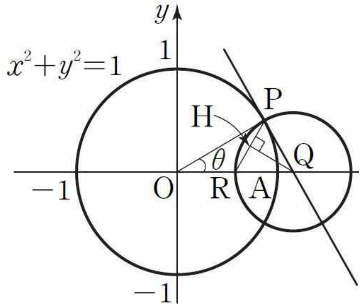
삼각형 OQP 에서 $\overline{OP}\perp\overline{PQ}$ 이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\frac{1}{\overline{OQ}},\ \overline{OQ}=\frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore \overline{AQ}=\overline{OQ}-\overline{OA}\quad=\frac{1}{\cos\theta}-1=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$ ······㉠

삼각형 OQP 에서  $\tan\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=\overline{PQ}=\overline{QR}$ 이고

$\angle PQR=\frac{\pi}{2}-\theta$




$\overline{PQ}=\overline{QR}$ 이므로 $\triangle PRQ$ 는 이등변삼각형이고 점 Q 에서 $\overline{PR}$ 에 내린 수선은 $\overline{PR}$ 의 중점 H 를 지난다.

$\triangle PHQ$ 에서 $\angle PQH = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ 이므로 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PR}}{2 \cdot \tan\theta}$

$\therefore \overline{PR} = 2\tan\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ ……ⓛ

㉠과 ㉡에서

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\theta \cdot \overline{PR}}{\overline{AQ}} = \lim_{\theta \to +0} \frac{\theta \cdot 2\tan\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}} = \lim_{\theta \to +0} \frac{2\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{1-\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{2\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cdot (1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{2\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cdot (1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to +0} 2 \cdot \frac{\theta}{\sin\theta} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cdot (1+\cos\theta)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}$$

따라서 $a = 2\sqrt{2}$ 이므로 $10a^2 = 10 \times (2\sqrt{2})^2 = 80$

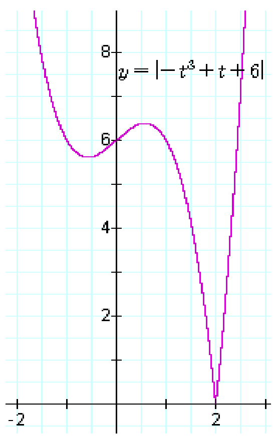
3) 정답 : ③

$g(t) = \frac{|t - t^3 + 6|}{\sqrt{2}}$

$h(t) = -t^3 + t + 6$

$h'(t) = -3t^2 + 1$

| $t$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ | | 0 | $-$ |
| $h(t)$ | ↘ | | ↗ | | | ↘ |




따라서 $y = g(t)$는 실수 전체에서 연속이며, 0이 아닌 극솟값을 가진다. $\therefore$ ㄱ(참),ㄴ(참)

$t = 2$에서는 접점이 생기므로 미분 불가능하다. $\therefore$ ㄷ(거짓)

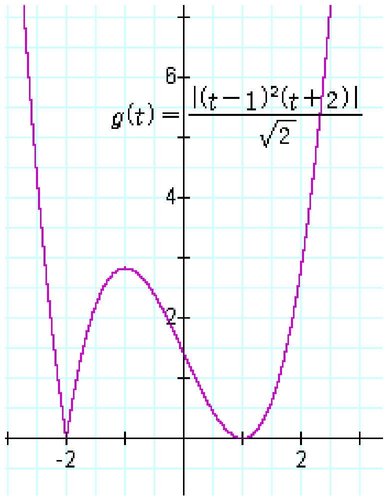
4) 정답 : 8

곡선 $y = f(x)$ 위의 한 점 $(t,\ f(t))$ 에서 직선 $y = x$ 까지의 거리 $g(t)$ 는 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$g(t) = \frac{|t - f(t)|}{\sqrt{2}} = \frac{|t - t^3 + 2t - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{|t^3 - 3t + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|(t-1)^2(t+2)|}{\sqrt{2}}$$

함수 $g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.




$t>-2$ 에서 함수 $g(t)=\dfrac{(t-1)^2(t+2)}{\sqrt{2}}$ 이므로 $g'(t)=\dfrac{3}{\sqrt{2}}(t-1)(t+1)$

$t=-1$ 에서 극댓값 $g(-1)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2=8$

5) 정답 : ②

기울기 $m$인 두 접선의 방정식을 $y=mx\pm\sqrt{1\cdot m^2\cdot 2}$ 이 점 $P(k,\ 2)$를 지나므로 $2=mk\pm\sqrt{m^2+2}$

$(2-mk)^2=m^2+2$

$(k^2-1)m^2-4k\cdot m+2=0$

두 접선의 기울기의 곱이 $\dfrac{1}{3}$ 이므로 $m_1\times m_2=\dfrac{2}{k^2-1}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore k^2=7$

6)

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 두 접선의 기울기 중 하나를 $m$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다.

점 $P(x_1,\ y_1)$를 접선 위의 한 점이라 하면 $y_1=mx_1\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이 성립하고, 이를 $m$에 대해 정리하면 $(x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+y_1^2-b^2=0$이 된다.

두 직선이 수직일 때 $m_1\cdot m_2=-1$이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\dfrac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}=-1$이 성립한다.

이를 정리하면 $x_1^2+y_1^2=a^2+b^2$이 됨을 알 수 있다.

즉 $P(x_1,\ y_1)$는 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{a^2+b^2}$ 인 원 위의 점들이다.

[참고 : 포물선의 준선]

포물선 밖에서 그은 두 접선이 수직인 점들의 자취는 준선이며. 역으로, 준선에서 그은 두 접선은 서로 수직이다.

[증명] 두 접선의 기울기를 $m_{1,}$ $m_2$라고 하면 접선의 방정식은

$y=m_1x+\dfrac{p}{m_1}$, $y=m_2x+\dfrac{p}{m_2}$ 이고,

두 접선의 기울기가 수직이므로 $m_1 \cdot m_2=-1$이고,

두 접선의 방정식의 교점을 구하면

$m_1x+\dfrac{p}{m_1}=m_2x+\dfrac{p}{m_2}$ $(m_1-m_2)x=p\dfrac{m_1-m_2}{m_1m_2}$

$x=-p$ ($\because m_1m_2=-1$) 따라서 두 접선이 만나는 점의 $x$좌표는 준선 위에 있다.

이번에는 준선에서 그은 두 접선이 수직임을 증명하자.
두 접선의 기울기를 $m_1$, $m_2$라고 하면 두 접선의 방정식은

$y=m_1x+\dfrac{p}{m_1}$, $y=m_2x+\dfrac{p}{m_2}$ 이다.

두 접선이 만나는 점이 준선 위에 있으므로 두 접선은 $x=-p$에서 만나므로 $-m_1p+\dfrac{p}{m_1}=-m_2p+\dfrac{p}{m_2}$

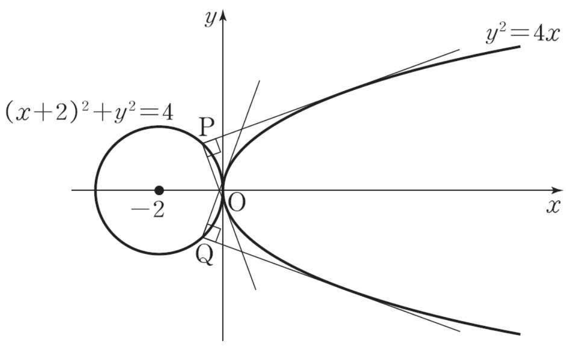
이고,

이를 정리하면 $(m_1-m_2)\left(1+\dfrac{1}{m_1m_2}\right)=0$이다.

그런데 $m_1 \neq m_2$이므로 $m_1 \cdot m_2=-1$이다.

따라서 준선에서 그은 두 접선은 수직이다.

그림과 같이 원 $(x+2)^2+y^2=4$ 위의 두 점 P, Q에서 각각 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는?




① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

[해설] 두 점 $P$, $Q$는 포물선의 준선 위에 있다.

따라서 원 $(x+2)^2+y^2=4$ 에서 $x=-1$ 를 대입하면 $y=\pm\sqrt{3}$

두 점 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$, $\mathrm{Q}(-1,\ -\sqrt{3})$이므로 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$

[참고: 쌍곡선의 준원]

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 그은 두 접선이 항상 직교하도록 하는 점들의 자취의 방정식이 $x^2+y^2=a^2-b^2$임을 보이시오.(단, $a>b$이며, $x^2+y^2=a^2-b^2$와 두 점근선 $y=\pm\frac{b}{a}x$와의 교점은 제외한다.)

[증명] 두 접선의 기울기 중 하나를 $m$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이다. (단, $m\neq\frac{b}{a}$)

점 $P(x_1,\ y_1)$를 접선 위의 한 점이라 하면 $y_1=mx_1\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이 성립하고, 이를 $m$에 대해 정리하면 $(x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+y_1^2+b^2=0$이 된다.

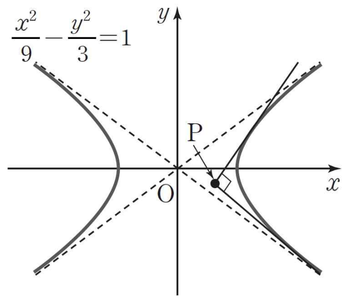
두 직선이 수직이므로 $m_1\cdot m_2=-1$이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\frac{y_1^2+b^2}{x_1^2-a^2}=-1$이 성립한다.

이를 정리하면 $x_1^2+y_1^2=a^2-b^2$이 됨을 알 수 있다. 즉 $P(x_1,\ y_1)$는 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{a^2-b^2}$인 원 위의 점들이다. 단, $a>b$이며, 점근선과의 교점은 제외한다. 왜냐면 점근선과 같은 기울기의 접선은 존재하지 않기 때문이다.

---

점$P$에서 쌍곡선$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 $x>0$인 부분에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 점$P$가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$
④ $\pi$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$




[해설] 정답 : ②

점$P(a,b)$는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$인 원$x^2+y^2=6$ 위의 점이다.

그런데 $x>0$인 부분에 그은 두 접선이 서로 수직이 되기 위해서는 점$P$는 위 그림의 두 점근선 사이 부분에만 존재하므로 점$P$가 그리는 도형은 호가 된다.

쌍곡선$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이고 두 점근선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 점$P$가 그리는 호의 길이 $l$은

$l=\sqrt{6}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$

7) 정답 : ④

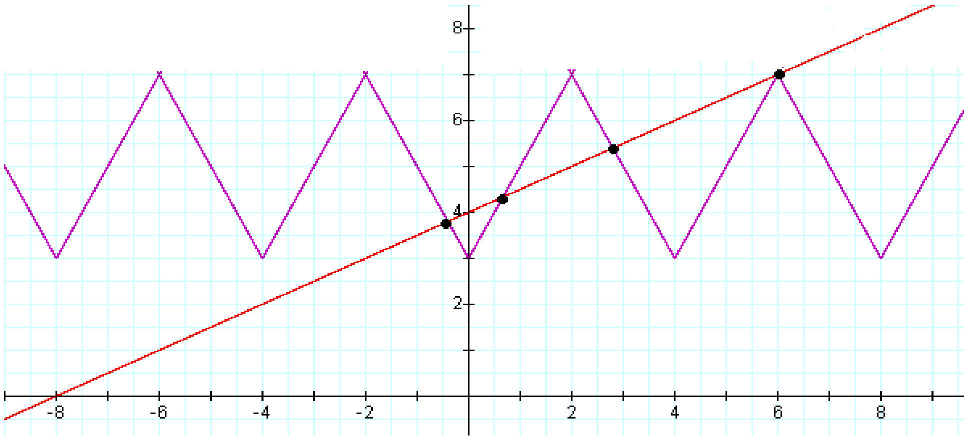
$f(x)-mx=t$로 치환하면 $\sqrt{t}=t-2$ $(t\geqq 2)$

$t^2-5t+4=0$

$(t-4)(t-1)=0$ 이므로 $t=4(\because t\geqq 2)$

$f(x)-mx=4$ 이므로 $f(x)=mx+4$

두 함수 $y=f(x)$, $y=mx+4$의 두 교점의 개수가 4개 이하가 되도록 하는 $m$의 최솟값은 아래 그림에서처럼



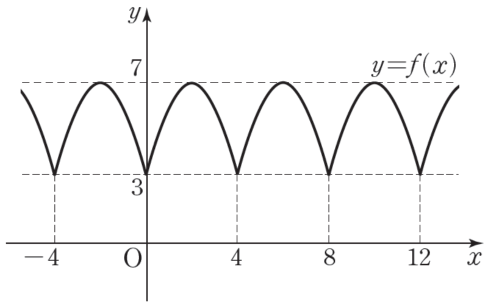

$y = mx + 4$가 점 $(6,\,7)$ 을 지날 때 이다.

$\therefore\ 7 = 6m + 4$

따라서 $m = \dfrac{1}{2}$

8) 정답 : 5

$0 \le x \le 4$ 일 때, $f(x) = -x^2 + 4x + 3 = -(x-2)^2 + 7$ 이고 $f(x) = f(x+4)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.




$f(x) - \dfrac{1}{3}x = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은 $\sqrt{t} = t - 2$ 이고 위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$t^2 - 5t + 4 = 0$ 이므로 $(t-1)(t-4) = 0\ (t \ge 2)$ $\quad\therefore\quad t = 4$

그러므로 $f(x) - \dfrac{1}{3}x = 4$, $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 4$ 에서 $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 4$ 의 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \dfrac{1}{3}x + 4$ 가 만나는 교점의 개수와 같다.

교점의 개수는 아래 그림에서 처럼 5 이므로 주어진 무리 방정식의 실근의 개수는 5개다.