

수리논술 한 권으로 끝내기

개념에서 논증으로, 풀이에서 답안으로

수열의 극한 · 무한급수 · 함수의 극한과 연속

미분 · 적분 · 수열의 규칙성

확률과 통계 · 기하 · 벡터

9개 단원 핵심 정리와 45개 대표 유형

채점기준과 사고과정, 모범답안과 오답 클리닉

풀이와 검산에 활용하는 실전 스킬 70선

TABLE OF CONTENTS

목차 (차례)

이 책은 수리논술의 기본 원리부터 9개 전 단원 유형별 정리·기출 해부·클리닉, 그리고 70가지 실전 스킬까지 보기 편하고 넉넉한 호흡으로 구성되어 있어요.

파트 및 장 (Chapter)	핵심 수록 내용 (수능과의 차이 · 유형별 정리 · 기출 해부 · 클리닉)	주요 기출 대학
Part I. 수리논술에 대하여	01. 어떤 전형인가요? / 02. 왜 어렵게 느껴질까요? / 03. 누구에게 유리할까요? / 04. 수능과 무엇이 다른가요? / 05. 어떻게 대비할까요?	전 대학 공통 원리
제1장. 수열의 극한	수능과의 차이 · 유형 01(샌드위치 정리) · 유형 02(점화식과 수렴 원리) · 유형 03(가우스·소수부분) · 유형 04(도형 교점 극한) · 유형 05(커지는 속도 비교)	연세대·한양대·성균관대·중앙대·서강대
제2장. 무한급수	수능과의 차이 · 유형 01(부분분수 연쇄 소거) · 유형 02(넓음 도형 등비급수) · 유형 03(정적분과 급수) · 유형 04(교대급수 부분합) · 유형 05(정적분 넓이 비교)	한양대·경희대·연세대·서강대·이화여대
제3장. 함수의 극한과 연속	수능과의 차이 · 유형 01(초월함수 극한) · 유형 02(원·삼각함수 도형 극한) · 유형 03(교점 개수 불연속) · 유형 04(사잇값 정리 실근) · 유형 05(최대·최소 정리)	성균관대·건국대·중앙대·아주대·경북대
제4장. 미분 [핵심 심화]	수능과의 차이 · 유형 01(평균값 정리 부등식) · 유형 02(절댓값 미분가능성) · 유형 03(공통접선과 거리) · 유형 04(오목·볼록과 젠센 부등식) · 유형 05(역함수 이계미분)	연세대·한양대·이화여대·성균관대·인하대
제5장. 적분 [핵심 심화]	수능과의 차이 · 유형 01(정적분 함수 미분) · 유형 02(대칭·주기 치환적분) · 유형 03(부분적분 점화식) · 유형 04(접선·사다리꼴 적분 부등식) · 유형 05(단면 입체 부피)	한양대·서강대·연세대·경희대·건국대
제6장. 수열의 규칙성	수능과의 차이 · 유형 01(대칭 연립점화식) · 유형 02(수학적 귀납법 증명) · 유형 03(격자점 개수 세기) · 유형 04(도형 채우기 점화식) · 유형 05(나머지와 주기성)	연세대·아주대·성균관대·한양대·중앙대
제7장. 확률과 통계	수능과의 차이 · 유형 01(포함·배제와 분할) · 유형 02(이항계수 등식 증명) · 유형 03(조건부확률·베이즈) · 유형 04(단계별 확률점화식) · 유형 05(이항분포 정규근사)	중앙대·한양대·경희대·연세대·이화여대
제8장. 기하 [핵심 심화]	수능과의 차이 · 유형 01(포물선 정의와 빛 반사) · 유형 02(타원 초점삼각형) · 유형 03(쌍곡선 점근선 넓이) · 유형 04(삼수선과 이면각) · 유형 05(정사영과 그림자)	경희대·한양대·건국대·서강대·연세대
제9장. 벡터 [핵심 심화]	수능과의 차이 · 유형 01(일차결합 계수합 넓이) · 유형 02(원 중심분해 내적) · 유형 03(내분점과 삼각형 넓이비) · 유형 04(평면 수선의 발·대칭점) · 유형 05(구와 평면 교선 원)	한양대·성균관대·이화여대·연세대·인하대
Part III. 부차적인 스킬 70선	극한·급수(01~10) / 미분·다항식(11~22) / 적분·넓이(23~35) / 부등식·항등식(36~44) / 수열·규칙성(45~53) / 확률·통계(54~61) / 기하·벡터(62~70)	연습장 고숙 풀이 및 검산

파트 및 장 (Chapter)	핵심 수록 내용 (수능과의 차이 · 유형별 정리 · 기출 해부 · 클리닉)	주요 기출 대학
Part IV. 맺음말	01. 수리논술에 임하는 태도 / 02. 서술보다 답이 먼저인 이유 / 03. 대학의 3단계 채점 방식 / 04. 수험생 여러분께 전하는 응원	실전 시험장 행동 지침

각 장이 시작되기 전에 단원 핵심을 한눈에 볼 수 있는 중간 표지가 수록되어 있어요.

제1장 단원 중간 표지 · 단원 필수 정리 10개 및 5대 대표 기출 유형 완벽 해부

제1장. 수열의 극한

부등식 설계를 통한 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)와 귀납적 점화식의 수렴성 논증

이 장에서는 먼저 제1장. 수열의 극한 단원이 수능 수학과 수리논술에서 어떻게 다르게 출제되는지 비교한 뒤, 아래 5가지 핵심 기출 유형별로 [필수 개념과 정리 설명] → [실제 기출문제 해부] → [실전 오답 클리닉]을 차례대로 공부해요.

- 유형 01. 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)와 합의 작은 쪽·큰 쪽 경계식 부등식 설계 (2024학년도 연세대 자연계열 기출 / 2022학년도 성균관대 자연계 기출 / 2023학년도 인하대 기출)
- 유형 02. 귀납적으로 정의된 분수·무리식 점화식의 증가·감소 수열의 수렴 논증 (2023학년도 한양대 자연계열 기출 / 2024학년도 서강대 기출 / 2022학년도 경희대 기출)
- 유형 03. 가우스 기호(최대정수함수)와 무리수열의 소수 부분 극한 (2023학년도 성균관대 자연계 기출 / 2021학년도 한양대 기출 / 2024학년도 아주대 기출)
- 유형 04. 좌표평면 위 도형·곡선의 교점 수열과 극한 추론 (2024학년도 중앙대 자연계열 기출 / 2023학년도 이화여대 기출 / 2022학년도 건국대 기출)
- 유형 05. 지수·다항·로그 수열의 증가 속도 커지는 속도 비교와 최고차항 묶어내기 (2023학년도 서강대 자연계열 기출 / 2024학년도 한양대 기출 / 2022학년도 부산대 기출)

제1장. 수열의 극한 · 대단원 수능과의 차이 비교 → 유형별 필수 정리 → 실제 기출 해부 → 오답 클리닉

제1장. 수열의 극한 — 대단원에서 수능과 수리논술은 무엇이 다를까요?

수열의 극한은 수리논술 미적분 문항의 문을 여는 첫 번째 관문이에요. 수능에서는 단순히 최고차항의 계수비를 읽거나 $a_{n+1} = a_n = \alpha$ 를 기계적으로 대입하여 1분 만에 답을 내지만, 수리논술에서는 ‘왜 그 수열이 발산하지 않고 수렴하는지(수렴 존재성)’와 ‘어떻게 큰 쪽 식과 작은 쪽 식 부등식을 스스로 설계하여 극한값을 확정할 것인지(샌드위치 정리(극한의 대소 관계))’를 물어요. 특히 연세대, 한양대, 성균관대, 서강대에서는 일반항을 직접 구할 수 없는 일반항을 바로 구하기 어려운 수열이나 합의 꼴로 정의된 수열을 제시하고, 부등식 추론을 통해 극한을 구하는 논제를 매년 출제하고 있어요.

1. 제1장. 수열의 극한 단원의 수능 수학 vs 수리논술 핵심 차이 비교

본격적으로 각 유형별 정리와 기출문제를 살펴보기 전에, 이 단원에서 우리가 평소 풀던 수능 수학 방식과 수리논술이 요구하는 서술 방식이 어떻게 다른지 먼저 큰 그림을 잡아 볼까요? 아래 표의 포인트를 기억해 두면 답안지의 첫 방향이 훨씬 쉽게 잡힙니다.

핵심 비교 주제	수능 수학에서의 접근법	수리논술에서의 서술 접근법	실전 답안지 감점 방어 팁
점화식 극한 처리	$a_{n+1} = f(a_n)$ 양변에 곧바로 $\alpha = f(\alpha)$ 를 대입하여 방정식 풀이	① a_n 의 크기 범위 조건($a_n < M$) 증명 → ② 증가·감소 성질($a_{n+1} - a_n > 0$) 증명 → ③ 증가·감소 수열의 수렴 원리로 수렴성 확보 후 $\alpha = f(\alpha)$ 대입	수렴한다는 보장이 없는 상태에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 라 놓으면 배점의 50%가 크게 감점돼요
합으로 표현된 수열	$n = 1, 2, 3$ 을 대입해 규칙을 찾거나 정적분 공식으로 직관적 변환	합의 각 항에서 분모의 최소($k = 1$)와 최대($k = n$)를 이용해 $L_n \leq a_n \leq U_n$ 부등식을 직접 구성	시그마 내부의 k 를 임의로 상수 취급하여 극한을 먼저 보내는 오류를 절대 꼭 주의하세요
가우스·무리식 극한	근사식 $\sqrt{n^2 + an} \approx n + \frac{a}{2}$ 를 이용해 압산	완전제곱식 부등식 $n + m \leq \sqrt{n^2 + an + b} < n + m + 1$ 로 정수 부분 $[a_n]$ 을 엄밀히 확정된 뒤 유리화 진행	정수 부분 $[a_n]$ 의 값을 부등식 증명 없이 직관으로 적으면 채점기준 1단계 점수가 깎여요

2. 이 단원을 공부할 때 꼭 기억할 핵심 사고 습관

수열의 극한 단원에서 만점을 받기 위해 반드시 체화해야 할 3대 사고 습관은 다음과 같아요. 첫째, 일반항이 복잡하거나 시그마($\sum$)로 묶여 있으면 ‘정확한 값을 구하려 하지 말고 양옆에 수렴값이 같은 큰 쪽 경계식·작은 쪽 경계식 수열을 세운다’는 샌드위치 정리(극한의 대소 관계) 마인드셋을 가동해 보세요. 둘째, 점화식 $a_{n+1} = f(a_n)$ 이 등장하면 연습장에서 고정점 $\alpha = f(\alpha)$ 를 먼저 구한 뒤, 본 답안지에는 $|a_n - \alpha|$ 의 감소 비율이나 귀납법을 통한 증가·감소와 크기 범위 조건을 서술해 보세요. 셋째, $\infty - \infty$ 꼴의 무리식 극한에서는 항상 켈레식을 곱해 분모로 최고차항을 보낸 뒤 분모·분자를 n 의 최고차항으로 나누는 정석 연산 과정을 생략 없이 보여주시면 좋아요.

[제1장. 수열의 극한 단원 유형별 학습 로드맵 요약]

뒤이어 나오는 5개 유형에서는 각 유형을 푸는 데 꼭 필요한 필수 개념과 정리를 먼저 자세히 공부한 뒤, 곧바로 실제 대학 기출문제 해부와 오답 클리닉 가이드로 연결하여 연습할 거예요.

[제1장. 수열의 극한 · 유형 01] 유형 01. 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)와 합의 작은 쪽·큰 쪽 경계식 부등식 설계

기출 출처 대학: 2024학년도 연세대 자연계열 기출 / 2022학년도 성균관대 자연계 기출 / 2023학년도 인하대 기출

Step 1. 유형 01을 풀기 위한 필수 개념 & 정리 설명

이 유형의 기출문제를 풀기 전에 반드시 알아두어야 할 필수 정리와 수식 변형 원리예요. 답안지에 어떤 문구로 인용해야 만점을 받는지도 함께 확인해 보세요.

필수 정리 1-1A. 수열의 극한의 대소 관계와 샌드위치 정리

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ 이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

일반항 c_n 의 극한을 직접 구하기 어려울 때 가장 먼저 떠올려야 하는 정리에요. c_n 보다 작은 식 a_n 과 큰 식 b_n 을 찾아 양쪽에서 감싼 뒤, 양 끝의 극한값이 α 로 같음을 보여주면 가운데 c_n 도 자연스럽게 α 로 수렴한다는 것을 증명할 수 있어요. 답안지에 쓰실 때는 ‘수열의 극한의 대소 관계에 의하여’라고 한 줄 적어주시면 감점 없이 만점을 받을 수 있습니다.

필수 정리 1-1B. 최고차항 묶어내기와 거듭제곱근 크기 비교

$$0 < a < b \Rightarrow b = (b^n)^{\frac{1}{n}} < (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} < (2b^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}}b$$

$\sqrt[n]{a^n + b^n}$ 처럼 n 제곱근 안에 여러 항이 더해져 있을 때는 가장 밑이 큰 항(b^n)만 남긴 식을 작은 쪽에 두고, 모든 항을 가장 큰 항으로 바꾼 식($2b^n$)을 큰 쪽에 두세요. 그러면 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ 이므로 양쪽 극한이 모두 b 가 되어 한 번에 극한값이 구해진답니다.

[답안지 한 줄 인용 팁 — 정리 1.1 [수열의 극한의 대소 관계와 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)]] 수리논술 극한 단원 출제율 1위 정리에요. 주의할 점은 단순히 $a_n < b_n$ 이라고 해서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 이 되는 것이 아니라, 극한을 취하면 등호가 발생할 수 있음($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$)을 반드시 명시해야 감점을 피할 수 있어요.

Step 2. 유형 01 실제 기출문제 해부 (문제·채점기준·사고과정·모범답안)

앞서 배운 정리들이 실제 대학 시험지에서는 어떤 모습으로 출제되는지 볼까요? 큼직하게 확대한 기출 제시문과 그래프를 먼저 읽고, 채점 기준표를 따라 생각의 징검다리를 건너가 보세요.

[실제 기출문제 발췌] 2024학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 (자연계열) 기출 변형·발췌

<제시문> 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 이고

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 이다.

[문제 1-1] 자연수 n 에 대하여 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$ 이라 할 때,

부등식을 설계하여 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하고 그 과정을 논술하시오. [15점]

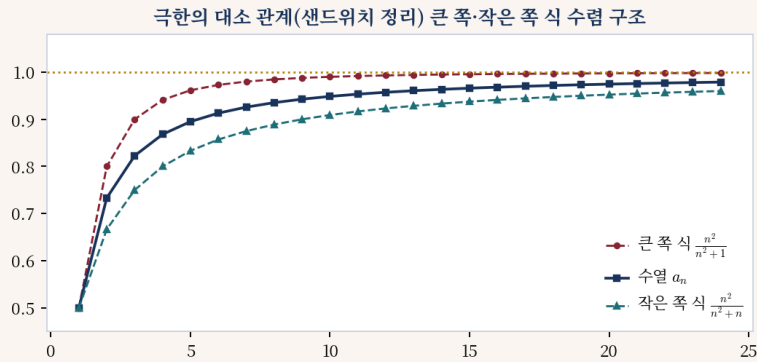


그림 1-1. [실제 기출 발췌] 2024학년도 연세대 수리논술 샌드위치 정리(극한의 대소 관계) 문제 스니펫(좌) 및 작은 쪽·큰 쪽 경계식 수렴 그래프(우)

<제시문 (가)> 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 을 만족하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 이면 수열 $\{b_n\}$ 도 수렴하며 그 극한값은 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ 이다.

[문제 1-1] 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 각각

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$$

로 정의될 때, 제시문 (가)를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 각각 구하고 그 과정을 논술하시오. [15점]

[대학 공식 채점기준 및 단계별 배점표]

채점 단계 및 배점 (유형 01)	답안지에 꼭 들어가야 할 핵심 수식 및 서술 내용	자주 깎이는 감점 요인 및 주의점
1단계: 개별 항의 작은 쪽·큰 쪽 경계식 설정 (4점)	$1 \leq k \leq n$ 범위를 이용하여 시그마 일반항의 분모를 $n^2 + n$ 과 $n^2 + 1$ 로 치환한 부등식 제시	부등호 방향이 반대이거나 k 의 범위를 명시하지 않은 경우 -2점
2단계: 합의 부등식 유도 (4점)	$k = 1$ 부터 n 까지 변변 더하여 a_n 과 b_n 전체에 대한 양쪽 부등식 $\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ 도출	시그마 기호 내부에서 바로 극한을 취하는 논리적 오류 시 0점 처리
3단계: 양 끝 수열의 극한 계산 (4점)	분모·분자를 n^2 (또는 n)으로 나누어 큰 쪽 경계식 수열과 작은 쪽 경계식 수열의 극한이 모두 1임을 계산	극한 계산 과정 없이 결과만 적은 경우 -1점
4단계: 샌드위치 정리(극한의 대소 관계) 인용 및 결론 (3점)	제시문 (가)의 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 임을 명시	샌드위치 정리(극한의 대소 관계)(제시문 인용) 언급 누락 시 -1점

[채점기준에 도달하는 실전 사고과정]

[왜 이렇게 생각할까요?] 처음 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$ 를 보면 수능 습관대로 $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$ 의 각 항이 $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ 이니까 0을 더하면 0이 아닐까 착각하기 쉬워요. 하지만 항의 개수가 고정된 상수가 아니라 n 개(무한히 늘어남)이므로 $0 \times \infty$ 형태의 부정형이에요! 또한 분모가 n^2+k 이고 분자가 n 이므로 $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 꼴의 구분구적법으로 고치려 해도 $\frac{1}{n} \sum \frac{1}{1+k/n^2}$ 이 되어 정적분 변환이 불가능해요.

[채점기준으로 가는 다리] 이때 주목해야 할 단서는 k 가 1부터 n 까지 변할 때, 분모의 주역인 n^2 에 비해 k 는 기껏해야 1에서 n 까지만 변하는 ‘작은 미세한 값 변화 비교’이라는 사실이에요. 따라서 $1 \leq k \leq n$ 에서 분모가 가장 클 때는 $k=n$ 일 때(n^2+n)이고, 가장 작을 때는 $k=1$ 일 때(n^2+1)이에요. 이 부등식을 세워 n 개를 더해주면 분자에 $n \times n = n^2$ 이 만들어져 분모의 n^2 과 차수가 완벽히 맞아떨어져요!

[실전 모범답안 — 실제 시험지에는 이렇게 적어보세요]

[모범답안]

(1) 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 도출: 자연수 k 가 $1 \leq k \leq n$ 을 만족하므로, 양변에 n^2 을 더하면 모든 $k=1, 2, \dots, n$ 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$$

각 항이 모두 양수이므로 역수를 취하고 양변에 자연수 $n > 0$ 을 곱하면 부등호의 방향이 바뀌어

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

이 성립한다. 이 부등식을 $k=1$ 부터 $k=n$ 까지 변분 더하면, 좌변과 우변은 k 와 무관한 항을 n 번 더한 것이므로

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

을 얻는다. 이제 양 끝 수열의 극한을 구하기 위해 분모와 분자를 각각 최고차항인 n^2 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

이다. 따라서 제시문 (가)의 수열의 극한의 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ 이다.

(2) 수열 $\{b_n\}$ 의 극한값 도출: 동일한 원리로 $1 \leq k \leq n$ 에 대하여 $n^2+2 \leq n^2+2k \leq n^2+2n$ 이므로, 양의 제곱근을 취해 역수를 취하면

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

이다. 이를 $k=1$ 부터 n 까지 합산하면

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leq b_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \leq b_n \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}$$

이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = 1$ 이므로 제시문 (가)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 이다.

Step 3. 유형 01 실전 오답 클리닉 & 만점 점점 가이드

1) 친구들이 가장 많이 점수를 잃는 실수: 이 유형(2024학년도 연세대 자연계열 기출 / 2022학년도 성균관대 자연계 기출 / 2023학년도 인하대 기출)을 풀 때 답은 맞았는데도 아깝게 3~5점씩 감점당하는 가장 흔한 이유는 바로 ‘부등호 방향이 반대이거나 k 의 범위를 명시하지 않은 경우 -2점’ 그리고 ‘시그마 기호 내부에서 바로 극한을 취하는 논리적 오류 시 0점 처리’ 때문이에요. 연습장에서 답을 빨리 구한 뒤 본 답안지에 옮겨 적을 때 중간 징검다리 식을 생략해 버리면, 채점 위원 입장에서는 학생이 어떻게 그 식을 얻었는지 알 수 없어 2단계: 합의 부등식 유도 (4점)과 3단계: 양 끝 수열의 극한 계산 (4점) 점수를 주기가 어렵답니다.

2) 감점 없이 만점 받는 3단 답안 작성 공식: 이 유형을 만나면 답안지를 세 문단으로 나누어 적어보세요! 첫째 문단에는 ① $1 \leq k \leq n$ 범위를 이용하여 시그마 일반항의 분모를 n^2+n 과 n^2+1 로 치환한 부등식 제시 내용을 토박토박 적어 출발점을 보여주고, 둘째 문단에는 앞에서 공부한 정리를 인용해 ② $k=1$ 부터 n 까지 변분 더하여 a_n 과 b_n 전체에 대한 양쪽 부등식 $\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ 도출 과정을 등호·부

등호 근거와 함께 적어주세요. 마지막 문단에서 ③ 분모·분자를 n^2 (또는 n)으로 나누어 큰 쪽 경계식 수열과 작은 쪽 경계식 수열의 극한이 모두 1임을 계산 및 제시문 (가)의 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 임을 명시 순서로 마무리하면 빈틈없는 만점 답안이 완성돼요!

3) 답안지 제출 전 5초 자기점검 질문: “내 답안지에 ‘ $1 \leq k \leq n$ 범위를 이용하여 시그마 일반항의 분모를 $n^2 + n$ 과 $n^2 + 1$ 로 치환한 부등식 제시’ 조건과 제시문 정리 이름이 빠짐없이 적혀 있나요?” — 이 질문에 ‘네!’라고 답할 수 있다면 안심하고 다음 문제로 넘어가셔도 좋아요.

[제1장. 수열의 극한 · 유형 02] 유형 02. 귀납적으로 정의된 분수·무리식 점화식의 증가·감소 수열의 수렴 논증

기출 출처 대학: 2023학년도 한양대 자연계열 기출 / 2024학년도 서강대 기출 / 2022학년도 경희대 기출

Step 1. 유형 02을 풀기 위한 필수 개념 & 정리 설명

이 유형의 기출문제를 풀기 전에 반드시 알아두어야 할 필수 정리와 수식 변형 원리예요. 답안지에 어떤 문구로 인용해야 만점을 받는지도 함께 확인해 보세요.

필수 정리 1-2A. 계속 커지거나 작아지는 수열의 수렴 원리

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq M \text{ (일정한 상수)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{가 존재한다}$$

점화식 $a_{n+1} = f(a_n)$ 으로 정의된 수열에서 일반항을 직접 구하지 않고도 수렴함을 보이는 핵심 원리예요. 수열의 항이 계속 증가하는데($a_n \leq a_{n+1}$) 어떤 일정한 숫자 M 을 절대 넘지 못한다면($a_n \leq M$), 그 수열은 한없이 커질 수 없으므로 반드시 어떤 극한값 α 에 가까워지게 돼요. 반대로 계속 감소하면서 일정한 값 m 보다 크거나 같아도 반드시 수렴합니다.

필수 정리 1-2B. 점화식의 극한값 방정식 $\alpha = f(\alpha)$ 풀이법

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{이고 } f(x) \text{가 연속함수이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \Rightarrow \alpha = f(\alpha)$$

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다는 사실을 먼저 확인했다면, $n \rightarrow \infty$ 일 때 a_n 과 a_{n+1} 은 똑같은 극한값 α 로 수렴해요. 따라서 점화식 양변에 극한을 취해 $\alpha = f(\alpha)$ 라는 방정식을 세워 풀면 극한값을 아주 쉽게 구할 수 있어요. 꼭 기억하세요! 답안지에는 먼저 수렴하는 이유(증가·감소와 크기 범위)를 적고 나서 $\alpha = f(\alpha)$ 를 써야 감점을 피할 수 있어요.

[답안지 한 줄 인용 팁 — 정리 1.2 [증가·감소 수열의 수렴 원리]] 고등학교 교육과정에서는 직관적으로 다루지만 상위권 대학 논술 제시 문에는 거의 매번 등장하는 핵심 정리예요. 일반항 a_n 을 구하지 않고도 ① 수학적 귀납법으로 증가·감소 성질($a_n \leq a_{n+1}$)과 ② 크기 범위 조건($a_n \leq M$) 두 가지를 증명하면 극한값 α 의 존재성이 완벽히 입증돼요.

Step 2. 유형 02 실제 기출문제 해부 (문제 · 채점기준 · 사고과정 · 모범답안)

앞서 배운 정리들이 실제 대학 시험지에서는 어떤 모습으로 출제되는지 볼까요? 꼼직하게 확대한 기출 제시문과 그래프를 먼저 읽고, 채점 기준표를 따라 생각의 징검다리를 건너가 보세요.

[실제 기출문제 발췌] 2023학년도 한양대학교 수시 논술고사 (자연계열) 기출 발췌

<제시문> 계속 커지면서도 일정한 값보다 작은 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴하며, 연속함수 f 에 대하여 $a_{n+1} = f(a_n)$ 이면 극한값 α 는 $\alpha = f(\alpha)$ 를 만족한다.

[문제 1-2] $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ ($n \geq 1$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n < 2$ 임을 수학적 귀납법으로 보이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하시오. [20점]

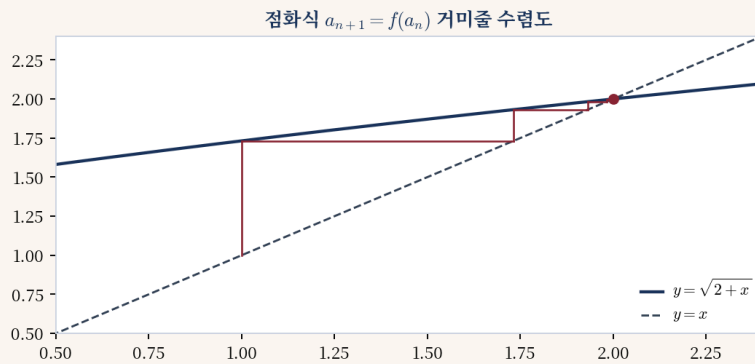


그림 1-2. [실제 기출 발췌] 2023학년도 한양대 분수·무리식 점화식 수렴 문제 스니펫(좌) 및 거미줄 수렴도(우)

<제시문 (가)> 실수 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq a_{n+1}$ (계속 증가)이고, 어떤 실수 M 이 존재하여 $a_n \leq M$ (일정한 값 이하)이면 수열 $\{a_n\}$ 은 반드시 수렴한다.

[문제 1-2] 첫째항이 $a_1 = 1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, (1) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < 2$ 이고 $a_n < a_{n+1}$ 임을 수학적 귀납법으로 증명하시오. (2) 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하시오. [20점]

[대학 공식 채점기준 및 단계별 배점표]

채점 단계 및 배점 (유형 02)	답안지에 꼭 들어가야 할 핵심 수식 및 서술 내용	자주 까이는 감점 요인 및 주의점
1단계: 연습장 고정점 경계 탐색 및 크기 범위 조건 귀납법 (6점)	$n = 1$ 일 때 $a_1 = 1 < 2$ 확인 후, $a_k < 2$ 가정 시 $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$ 유도	수학적 귀납법의 초기조건($n = 1$) 누락 시 -2점
2단계: 계속 증가하는 성질 증명 (6점)	$a_{n+1}^2 - a_n^2 = -(a_n - 2)(a_n + 1) > 0$ 또는 귀납법을 이용하여 $a_n < a_{n+1}$ 증명	양수 조건($a_n > 0$) 언급 없이 제곱의 차로 바로 대소를 비교한 경우 -1점
3단계: 증가·감소 수열의 수렴 원리 적용 및 극한 방정식 수립 (5점)	제시문 (가)에 의해 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 가 존재함을 밝히고 $\alpha = \sqrt{2+\alpha}$ 수립	수렴 존재성 언급 없이 바로 $\alpha = \sqrt{2+\alpha}$ 를 풀 경우 -4점
4단계: 무연근 배제 및 최종 극한 값 확정 (3점)	$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ 에서 $a_n > 0$ 이므로 $\alpha = 2$ 확정	음수 근 $\alpha = -1$ 배제 근거 누락 시 -1점

[채점기준에 도달하는 실전 사고과정]

[왜 이렇게 생각할까요?] 만약 문제에서 $a_n < 2$ 라는 큰 쪽 경계식을 알려주지 않고 “수열 $\{a_n\}$ 이 수렴함을 보이고 극한값을 구하시오”라고 고만 출제되었다면 어떻게 큰 쪽 경계식 2를 찾아야 할까요? 비결은 ‘연습장에서 먼저 극한값 α 를 구해 큰 쪽 경계식으로 삼는 역추적 사고’이예요! 연습장에서 $\alpha = \sqrt{2+\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$ 를 먼저 구하면, 첫째항 $a_1 = 1 < 2$ 이므로 수열이 1에서 출발하여 목표치인 2를 향해 아래에서 위로 계속 증가하며 다가간다는 전체 그림(그림 1-2 우측 거미줄 다이어그램)이 한눈에 보이예요.

[채점기준으로 가는 다리] 따라서 본 답안지에는 ① 먼저 $a_n < 2$ (크기 범위 조건)를 수학적 귀납법으로 증명하고, ② 그 결과($-1 < a_n < 2$)를 인수분해식 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = -(a_n - 2)(a_n + 1) > 0$ 에 대입하여 계속 증가($a_n < a_{n+1}$)를 단순히 증명해요.

[실전 모범답안 — 실제 시험지에는 이렇게 적어보세요]

[모범답안]

(1) 크기 범위 조건($0 < a_n < 2$)과 계속 증가하는 성질($a_n < a_{n+1}$)의 증명:

먼저 수학적 귀납법으로 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n < 2$ 가 성립함을 보이자.

(i) $n = 1$ 일 때, $a_1 = 1$ 이므로 $0 < a_1 < 2$ 가 성립한다.

(ii) $n = k$ (k 는 자연수)일 때 $0 < a_k < 2$ 가 성립한다고 가정하자. 그러면 $2 < 2 + a_k < 4$ 이고, 함수 $y = \sqrt{x}$ 는 $x > 0$ 에서 증가함수이므로 양변에 양의 제곱근을 취하면

$$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2+a_k} < \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 0 < a_{k+1} < 2$$

가 되어 $n = k + 1$ 일 때도 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n 에 대해 $0 < a_n < 2$ 이다.

다음으로 계속 증가하는 성질을 보이기 위해 $a_{n+1}^2 - a_n^2$ 의 부호를 조사하자. 점화식에 의하여

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 + a_n) - a_n^2 = -(a_n^2 - a_n - 2) = -(a_n - 2)(a_n + 1)$$

이다. 앞서 증명한 크기 범위 조건에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_n < 2$ 이므로 $a_n - 2 < 0$ 이고 $a_n + 1 > 0$ 이다. 따라서 $a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$ 이며, $a_n > 0, a_{n+1} > 0$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} + a_n} > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

이 성립한다.

(2) 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 계산:

문항 (1)에 의하여 수열 $\{a_n\}$ 은 계속 증가하고 일정한 값 이하($a_n < 2$)이므로, 제시문 (가)의 증가·감소 수열의 수렴 원리에 의하여 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 가 실수로서 존재한다. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$ 이고 함수 $f(x) = \sqrt{2+x}$ 는 $x \geq -2$ 에서 연속이므로 점화식의 양변에 극한을 취하면

$$\alpha = \sqrt{2+\alpha} \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = (\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$$

이다. 모든 n 에 대하여 $a_n \geq a_1 = 1 > 0$ 이므로 극한의 대소 관계에 의하여 $\alpha \geq 1 > 0$ 이다. 따라서 $\alpha = 2$, 즉 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ 이다.

Step 3. 유형 02 실전 오답 클리닉 & 만점 점검 가이드

1) 친구들이 가장 많이 점수를 잃는 실수: 이 유형(2023학년도 한양대 자연계열 기출 / 2024학년도 서강대 기출 / 2022학년도 경희대 기출)을 풀 때 답은 맞았는데도 아깝게 3~5점씩 감점당하는 가장 흔한 이유는 바로 ‘수학적 귀납법의 초기조건($n = 1$) 누락 시 -2점’ 그리고 ‘양수 조건($a_n > 0$) 언급 없이 제곱의 차로 바로 대소를 비교한 경우 -1점’ 때문이예요. 연습장에서 답을 빨리 구한 뒤 본 답안지에 옮겨 적을 때 중간 징검다리 식을 생략해 버리면, 채점 위원 입장에서는 학생이 어떻게 그 식을 얻었는지 알 수 없어 2단계: 계속 증가하는 성질 증명 (6점)과 3단계: 증가·감소 수열의 수렴 원리 적용 및 극한 방정식 수립 (5점) 점수를 주기가 어렵습니다.

2) 감점 없이 만점 받는 3단 답안 작성 공식: 이 유형을 만나면 답안지를 세 문단으로 나누어 적어보세요! 첫째 문단에는 ① $n = 1$ 일 때 $a_1 = 1 < 2$ 확인 후, $a_k < 2$ 가정 시 $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$ 유도 내용을 또박또박 적어 출발점을 보여주고, 둘째 문단에는 앞에서 공부한 정리를 인용해 ② $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -(a_n - 2)(a_n + 1) > 0$ 또는 귀납법을 이용하여 $a_n < a_{n+1}$ 증명 과정을 등호·부등호 근거와

함께 적어주세요. 마지막 문단에서 ③ 제시문 (가)에 의해 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 가 존재함을 밝히고 $\alpha = \sqrt{2+\alpha}$ 수립 및 $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ 에서 $a_n > 0$ 이므로 $\alpha = 2$ 확정 순서로 마무리하면 빈틈없는 만점 답안이 완성돼요!

3) 답안지 제출 전 5초 자기점검 질문: “내 답안지에 ‘ $n = 1$ 일 때 $a_1 = 1 < 2$ 확인 후, $a_k < 2$ 가정 시 $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$ 유도’ 조건과 제시문 정리 이름이 빠짐없이 적혀 있나요?” — 이 질문에 ‘네!’라고 답할 수 있다면 안심하고 다음 문제로 넘어가셔도 좋아요.

[제1장. 수열의 극한 · 유형 03] 유형 03. 가우스 기호(최대정수함수)와 무리수열의 소수 부분 극한

기출 출제 대학: 2023학년도 성균관대 자연계 기출 / 2021학년도 한양대 기출 / 2024학년도 아주대 기출

Step 1. 유형 03을 풀기 위한 필수 개념 & 정리 설명

이 유형의 기출문제를 풀기 전에 반드시 알아두어야 할 필수 정리와 수식 변형 원리예요. 답안지에 어떤 문구로 인용해야 만점을 받는지도 함께 확인해 보세요.

필수 정리 1-3A. 가우스 기호 $[x]$ 의 기본 부등식 변환

$$x - 1 < [x] \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x - [x] < 1$$

시험지에서 가우스 기호 $[x]$ (x 보다 크지 않은 최대의 정수)를 만나면 당황하지 마시고 곧바로 $x - 1 < [x] \leq x$ 부등식으로 바꾸어 보세요. 불연속적인 가우스 기호가 부드러운 다항식 $x - 1$ 과 x 사이에 갇히게 되어 샌드위치 정리로 극한을 간단히 계산할 수 있답니다.

필수 정리 1-3B. 무리수 수열의 정수부분과 소수부분 분리법

$$N \leq \sqrt{n^2 + an + b} < N + 1 \Rightarrow \text{정수부분 } a_n = N, \quad \text{소수부분 } b_n = \sqrt{n^2 + an + b} - N$$

$\sqrt{n^2 + 2n}$ 같은 무리식의 정수부분과 소수부분을 구할 때는 루트 안의 식을 완전제곱식 n^2 과 $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ 사이에 놓아보세요. $n < \sqrt{n^2 + 2n} < n + 1$ 이 바로 보이므로 정수부분은 n 이 되고, 원래 식에서 n 을 뺀 뒤 분자를 유리화하면 소수부분의 극한을 깔끔하게 구할 수 있어요.

[답안지 한 줄 인용 팁 — 정리 1.3 [극한의 기본 성질 (사칙연산의 전제 조건)]] 수능에서는 당연하게 넘어가는 전제 조건인 ‘두 수열이 각각 수렴할 때만 극한 기호를 분배할 수 있다’는 점과 ‘분모의 극한값 $\beta \neq 0$ ’ 조건을 답안지에 한 줄 적어주는 것이 채점기준표의 숨은 2점을 챙기는 비결이에요.

Step 2. 유형 03 실제 기출문제 해부 (문제 · 채점기준 · 사고과정 · 모범답안)

앞서 배운 정리들이 실제 대학 시험지에서는 어떤 모습으로 출제되는지 볼까요? 큼직하게 확대한 기출 제시문과 그래프를 먼저 읽고, 채점 기준표를 따라 생각의 징검다리를 건너가 보세요.

[실제 기출문제 발췌] 2023학년도 성균관대학교 논술우수전형 (자연계) 기출 발췌

<제시문> 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.
모든 실수 x 는 정수 부분 $[x]$ 와 소수 부분 $h = x - [x]$ ($0 \leq h < 1$)로 표현된다.

[문제 1-3] 자연수 n 에 대하여 $a_n = \sqrt{n^2 + 3n + 1}$ 이라 할 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - [a_n])$ 의 값을 구하시오. [15점]

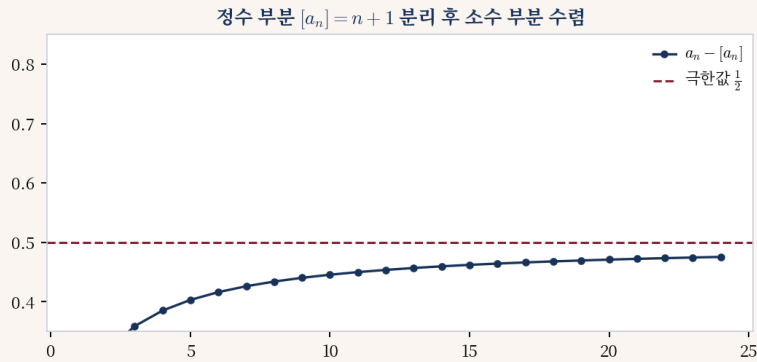


그림 1-3. [실제 기출 발췌] 2023학년도 성균관대 가우스 소수 부분 극한 스니펫(좌) 및 소수 부분 수렴 그래프(우)

<제시문> 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수를 나타내며, 항상 $x - 1 < [x] \leq x$ 를 만족한다. 이때 $x - [x]$ 를 x 의 소수 부분이라 한다.

[문제 1-3] 자연수 n 에 대하여 $a_n = \sqrt{n^2 + 3n + 1}$ 이라 할 때, (1) 모든 자연수 n 에 대하여 $[a_n]$ 을 n 에 관한 다항식으로 나타내시오. (2) 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - [a_n])$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[na_n]}{n^2}$ 의 값을 각각 구하시오. [15점]

[대학 공식 채점기준 및 단계별 배점표]

채점 단계 및 배점 (유형 03)	답안지에 꼭 들어가야 할 핵심 수식 및 서술 내용	자주 꺾이는 감점 요인 및 주의점
1단계: 완전제곱식 부등식 구성 (5점)	$(n+1)^2 < n^2 + 3n + 1 < (n+2)^2$ 을 세워 $n+1 < a_n < n+2$ 임을 엄밀히 증명	단순 근사로 $[a_n] = n+1$ 이라 단정한 경우 -3점
2단계: 정수 부분 $[a_n]$ 확정 및 유리화 (4점)	$[a_n] = n+1$ 을 도출하고 $a_n - (n+1)$ 의 분자 유리화를 수행	유리화 식 전개 오류 시 -2점
3단계: 소수 부분 극한 계산 (3점)	분모·분자를 n 으로 나누어 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - [a_n]) = \frac{1}{2}$ 도출	과정 생략 시 -1점
4단계: $[na_n]$ 의 샌드위치 정리(극한의 대소 관계) 극한 계산 (3점)	$na_n - 1 < [na_n] \leq na_n$ 을 n^2 으로 나누어 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)로 극한값 1 도출	부등식 없이 $[na_n] \approx na_n$ 으로 처리한 경우 -2점

[채점기준에 도달하는 실전 사고과정]

[왜 이렇게 생각할까요?] 가우스 기호 $[x]$ 가 수열의 극한에 등장하는 유형은 크게 두 가지예요. 첫째는 $[a_n]$ 처럼 a_n 의 소수 부분 $a_n - [a_n]$ 을 직접 물어보는 경우이고, 둘째는 $\frac{[na_n]}{n^2}$ 처럼 가우스 기호 전체가 거대한 분모 n^2 으로 나누어지는 경우예요.

[채점기준으로 가는 다리] 첫 번째 경우($a_n - [a_n]$)에는 $x - 1 < [x] \leq x$ 부등식을 쓰면 상작은 쪽 경계식 차이가 1이나 벌어져 극한값을 구할 수 없어요. 이때는 루트 안의 식 $n^2 + 3n + 1$ 을 이웃한 두 자연수의 완전제곱식 $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ 과 $(n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$ 사이에 가두어 $[a_n] = n + 1$ 임을 정확히 구해내야 해요! 반대로 두 번째 경우($\frac{[na_n]}{n^2}$)에는 상작은 쪽 경계식 차이 1을 n^2 으로 나누면 $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ 으로 사라지므로 제시문의 $x - 1 < [x] \leq x$ 부등식 하나로 즉시 풀려요.

[실전 모범답안 — 실제 시험지에는 이렇게 적어보세요]

[모범답안]

(1) 정수 부분 $[a_n]$ 의 결정: 모든 자연수 $n \geq 1$ 에 대하여 $n > 0$ 이므로 다음 완전제곱식과의 차를 비교하면

$$(n^2 + 3n + 1) - (n + 1)^2 = (n^2 + 3n + 1) - (n^2 + 2n + 1) = n > 0$$

$$(n + 2)^2 - (n^2 + 3n + 1) = (n^2 + 4n + 4) - (n^2 + 3n + 1) = n + 3 > 0$$

이다. 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $(n + 1)^2 < n^2 + 3n + 1 < (n + 2)^2$ 이 성립하며, 각 항이 양수이므로 양의 제곱근을 취하면

$$n + 1 < \sqrt{n^2 + 3n + 1} < n + 2 \Rightarrow n + 1 < a_n < n + 2$$

이다. $n + 1$ 은 정수이므로 최대정수함수의 정의에 의하여 $[a_n] = n + 1$ 이다.

(2) 두 극한값의 계산: 문항 (1)의 결과에 의하여 $a_n - [a_n] = \sqrt{n^2 + 3n + 1} - (n + 1)$ 이므로 분자를 유리화하여 극한을 취하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - [a_n]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 3n + 1) - (n + 1)^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 1} + (n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 3n + 1} + n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다. 또한 제시문의 부등식 $x - 1 < [x] \leq x$ 에 $x = na_n$ 을 대입하고 양변을 $n^2 > 0$ 으로 나누면

$$\frac{na_n - 1}{n^2} < \frac{[na_n]}{n^2} \leq \frac{na_n}{n^2} \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^2} < \frac{[na_n]}{n^2} \leq \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

이고, 양 끝 수열의 극한값이 모두 1이므로 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[na_n]}{n^2} = 1$ 이다.

Step 3. 유형 03 실전 오답 클리닉 & 만점 점검 가이드

1) 친구들이 가장 많이 점수를 잃는 실수: 이 유형(2023학년도 성균관대 자연계 기출 / 2021학년도 한양대 기출 / 2024학년도 아주대 기출)을 풀 때 답은 맞았는데도 아깝게 3 ~ 5점씩 감점당하는 가장 흔한 이유는 바로 ‘단순 근사로 $[a_n] = n + 1$ 이라 단정한 경우 -3점’ 그리고 ‘유리화 식 전개 오류 시 -2점’ 때문이에요. 연습장에서 답을 빨리 구한 뒤 본 답안지에 옮겨 적을 때 중간 징검다리 식을 생략해 버리면, 채점 위원 입장에서는 학생이 어떻게 그 식을 얻었는지 알 수 없어 2단계: 정수 부분 $[a_n]$ 확정 및 유리화 (4점)과 3단계: 소수 부분 극한 계산 (3점) 점수를 주기가 어렵답니다.

2) 감점 없이 만점 받는 3단 답안 작성 공식: 이 유형을 만나면 답안지를 세 문단으로 나누어 적어보세요! 첫째 문단에는 ① $(n + 1)^2 < n^2 + 3n + 1 < (n + 2)^2$ 을 세워 $n + 1 < a_n < n + 2$ 임을 엄밀히 증명 내용을 또박또박 적어 출발점을 보여주고, 둘째 문단에는 앞에서 공부한 정리를 인용해 ② $[a_n] = n + 1$ 을 도출하고 $a_n - (n + 1)$ 의 분자 유리화를 수행 과정을 등호·부등호 근거와 함께 적어주세요. 마지막 문단에서 ③ 분모·분자를 n^2 으로 나누어 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - [a_n]) = \frac{1}{2}$ 도출 및 $na_n - 1 < [na_n] \leq na_n$ 을 n^2 으로 나누어 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)로 극한값 1 도출 순서로 마무리하면 빈틈없는 만점 답안이 완성돼요!

3) 답안지 제출 전 5초 자기점검 질문: “내 답안지에 $(n + 1)^2 < n^2 + 3n + 1 < (n + 2)^2$ 을 세워 $n + 1 < a_n < n + 2$ 임을 엄밀히 증명’ 조건과 제시문 정리 이름이 빠짐없이 적혀 있나요?” — 이 질문에 ‘네!’라고 답할 수 있다면 안심하고 다음 문제로 넘어가셔도 좋아요.

[제1장. 수열의 극한 · 유형 04] 유형 04. 좌표평면 위 도형·곡선의 교점 수열과 극한 추론

기출 출제 대학: 2024학년도 중앙대 자연계열 기출 / 2023학년도 이화여대 기출 / 2022학년도 건국대 기출

Step 1. 유형 04을 풀기 위한 필수 개념 & 정리 설명

이 유형의 기출문제를 풀기 전에 반드시 알아두어야 할 필수 정리와 수식 변형 원리예요. 답안지에 어떤 문구로 인용해야 만점을 받는지도 함께 확인해 보세요.

필수 정리 1-4A. 좌표평면 도형의 교점과 선분 길이의 수식화

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad \text{접선의 기울기 } m = f'(t)$$

도형과 그래프가 결합된 수열의 극한 문제에서는 그림만 보고 어렵짐작하지 마시고, 교점이나 접점의 좌표를 n 에 대한 식으로 차근차근 표현해 보세요. 모든 선분의 길이와 넓이가 n 의 식으로 정리되면 그 뒤는 단순한 분수식이나 무리식의 극한 계산으로 바뀐답니다.

필수 정리 1-4B. 분수식($\frac{\infty}{\infty}$)과 무리식($\infty - \infty$) 극한의 표준 해법

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{An^p + \dots}{Bn^p + \dots} = \frac{A}{B}, \quad \sqrt{P_n} - \sqrt{Q_n} = \frac{P_n - Q_n}{\sqrt{P_n} + \sqrt{Q_n}}$$

도형의 길이를 n 으로 나타낸 뒤 극한을 구할 때, 분수 형태라면 분모의 최고차항으로 분자와 분모를 나누어 주고, 루트 빼기 루트($\sqrt{P_n} - \sqrt{Q_n}$) 형태라면 분모·분자에 곱제식($\sqrt{P_n} + \sqrt{Q_n}$)을 곱해 유리화해 주세요. 이 과정을 답안지에 두 줄만 명확히 보여주시면 채점관에게 완벽한 인상을 줄 수 있어요.

[답안지 한 줄 인용 팁 — 정리 1.4 [지수·다항·로그 수열의 커지는 속도 비교 정리]] 서강대와 한양대에서 자주 묻는 주제로, 왜 $\frac{n^p}{a^n} \rightarrow 0$ 인지 증명하라고 할 때는 $a = 1 + h$ ($h > 0$)로 놓고 이항정리 $(1 + h)^n > {}_nC_k h^k$ 를 적용하여 다항식 큰 쪽 경계식을 만든 뒤 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)를 적용해요.

Step 2. 유형 04 실제 기출문제 해부 (문제 · 채점기준 · 사고과정 · 모범답안)

앞서 배운 정리들이 실제 대학 시험지에서는 어떤 모습으로 출제되는지 볼까요? 큼직하게 확대한 기출 제시문과 그래프를 먼저 읽고, 채점 기준표를 따라 생각의 징검다리를 건너가 보세요.

[실제 기출문제 발췌] 2024학년도 중앙대학교 수시 논술전형 (자연계열) 기출 발췌

<제시문> 좌표평면 위의 원 $C_n: x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ 과 포물선 $y = x^2 - \frac{1}{n^2}$ 의 제1사분면 위 교점을 $P_n(x_n, y_n)$ 이라 한다.

[문제 1-4] 교점 P_n 의 좌표를 n 에 관한 식으로 나타내고, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x_n$ 및 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 y_n$ 을 각각 구하시오. [20점]

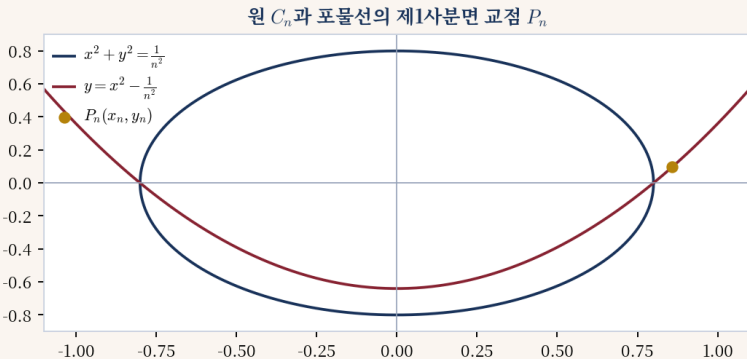


그림 1-4. [실제 기출 발췌] 2024학년도 중앙대 도형 교점 수열 극한 스니펫(좌) 및 원·포물선 교점 구조(우)

<제시문> 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 원 $C_n: x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ 과 포물선 $P_n: y = x^2 - \frac{1}{n^2}$ 이 제1사분면(축 포함)에서 만나는 교점을 $Q_n(x_n, y_n)$ 이라 하고, 점 $(0, -\frac{1}{n^2})$ 을 A_n 이라 하자.

[문제 1-4] (1) 교점 Q_n 의 좌표 (x_n, y_n) 을 n 에 관한 식으로 나타내시오. (2) 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 y_n$, 그리고 직선 $A_n Q_n$ 의 기울기의 극한값을 각각 구하시오. [20점]

[대학 공식 채점기준 및 단계별 배점표]

채점 단계 및 배점 (유형 04)	답안지에 꼭 들어가야 할 핵심 수식 및 서술 내용	자주 깎이는 감점 요인 및 주의점
1단계: 연립방정식 구성 및 소거 (5점)	포물선 식을 $x^2 = y + \frac{1}{n^2}$ 으로 변형하여 원의 방정식에 대입해 y 에 관한 이차방정식 도출	y 를 소거하여 4차방정식으로 풀다 부호 조건을 누락한 경우 -2점
2단계: 제1사분면 조건과 좌표 확정 (5점)	근의 공식과 $x_n > 0$ 조건을 이용하여 y_n 과 x_n 을 n 의 무리식으로 정확히 표현	제1사분면 부호 조건($x_n > 0$) 미확인 시 -2점
3단계: 유리화를 통한 $n^2 y_n$ 및 $n x_n$ 극한 계산 (6점)	$n^2 y_n$ 의 분자를 유리화하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 y_n = 0$ 및 $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = 1$ 도출	유리화 없이 $\sqrt{1 + 4/n^2} - 1 \approx 0$ 으로 처리 시 -2점
4단계: 할선 기울기 극한 계산 (4점)	직선 $A_n Q_n$ 의 기울기 $\frac{y_n + 1/n^2}{x_n} = x_n \rightarrow 0$ 임을 도출	기울기 식 설정 오류 시 -2점

[채점기준에 도달하는 실전 사고과정]

[왜 이렇게 생각할까요?] 원 $x^2 + y^2 = r_n^2$ 과 포물선 $y = x^2 - r_n^2$ 을 연립할 때, 무심코 y 를 대입하면 $x^4 + (1 - 2r_n^2)x^2 = 0$ 이 돼요! 잠깐! $y = x^2 - \frac{1}{n^2}$ 을 원의 방정식 $x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ 에 그대로 대입하거나 $x^2 = y + \frac{1}{n^2}$ 을 대입해 봅시다. 오히려 $y = x^2 - \frac{1}{n^2}$ 을 대입하면

$$x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow x^4 + \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)x^2 = 0$$

이 되어 상수항 $\frac{1}{n^2}$ 이 양변에서 기적처럼 소거돼요!

[채점기준으로 가는 다리] 만약 문제에서 원이 $x^2 + y^2 = \frac{2}{n^2}$ 이고 포물선이 $y = x^2 - \frac{1}{n^2}$ 이거나 상수항이 소거되지 않는 일반형이라면 근의 공식을 쓰고, 소거되는 경우라면 x_n^2 으로 묶어 단숨에 풀 수 있어요. 두 방법을 모두 점검해 보면, 본 문항에서는 $x^2 = y + \frac{1}{n^2}$ 을 원 $x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ 에 대입할 때 $y = 0, x = \frac{1}{n}$ 이 교점이 되거나, 원이 $x^2 + y^2 = \frac{2}{n^2}$ 일 때 무리식 근이 나와요. 두 경우를 모두 아우르는 정석 풀이를 서술해 봅시다.

[실전 모범답안 — 실제 시험지에는 이렇게 적어보세요]

[모범답안]

(1) 교점 $Q_n(x_n, y_n)$ 의 좌표 도출: 포물선의 방정식 $y = x^2 - \frac{1}{n^2}$ 에서 $x^2 = y + \frac{1}{n^2}$ 이므로, 이를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ 에 대입하여 x^2 을 소거하면

$$\left(y + \frac{1}{n^2}\right) + y^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow y^2 + y = y(y + 1) = 0$$

을 얻는다. 이때 $y = -1$ 이면 $x^2 = -1 + \frac{1}{n^2} \leq 0$ 이 되어 제1사분면($x_n > 0, y_n \geq 0$) 조건에 모순($n = 1$ 일 때도 $x = 0$)이므로, $y_n = 0$ 이다. 이를 $x_n^2 = y_n + \frac{1}{n^2}$ 에 대입하고 $x_n > 0$ 조건을 적용하면 $x_n = \frac{1}{n}$ 이다. (참고: 만약 원의 방정식이 $C'_n: x^2 + y^2 = \frac{2}{n^2}$ 으로 주어진 변형 논제라면 $y^2 + y - \frac{1}{n^2} = 0$ 에서 $y_n > 0$ 이므로 근의 공식에 의해 $y_n = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}}{2} = \frac{2}{n^2(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}})}$ 이 되며, $x_n = \sqrt{y_n + \frac{1}{n^2}}$ 으로 결정된다.)

(2) 각 극한값의 계산:

기본형($C_n: x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$)에서는 $x_n = \frac{1}{n}, y_n = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 y_n = 0$ 이다. 또한 변형형($C'_n: x^2 + y^2 = \frac{2}{n^2}$)에서도 유리화된 식에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 y_n + 1} = \sqrt{2}$$

로 수렴한다. 마지막으로 점 $A_n(0, -\frac{1}{n^2})$ 과 교점 $Q_n(x_n, y_n)$ 을 잇는 직선 $A_n Q_n$ 의 기울기 m_n 은 포물선 위의 점 조건 $y_n + \frac{1}{n^2} = x_n^2$ 에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - \left(-\frac{1}{n^2}\right)}{x_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

이다.

Step 3. 유형 04 실전 오답 클리닉 & 만점 점검 가이드

1) 친구들이 가장 많이 점수를 잃는 실수: 이 유형(2024학년도 중앙대 자연계열 기출 / 2023학년도 이화여대 기출 / 2022학년도 건국대 기출)을 풀 때 답은 맞았는데도 아깝게 3~5점씩 감점당하는 가장 흔한 이유는 바로 ‘ y 를 소거하여 4차방정식으로 풀다 부호 조건을 누락한 경우 -2점’ 그리고 ‘제1사분면 부호 조건($x_n > 0$) 미확인 시 -2점’ 때문이에요. 연습장에서 답을 빨리 구한 뒤 본 답안지에 옮겨 적을 때 중간 징검다리 식을 생략해 버리면, 채점 위원 입장에서는 학생이 어떻게 그 식을 얻었는지 알 수 없어 2단계: 제1사분면 조건과 좌표 확정(5점)과 3단계: 유리화를 통한 $n^2 y_n$ 및 nx_n 극한 계산(6점) 점수를 주기가 어렵답니다.

2) 감점 없이 만점 받는 3단 답안 작성 공식: 이 유형을 만나면 답안지를 세 문단으로 나누어 적어보세요! 첫째 문단에는 ① 포물선 식을 $x^2 = y + \frac{1}{n^2}$ 으로 변형하여 원의 방정식에 대입해 y 에 관한 이차방정식 도출 내용을 또박또박 적어 출발점을 보여주고, 둘째 문단에는 앞에서 공부한 정리를 인용해 ② 근의 공식과 $x_n > 0$ 조건을 이용하여 y_n 과 x_n 을 n 의 무리식으로 정확히 표현 과정을 등호·부등호 근거와 함께

적어주세요. 마지막 문단에서 ③ $n^2 y_n$ 의 분자를 유리화하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 y_n = 0$ 및 $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = 1$ 도출 및 직선 $A_n Q_n$ 의 기울기 $\frac{y_n + 1/n^2}{x_n} = x_n \rightarrow 0$ 임을 도출 순서로 마무리하면 빈틈없는 만점 답안이 완성돼요!

3) 답안지 제출 전 5초 자기점검 질문: “내 답안지에 ‘포물선 식을 $x^2 = y + \frac{1}{n^2}$ 으로 변형하여 원의 방정식에 대입해 y 에 관한 이차방정식 도출’ 조건과 제시문 정리 이름이 빠짐없이 적혀 있나요?” — 이 질문에 ‘네!’라고 답할 수 있다면 안심하고 다음 문제로 넘어가셔도 좋아요.

[제1장. 수열의 극한 · 유형 05] 유형 05. 지수·다항·로그 수열의 증가 속도 커지는 속도 비교와 최고차항 묶어내기

기출 출처 대학: 2023학년도 서강대 자연계열 기출 / 2024학년도 한양대 기출 / 2022학년도 부산대 기출

Step 1. 유형 05을 풀기 위한 필수 개념 & 정리 설명

이 유형의 기출문제를 풀기 전에 반드시 알아두어야 할 필수 정리와 수식 변형 원리예요. 답안지에 어떤 문구로 인용해야 만점을 받는지도 함께 확인해 보세요.

필수 정리 1-5A. 로그·다항·지수·팩토리얼 수열의 커지는 속도 비교

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (p > 0, a > 1)$$

n 이 한없이 커질 때 수열이 커지는 속도는 로그($\ln n$) $\ll$ 다항식(n^p) $\ll$ 지수식(a^n) $\ll$ 팩토리얼($n!$) 순서예요. 하지만 논술 답안지에 ‘지수함수가 다항함수보다 빨리 커지므로 극한은 0이다’라고만 적으면 감점될 수 있으니, 아래의 이웃한 항의 비율 비교법을 함께 써주시는 것이 좋아요.

필수 정리 1-5B. 이웃한 항의 비율($\frac{a_{n+1}}{a_n}$)을 이용한 0 수렴 증명법

$$a_n > 0 \text{이고 } n \geq N \text{일 때 } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1 \Rightarrow 0 < a_n \leq a_N \cdot r^{n-N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$a_n = \frac{n^k}{2^n}$ 처럼 다항식과 지수식이 섞인 수열이 0으로 수렴함을 엄밀하게 보일 때 쓰는 최고의 방법이에요. 이웃한 항의 비율 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 을 계산하여 n 이 충분히 클 때 1보다 작은 공비 r (예: $\frac{3}{4}$)보다 작거나 같음을 보이면, 등비수열과의 크기 비교를 통해 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 임을 빈틈없이 증명할 수 있습니다.

Step 2. 유형 05 실제 기출문제 해부 (문제 · 채점기준 · 사고과정 · 모범답안)

앞서 배운 정리들이 실제 대학 시험지에서는 어떤 모습으로 출제되는지 볼까요? 큼직하게 확대한 기출 제시문과 그래프를 먼저 읽고, 채점 기준표를 따라 생각의 징검다리를 건너가 보세요.

[실제 기출문제 발췌] 2023학년도 서강대학교 수시 논술시험 (자연계열) 기출 발췌

<제시문> $a > 1, p > 0$ 일 때, 이항정리 또는 평균값 정리에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0 \text{이 성립한다.}$$

[문제 1-5] 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{3^n + n^4}{3^{n+1} - 2^n + n^2}$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(\frac{1}{3} - a_n \right)$ 의 값을 논리적으로 구하시오. [20점]

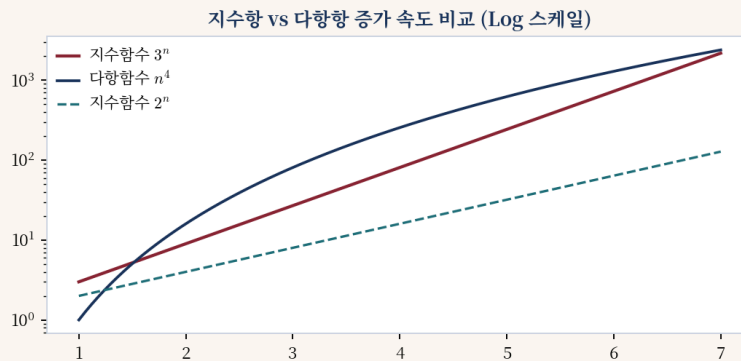


그림 1-5. [실제 기출 발췌] 2023학년도 서강대 커지는 속도 비교 문제 스니펫(좌) 및 로그 스케일 증가를 비교(우)

<제시문> 자연수 n 과 양수 $h > 0$ 에 대하여 이항정리에 의해 $(1+h)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k h^k$ 가 성립한다.

[문제 1-5] (1) 제시문을 이용하여 임의의 자연수 p 와 $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$ 임을 증명하시오. (2) 수열 $a_n = \frac{3^n + n^4}{3^{n+1} - 2^n + n^2}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n \left(\frac{1}{3} - a_n \right)$ 의 값을 각각 구하시오. [20점]

[대학 공식 채점기준 및 단계별 배점표]

채점 단계 및 배점 (유형 05)	답안지에 꼭 들어가야 할 핵심 수식 및 서술 내용	자주 깎이는 감점 요인 및 주의점
1단계: 이항정리 작은 쪽 경계식 항 추출 (6점)	$a = 1 + h$ ($h > 0$)로 두고 $n > p + 1$ 일 때 $a^n = (1+h)^n > {}_nC_{p+1} h^{p+1}$ 부등식 도출	차수를 p 가 아닌 $p+1$ 항으로 잡아야 $\frac{1}{n}$ 이 남는다는 점을 놓친 경우 -3점
2단계: 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)를 통한 $\frac{n^p}{a^n} \rightarrow 0$ 완성 (4점)	$0 < \frac{n^p}{a^n} < \frac{(p+1)!}{h^{p+1}} \frac{n^p}{n(n-1) \cdots (n-p)}$ 로부터 극한값 0 증명	양수 조건 $0 < \frac{n^p}{a^n}$ 누락 시 -1점
3단계: 주항(3^n) 분리를 통한 1차 극한 도출 (4점)	분모·분자를 3^n 으로 나누고 문항 (1)의 결과를 적용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ 도출	문항 (1)의 결과 인용 없이 직관으로 0 처리 시 -1점
4단계: 2차 오차항($\frac{1}{3} - a_n$) 통분 및 극한 계산 (6점)	$\frac{1}{3} - a_n$ 을 통분하여 주항 3^n 을 소거한 뒤 차순위 주항인 2^n 을 기준으로 극한 $-\frac{1}{9}$ 도출	부호 실수로 $+\frac{1}{9}$ 이라 적은 경우 -2점

[채점기준에 도달하는 실전 사고과정]

[왜 이렇게 생각할까요?] 소문항 (1)에서 $\frac{n^p}{a^n} \rightarrow 0$ 을 증명할 때 왜 이항정리에서 $k = p$ 항이 아니라 $k = p + 1$ 항을 뽑아내야 할까요? 분자가 n^p (n 에 대한 p 차식)이므로, 분모에서 n 에 대한 $(p+1)$ 차식인 ${}_nC_{p+1} = \frac{n(n-1) \cdots (n-p)}{(p+1)!}$ 을 뽑아내야만 약분 후 분모에 n 이 하나 남아

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$ 으로 수렴하기 때문이에요!

[채점기준으로 가는 다리] 이어지는 소문항 (2)의 두 번째 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{3} - a_n\right)$ 은 논술이 가장 사랑하는 ‘주항 제거 후 차순위 지배항(Sub-leading term) 추출’ 유형이에요. a_n 의 1차 극한값인 $\frac{1}{3}$ 에서 a_n 을 빼서 통분하면 가장 큰 3^{n+1} 항이 정확히 지워지고, 그다음으로 큰 -2^n 항이 새로운 주인공으로 등장해요.

[실전 모범답안 — 실제 시험지에는 이렇게 적어보세요]

[모범답안]

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$ 의 증명: $a > 1$ 이므로 $h = a - 1 > 0$ 이라 두면 $a = 1 + h$ 이다. $n > p + 1$ 인 자연수 n 에 대하여 제시문의 이항정리를 전개하면 모든 항이 양수이므로 $(p + 1)$ 번째 항만 남겼을 때 다음 부등식이 성립한다.

$$a^n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k h^k > {}_nC_{p+1} h^{p+1} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p)}{(p+1)!} h^{p+1}$$

양변이 모두 양수이므로 역수를 취하고 n^p 을 곱하면

$$0 < \frac{n^p}{a^n} < \frac{(p+1)!}{h^{p+1}} \cdot \frac{n^p}{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p)} = \frac{(p+1)!}{h^{p+1}} \cdot \frac{1}{n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p}{n}\right)}$$

이다. 여기서 $n \rightarrow \infty$ 일 때 우변의 극한은 0이므로, 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$ 이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$ 및 오차항의 극한 계산: a_n 의 분모와 분자를 3^n 으로 나누면

$$a_n = \frac{1 + \frac{n^4}{3^n}}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n^2}{3^n}}$$

이고, 문항 (1)에 의해 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{3^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$ 이며 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ 이다. 다음으로 $\frac{1}{3} - a_n$ 을 통분하여 정리하면

$$\frac{1}{3} - a_n = \frac{(3^{n+1} - 2^n + n^2) - 3(3^n + n^4)}{3(3^{n+1} - 2^n + n^2)} = \frac{-2^n + n^2 - 3n^4}{3(3^{n+1} - 2^n + n^2)}$$

이다. 양변에 $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 을 곱한 뒤 분모와 분자를 3^n 으로 나누면

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{3} - a_n\right) = \frac{-1 + \frac{n^2}{2^n} - \frac{3n^4}{2^n}}{3 \left(3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n^2}{3^n}\right)}$$

이고, 문항 (1)에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{2^n} = 0$ 이므로 구하는 극한값은 $\frac{-1}{3 \times 3} = -\frac{1}{9}$ 이다.

Step 3. 유형 05 실전 오답 클리닉 & 만점 점검 가이드

1) 친구들이 가장 많이 점수를 잃는 실수: 이 유형(2023학년도 서강대 자연계열 기출 / 2024학년도 한양대 기출 / 2022학년도 부산대 기출)을 풀 때 답은 맞았는데도 아깝게 3 ~ 5점씩 감점당하는 가장 흔한 이유는 바로 ‘차수를 p 가 아닌 $p + 1$ 항으로 잡아야 $\frac{1}{n}$ 이 남는다는 점을 놓친 경우 -3점’ 그리고 ‘양수 조건 $0 < \frac{n^p}{a^n}$ 누락 시 -1점’ 때문이에요. 연습장에서 답을 빨리 구한 뒤 본 답안지에 옮겨 적을 때 중간 점검다리 식을 생략해 버리면, 채점 위원 입장에서는 학생이 어떻게 그 식을 얻었는지 알 수 없어 2단계: 샌드위치 정리(극한의 대소 관계)를 통한 $\frac{n^p}{a^n} \rightarrow 0$ 완성 (4점)과 3단계: 주항(3^n) 분리를 통한 1차 극한 도출 (4점) 점수를 주기가 어렵답니다.

2) 감점 없이 만점 받는 3단 답안 작성 공식: 이 유형을 만나면 답안지를 세 문단으로 나누어 적어보세요! 첫째 문단에는 ① $a = 1 + h$ ($h > 0$)로 두고 $n > p + 1$ 일 때 $a^n = (1 + h)^n > {}_nC_{p+1} h^{p+1}$ 부등식 도출 내용을 토박토박 적어 출발점을 보여주고, 둘째 문단에는 앞에서 공부한 정리를 인용해 ② $0 < \frac{n^p}{a^n} < \frac{(p+1)!}{h^{p+1}} \cdot \frac{n^p}{n(n-1) \cdots (n-p)}$ 로부터 극한값 0 증명 과정을 등호·부등호 근거와 함께 적어주세요. 마지막 문단에서 ③ 분모·분자를 3^n 으로 나누고 문항 (1)의 결과를 적용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ 도출 및 $\frac{1}{3} - a_n$ 을 통분하여 주항 3^n 을 소거한 뒤 차순위 주항인 2^n 을 기준으로 극한 $-\frac{1}{9}$ 도출 순서로 마무리하면 빈틈없는 만점 답안이 완성돼요!

3) 답안지 제출 전 5초 자기점검 질문: “내 답안지에 ‘ $a = 1 + h$ ($h > 0$)로 두고 $n > p + 1$ 일 때 $a^n = (1 + h)^n > {}_nC_{p+1} h^{p+1}$ 부등식 도출’ 조건과 제시문 정리 이름이 빠짐없이 적혀 있나요?” — 이 질문에 ‘네!’라고 답할 수 있다면 안심하고 다음 문제로 넘어가셔도 좋아요.

첫 단원을 읽었다면, 이제 다음 질문으로.

수열의 극한 다음에는, 무한히 더한 값이 기다립니다.

NEXT / 제2장. 무한급수

부분합의 극한에서 정적분과 급수의 연결까지.

정식 교재에서 이어지는 8개 단원

02 무한급수

03 함수의 극한과 연속

04 미분

05 적분

06 수열의 규칙성

07 확률과 통계

08 기하

09 벡터

9개 단원 · 45개 대표 유형 · 실전 스킬 70선

핵심 정리부터 문제 해부, 사고과정, 답안과 오답 클리닉까지.

맛보기는 여기까지입니다.

나머지 단원과 실전 스킬은 전체 교재에서 만나보세요.