경희대학교 자연계 수학

실제 문제와 대응 해설 맛보기

발췌 문항

CORE 02 · 물을 넣고 빼는 점화식의 범위와 증가

핵심유형 문제편 PDF5쪽과 해설편 PDF5쪽을 그대로 발췌했습니다. 판매 통합526쪽에서 각각10쪽과30쪽에 해당합니다.

맛보기 구성

표지1쪽 + 문제1쪽 + 상세해설·모범답안1쪽 = 총3쪽입니다. 실제 교재의 문항 조건·풀이·배점·출처를 유지했으며 다음 문항이나 이어지는 해설을 생략한 발췌가 아닙니다.

전체 상품과의 구분

판매본은 교재12권521쪽과 안내·앞부분5쪽을 합친526쪽입니다. 이 맛보기는 일부만 보여 줍니다. 공통8권331쪽은 의약계 수학 상품과 동일하므로 이 문항도 공통 자료에 포함됩니다.

최신 교정판 기준

근거부터 결론까지 서술한 최신 CORE02 모범답안을 포함합니다. WB18의 별도 정답 정정 등 다른 문항의 교정은 전체 상품 안내와 정정내역에서 확인할 수 있습니다.

수열·귀납법

CORE 02 물을 넣고 빼는 점화식의 범위와 증가

2015학년도 경희대학교 수시 자연계 B · 논제 I-1,I-2

문제

첫 단계에서 물의 양은 $V_1 = 1$이다. 이후 매 단계에서 현재 물의 양 V_n의 절반을 제곱한 양을 덜어내고 1을 더 넣는다. 따라서

$$V_{n+1} = V_n - \frac{V_n^2}{4} + 1.$$

(1) 모든 n에 대해 $0 < V_n < 2$임을 수학적 귀납법으로 보이시오.
(2) 수열 $\{V_n\}$이 증가함을 보이시오.

답안 작성

수열·귀납법

CORE 02 물을 넣고 빼는 점화식의 범위와 증가

2015학년도 경희대학교 수시 자연계 B · 논제 I-1,I-2

문제

첫 단계에서 물의 양은 $V_1 = 1$이다. 이후 매 단계에서 현재 물의 양 V_n의 절반을 제곱한 양을 덜어내고 1을 더 넣는다. 따라서

$$V_{n+1} = V_n - \frac{V_n^2}{4} + 1.$$

(1) 모든 n에 대해 $0 < V_n < 2$임을 수학적 귀납법으로 보이시오.
(2) 수열 $\{V_n\}$이 증가함을 보이시오.

핵심 발상

점화식을 2에서 떨어진 양의 제곱으로 고쳐 쓴다.

강의식 단계 풀이

점화식은

$$V_{n+1} = 2 - \frac{(2-V_n)^2}{4}$$

이다. $V_1 = 1$이고 $0 < V_n < 2$이면 $0 < \frac{(2-V_n)^2}{4} < 1$이므로 $1 < V_{n+1} < 2$. 따라서 귀납적으로 $0 < V_n < 2$. 또

$$V_{n+1} - V_n = 1 - \frac{V_n^2}{4} > 0$$

이므로 엄밀히 증가한다.

실전 숏컷

증가성을 보이기 전에 반드시 $V_n < 2$를 먼저 확보한다.

수리논술 모범답안 · 최종 결과

(1) $V_1 = 1$이므로 $0 < V_1 < 2$이다. 어떤 자연수 k에 대하여 $0 < V_k < 2$라 가정하면 $0 < 2 - V_k < 2$이므로

$$0 < \frac{(2-V_k)^2}{4} < 1, \qquad V_{k+1} = 2 - \frac{(2-V_k)^2}{4}.$$

따라서 $1 < V_{k+1} < 2$이므로 $0 < V_{k+1} < 2$이다. 수학적 귀납법에 따라 모든 자연수 n에 대하여 $0 < V_n < 2$이다.
(2) (1)에서 $0 < V_n^2 < 4$이므로 점화식에 의하여

$$V_{n+1} - V_n = 1 - \frac{V_n^2}{4} > 0.$$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $V_{n+1} > V_n$이므로 수열 $\{V_n\}$은 증가한다.

채점기준표

- **3점** 핵심 조건을 정확히 식으로 번역한다.
- **4점** 핵심 계산·증명 단계를 논리적으로 완성한다.
- **3점** 범위·부호·끝점·최종 결론을 정확히 확인한다.

Blue Math 교재 연계

직접/주요 연계: Lecture 02