BlueMath | 최민구

이화여자대학교 자연 Ⅰ · Ⅱ 공통

실제 문제 + 상세해설 맛보기

이화여대 자연 Ⅰ · Ⅱ 공통 · CORE01 함수 비교

문제 및 제시문: 원본 PDF 4-4쪽

Ewha_Core18_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 5-6쪽

Ewha_Core18_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 교정본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

CORE01 삼차함수와 사인함수의 비교

출처: 2026학년도 이화여대 수시 자연 I 문제 1

복원 · 수정 기록: 함수 종류의 오기를 삼차함수로 바로잡았습니다.

$g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$이다. 삼차함수 f는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족하고, $f(1) = g(1),\ f(2) = g(2)$이다.

(1) $f(x)$를 구하시오.

(2) $1 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 $\sin x \ge \frac{2x}{\pi}$임을 보이시오.

(3) $f'(c) = g'(c)$를 만족하는 $c \in (0, 1)$이 유일함을 보이시오.

(4) $0 \le x \le 1$에서 $f(x) \le g(x)$임을 보이시오.

답안 작성

CORE01 삼차함수와 사인함수의 비교

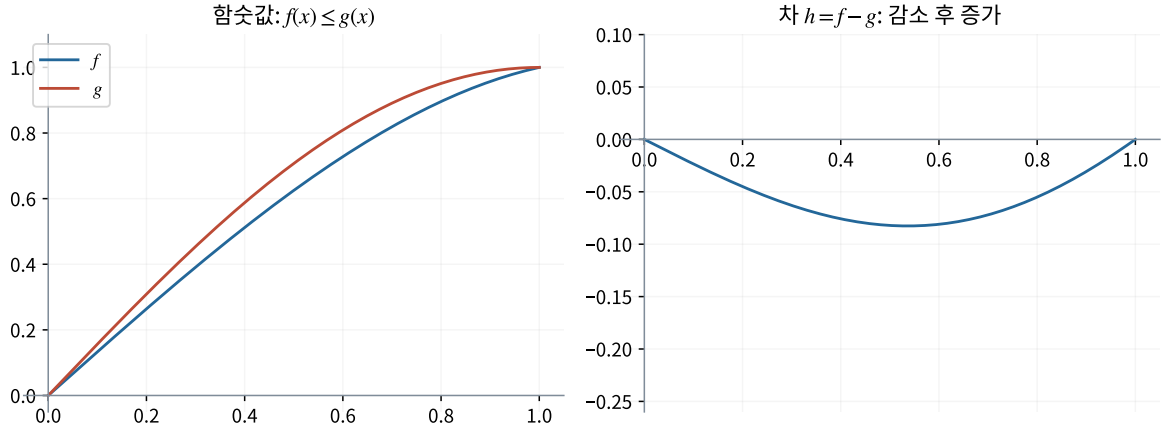
출처: 2026학년도 이화여대 수시 자연 I 문제 1

복원 · 수정 기록: 함수 종류의 오기를 삼차함수로 바로잡았습니다.

1. 홀함수 조건으로 계수를 줄입니다

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면 $f(-x)=-f(x)$에서 $b=d=0$입니다. $g(1)=1,\ g(2)=0$이므로 $a+c=1,\ 8a+2c=0$입니다. 따라서

$$f(x)=\frac{-x^3+4x}{3}.$$



2. 사인함수 부등식을 더 넓은 구간에서 증명합니다

뒤 소문항에도 쓰기 위해 $0\le z\le\frac{\pi}{2}$ 전체에서 증명합니다. $L(z)=\sin z-\frac{2z}{\pi}$라 두면

$$L'(z)=\cos z-\frac{2}{\pi},\qquad L''(z)=-\sin z<0\quad\left(0<z<\frac{\pi}{2}\right).$$

L'는 엄격히 감소하며 $L'(0)>0,\ L'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$이므로 $L'(z)=0$인 점이 하나입니다. L은 그 점까지 증가하고 그 뒤 감소합니다. 양 끝값 $L(0)=L\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 구간 안에서는 $L(z)\ge 0$입니다. 요구 구간 $1\le z\le\frac{\pi}{2}$는 이 구간의 일부이므로 같은 결론이 성립합니다.

3. 도함수 차이가 증가함을 보입니다

$h = f - g$라 두면 $f' = g'$는 $h' = 0$과 같습니다.

$$h'(x) = \frac{4 - 3x^2}{3} - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \qquad h''(x) = -2x + \frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

$0 < x < 1$에서 2단계의 부등식에 $z = \frac{\pi x}{2}$를 넣으면 $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq x$입니다. 따라서

$$h''(x) \geq \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) x > 0.$$

즉 h'는 엄격히 증가합니다. 또한 $h'(0) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$, $h'(1) = \frac{1}{3} > 0$입니다. 연속함수의 중간값 정리로 $h'(c) = 0$인 c가 존재하며, 엄격히 증가하므로 유일합니다.

4. 끝값과 증감 방향을 함께 씁니다

$h(0) = h(1) = 0$이고, h'의 부호는 c 왼쪽에서 음수, 오른쪽에서 양수입니다.

x	0		c		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	최솟값	$\nearrow$	0

그러므로 $0 \leq x \leq 1$에서 $h(x) \leq 0$, 즉 $f(x) \leq g(x)$입니다.

서술 점검 2단계에서 구간을 넓혀 증명했기 때문에 3단계의 $0 < \frac{\pi x}{2} < \frac{\pi}{2}$에도 적용할 수 있습니다. 그래프만 보고 대소 관계나 교점의 유일성을 판단하지 않습니다.