중앙대학교 일반형 이공계열

실제 문제와 대응 해설 맛보기

발췌 문항

미적분 핵심유형03 | 연속함수의 두 후보를 구별하고 적분하기

문제와 해설의 위치

개별 문제편 PDF4쪽과 해설편 PDF6-7쪽을 그대로 발췌했습니다. 통합671쪽에서 각각15쪽과30-31쪽에 해당합니다.

맛보기 구성

표지1쪽 + 문제1쪽 + 상세해설·교재연계·최종답2쪽, 총4쪽입니다. 해설의 결론과 이어지는 최종답·연계 설명을 함께 담았습니다. 조건·계산·출처는 최신 교재와 같습니다.

전체 상품과의 구분

전체 상품은 교재32권660쪽과 안내·목차·앞부분11쪽을 합친671쪽입니다. 핵심·워크북·기본과 업그레이드12회를 포함하며, 이 맛보기는 그중 한 문항입니다. 공통 핵심·워크북은 의약학 일반형 상품과 중복됩니다.

핵심유형 03 **2022학년도 자연 I 기출**

$0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음을 만족한다.

$$\{f(x)\}^2 \cos^2 x - 2f(x)(1+\sin x)\cos x + (1+\sin x)^2 \cos^2 x = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

이때

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f'(x)\cos x - f(x)\sin x\} e^{\sin x}\, dx$$

의 값을 구하시오.

풀이 공간

핵심유형 03

2022학년도 자연 I 기출

문제

$0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음을 만족한다.

$$\{f(x)\}^2 \cos^2 x - 2f(x)(1+\sin x)\cos x + (1+\sin x)^2 \cos^2 x = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

이때

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f'(x)\cos x - f(x)\sin x\} e^{\sin x}\, dx$$

의 값을 구하시오.

핵심 발상

$u = f(x)\cos x$로 두면 문제의 식과 적분식을 함께 간단히 나타낼 수 있다.

1. 이차방정식의 두 해 중 하나를 정한다

$$u^2 - 2(1+\sin x)u + (1+\sin x)^2 \cos^2 x = 0$$

을 풀면 $u = (1+\sin x)(1 \pm \sin x)$이다. 따라서

$$f(x)\cos x = \cos^2 x \quad \text{또는} \quad (1+\sin x)^2.$$

$x = \dfrac{\pi}{6}$에서 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{9}{4}$이므로 두 번째 식이다. $0 < x \le \dfrac{\pi}{3}$에서 두 식의 차는 $2\sin x(1+\sin x) > 0$이다. 연속인 $f(x)\cos x$가 서로 떨어진 두 식 사이를 바꿔 선택할 수는 없으므로 이 구간 전체에서 두 번째 식이 성립한다. $x = 0$에서는 두 식이 모두 1이다. 결국

$$f(x)\cos x = (1+\sin x)^2 \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right).$$

2. 미분한 식을 적분한다

$\cos x > 0$이므로 위 식에서 f는 미분 가능한 식으로 나타난다. 양변을 미분하여

$$f'(x)\cos x - f(x)\sin x = 2(1+\sin x)\cos x.$$

$t = \sin x$로 치환하면

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(1+\sin x)\cos x\, e^{\sin x}\, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1+t)e^t\, dt = 2[te^t]_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

답안 작성 포인트

한 점에서 식을 골랐다는 것만 쓰지 말고, 두 후보 식이 중간에서 만나지 않는다는 점과 연속성을 함께 설명한다.

Blue Math 교재 연계

- **개념총정리 Lecture 13, 문제 13-1**: 적분·미분에서 "덩어리 전체를 하나의 함수로 읽는" 기본 원리와 연결된다.
- **Lecture 13, 문제 13-9**: $e^{\sin x}$ 또는 지수·삼각함수의 합성형 적분에서 안쪽 함수의 미분을 찾는 연습과 유사하다.
- **Lecture 10, 문제 10-5**: 삼각함수의 부호와 범위를 이용해 해의 가지를 결정하는 감각을 보완한다.

최종 답

$$\sqrt{e}$$