BlueMath | 최민구

숭실대학교 자연계

실제 문제 + 상세해설 맛보기

숭실대 자연 · CORE 01 원과 직선의 교점

문제 및 제시문: 개별 교재 PDF 4쪽

2027_BlueMath_Soongsil_CORE12_Questions_Reviewed.pdf

상세해설: 개별 교재 PDF 4-6쪽

2027_BlueMath_Soongsil_CORE12_Detailed_Solutions_Reviewed.pdf

판매 통합본에 포함된 교정본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

CORE 01 원과 직선의 교점에서 길이·넓이의 극한

2026학년도 기출 · 문제 1 권장 총점 25점

출처: 첨부 숭실대 합본 4, 6쪽

편집·검토 안내

첨부 기출 해설의 마지막 비는 재조판 과정에서 $\frac{2}{1+m}$로 명확히 정리했습니다. 최종 극한값 1은 원자료와 같습니다.

문제

직선 $\ell : y = mx + m\ (0 < m < 1)$과 원 $C : x^2 + y^2 = 1$의 교점 중 x좌표가 더 큰 점을 P, 직선 ℓ과 y축의 교점을 Q, 좌표가 $(0, 1)$인 점을 R이라 하자. 점 P와 직선 $y = 1$ 사이의 거리를 $f(m)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(m)$이라 할 때,

$$\lim_{m \to 1-} \frac{f(m)}{g(m)}$$

의 값을 구하시오.

답안 작성

CORE 01 원과 직선의 교점에서 길이·넓이의 극한

2026학년도 기출 · 문제 1 권장 총점 25점

출처: 첨부 숭실대 합본 4, 6쪽

편집·검토 안내

첨부 기출 해설의 마지막 비는 재조판 과정에서 $\frac{2}{1+m}$로 명확히 정리했습니다. 최종 극한값 1은 원자료와 같습니다.

문제

직선 $\ell : y = mx + m\ (0 < m < 1)$과 원 $C : x^2 + y^2 = 1$의 교점 중 x좌표가 더 큰 점을 P, 직선 ℓ과 y축의 교점을 Q, 좌표가 $(0, 1)$인 점을 R이라 하자. 점 P와 직선 $y = 1$ 사이의 거리를 $f(m)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(m)$이라 할 때,

$$\lim_{m \to 1-} \frac{f(m)}{g(m)}$$

의 값을 구하시오.

정답

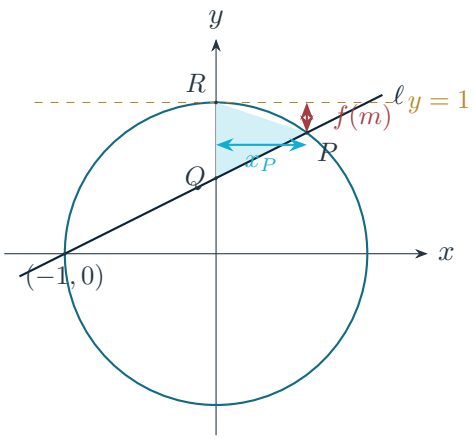
1

풀이 전에 확인할 개념

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근이 α, β이면 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ 이다.

문제 읽기 · 같은 그림에서 서로 다른 두 높이를 구분합니다

$f(m)$는 점 P에서 수평선 $y = 1$까지의 **세로 거리**입니다. 반면 $g(m)$를 구할 때 밑변을 QR로 잡으면 QR은 수직선분이므로 높이는 점 P에서 y축까지의 **가로 거리**입니다. 두 높이를 혼동하지 않는 것이 첫 관문입니다.



$m = \frac{1}{2}$ 인 예시. $f(m)$는 세로 거리이고, 밑변 QR에 대응하는 삼각형의 높이는 가로 거리 x_P입니다.

STEP 1 · 움직이지 않는 교점부터 찾습니다

직선은 $y = m(x + 1)$이므로 m이 변해도 항상 $(-1, 0)$을 지납니다. 이 점은 원 위에도 있습니다. 따라서 교점을 구하는 이차방정식의 한 근은 이미 -1입니다.

$$x^2 + m^2(x + 1)^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (1 + m^2)x^2 + 2m^2x + m^2 - 1 = 0.$$

다른 근을 t라 하면 근과 계수의 관계에서

$$(-1)t = \frac{m^2-1}{1+m^2}, \qquad t = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

$0<m<1$이므로 $t>0>-1$입니다. 따라서 P는 바로 이 다른 교점입니다. 근을 구했으면 **어느 근이 문제의 P인지**까지 판정해야 합니다.

$$P=\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right), \quad Q=(0,m), \quad R=(0,1).$$

STEP 2 · $f(m)$는 위쪽 직선에서 점의 높이를 뺍니다

$1+m^2-2m=(1-m)^2>0$이므로 P의 y좌표는 1보다 작습니다. 따라서 절댓값 없이

$$f(m)=1-\frac{2m}{1+m^2}=\frac{(1-m)^2}{1+m^2}$$

로 쓸 수 있습니다.

STEP 3 · 넓이에서는 QR을 밑변으로 잡습니다

$QR=1-m$이고, P에서 y축까지의 거리는 t입니다. 따라서

$$g(m)=\frac{1}{2}(1-m)\frac{1-m^2}{1+m^2}=\frac{(1-m)^2(1+m)}{2(1+m^2)}.$$

이렇게 두 식에 공통으로 나타나는 $(1-m)^2$를 드러내 놓으면 $\frac{0}{0}$ 의 원인이 보입니다.

STEP 4 · 극한을 취하기 전에 약분합니다

$0<m<1$에서는 $(1-m)^2\neq 0$이므로

$$\frac{f(m)}{g(m)}=\frac{(1-m)^2}{1+m^2}\cdot\frac{2(1+m^2)}{(1-m)^2(1+m)}=\frac{2}{1+m}.$$

따라서

$$\boxed{\lim_{m\to 1-}\frac{f(m)}{g(m)}=1}.$$

$m=1$에서는 삼각형이 무너져 원래 비가 정의되지 않지만, 극한은 $m<1$에서의 비가 무엇에 가까워지는지를 묻는 것입니다.

개별 질문에 답하는 해설

질문. P의 좌표를 꼭 근의 공식으로 구해야 하나요?
아닙니다. 고정 교점 $(-1,0)$을 먼저 찾으면 다른 근은 근과 계수의 관계 한 줄로 구해집니다. 문제의 제시문이 이 공식을 준 이유도 여기에 있습니다.

질문. $f(m)$를 삼각형의 높이로 쓰면 왜 안 되나요?
밑변 QR은 세로 방향입니다. 높이는 그 밑변에 수직이어야 하므로 가로 거리 x_P입니다. $f(m)$는 수평선 $y=1$에 대한 높이로, 다른 거리입니다.

실전 숏컷

고정 교점 $(-1,0)$에서 $x_P=\frac{1-m^2}{1+m^2}$를 얻습니다. 이어 $1-y_P=\frac{(1-m)^2}{1+m^2}$와 $QR=1-m$을 이용해 식을 약분하면 됩니다.

수리논술 모범답안

다른 교점의 x좌표를 t라 하면 근의 곱에서 $t=\frac{1-m^2}{1+m^2}$이다. 따라서 $P=\left(t,\frac{2m}{1+m^2}\right)$이고 $Q=(0,m)$, $R=(0,1)$이다. $0<m<1$이므로

$$f(m)=\frac{(1-m)^2}{1+m^2},\qquad g(m)=\frac{1}{2}(1-m)\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

그러므로 $\frac{f(m)}{g(m)}=\frac{2}{1+m}$이고 구하는 극한값은 1이다.