중앙대학교 일반형 의약학

실제 문제와 대응 해설 맛보기

발췌 문항

기하 핵심유형01 | 벡터의 합과 두 원으로 둘러싸인 넓이

문제와 해설의 위치

개별 문제편 PDF2쪽과 해설편 PDF3-4쪽을 그대로 발췌했습니다. 통합947쪽에서 각각15쪽과29-30쪽에 해당합니다.

맛보기 구성

표지1쪽 + 문제1쪽 + 두 소문항의 상세해설·교재연계·최종답2쪽, 총4쪽입니다. 접선에 수직인 반지름, 두 중심의 가능한 위치, 접촉조건과 부채꼴의 넓이를 연결하는 실제 설명을 확인할 수 있습니다.

전체 상품과의 구분

전체 상품은 교재40권934쪽과 안내·목차·앞부분13쪽을 합친947쪽입니다. 세 영역의 핵심·워크북, 주제별·기출보충, 기본과 업그레이드12회를 포함합니다. 이 맛보기는 그중 한 핵심유형입니다. 미적분·확률과 통계 공통8권351쪽은 일반형 이공계열 상품과 중복됩니다.

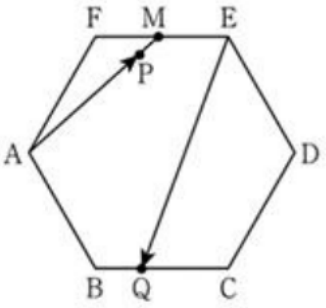
핵심유형 01

2026학년도 모의논술

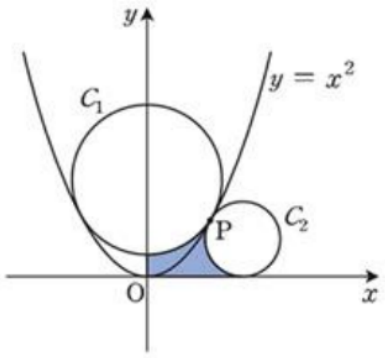
(1) 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 $ABCDEF$에서 변 EF의 중점을 M이라 하자. 선분 AM 위를 움직이는 점 P와 변 BC 위를 움직이는 점 Q에 대하여

$$\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{EQ}\right|$$

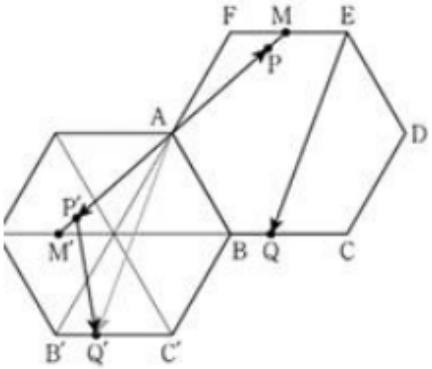
의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.



(2) 그림과 같이 중심이 y축에 놓인 원 C_1과 x축에 접하는 원 C_2가 점 $P(t,t^2)$에서 포물선 $y=x^2$에 접한다. C_1의 반지름이 C_2의 반지름의 두 배일 때, 두 원 C_1, C_2와 x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. 단, $t>0$이다.



풀이 공간



(1) 벡터의 합을 두 점 사이의 거리로 나타낸다

P, M을 A에 대하여 대칭이동한 점을 P', M'이라 하고, $\overrightarrow{AQ'} = \overrightarrow{EQ}$가 되도록 Q'을 잡는다. 그러면

$$\overrightarrow{AP'} = -\overrightarrow{AP}, \qquad \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{AQ'} - \overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{EQ}.$$

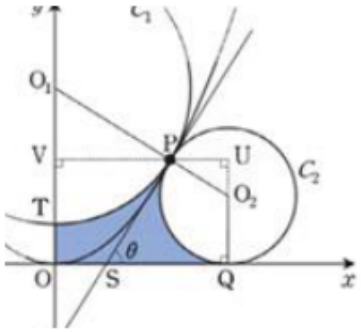
그림처럼 $B' = (0,0),\ C' = (2,0),\ A = (2,2\sqrt{3}),\ M' = (0,\sqrt{3})$로 잡으면

$$P' = (2s, \sqrt{3}(1+s)), \quad Q' = (2u, 0) \quad (0 \le s, u \le 1),$$

$$P'Q'^2 = 4(s-u)^2 + 3(1+s)^2.$$

두 항은 각각 0 이상, 3 이상이므로 $P'Q'^2 \ge 3$이며 $s = u = 0$에서 등호가 성립한다. 또한 $|s-u| \le 1, 1+s \le 2$에서 $P'Q'^2 \le 4 + 12 = 16$이고 $s = 1, u = 0$에서 등호가 성립한다. 따라서 구하는 합은 $\boxed{4+\sqrt{3}}$이다.

(2) 포물선의 접선에 수직인 반지름과 두 원



점 $P(t, t^2)$에서 접선의 기울기는 $2t$이다. 원의 중심은 이 접선에 수직이고 P를 지나는 직선 위에 있으므로, 이 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2t}$이다. 중심 O_1은 y축 위에 있으므로

$$O_1 = \left(0, t^2 + \frac{1}{2}\right), \qquad r_1^2 = t^2 + \frac{1}{4}.$$

$r_2 = \dfrac{r_1}{2}$이므로 $\overrightarrow{PO_2}$는 $\overrightarrow{PO_1}$의 절반 또는 그 반대이다. 다음 쪽에서 x축에 접한다는 조건으로 경우를 정하고 넓이까지 계산한다.

(2) 두 번째 중심과 접점을 정확히 결정한다

$\overrightarrow{PO_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PO_1}$이면 $O_2=\left(\frac{t}{2},t^2+\frac{1}{4}\right)$이다. x축과의 접촉 조건은

$$r_2=t^2+\frac{1}{4},\qquad 4r_2^2=r_1^2=t^2+\frac{1}{4}.$$

이를 풀면 $t^2=0$ 또는 $t^2=-\frac{1}{4}$이므로 $t>0$에 맞지 않는다. 따라서

$$O_2=\left(\frac{3t}{2},t^2-\frac{1}{4}\right).$$

이 경우에도 $r_2=\left|t^2-\frac{1}{4}\right|$이고, $r_1=2r_2$에서

$$t^2+\frac{1}{4}=4\left(t^2-\frac{1}{4}\right)^2\quad\Longrightarrow\quad t^2(4t^2-3)=0.$$

$t>0$이므로 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서

$$P=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right),\quad O_1=\left(0,\frac{5}{4}\right),\quad O_2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right),\quad r_1=1,\quad r_2=\frac{1}{2}.$$

사다리꼴에서 두 부채꼴의 넓이를 뺀다

O를 원점, Q를 C_2와 x축의 접점이라 하면 $Q=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},0\right)$이다. OO_1과 QO_2가 평행하므로 사다리꼴 OO_1O_2Q의 넓이는

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right)\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{21\sqrt{3}}{32}.$$

O_1P가 아래쪽 y축 방향과 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}$이다. 한편 O_2P와 O_2Q가 이루는 작은 각은 $\frac{2\pi}{3}$이다. 따라서 사다리꼴 안에서 두 원이 차지하는 부채꼴의 넓이는 각각

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{12}.$$

두 원은 P에서 외접하므로 두 부채꼴의 내부는 겹치지 않는다. 구하는 넓이는

$$\boxed{\frac{21\sqrt{3}}{32}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=\frac{21\sqrt{3}}{32}-\frac{\pi}{4}}.$$

Blue Math 교재 연계와 답안 점검

개념총정리 Lecture 21, 문제 21-1의 벡터 합·차와 Lecture 19의 대칭이동·원의 기하를 연결한다. 기하특강1의 이차곡선 접선에서는 접점의 반지름이 접선에 수직이라는 사실을 복습한다. 중심의 위치, 반지름 비, x축과의 접촉 조건을 모두 확인한 뒤 부채꼴의 중심각을 적는다.

최종 답

$$(1)\ 4+\sqrt{3}\qquad (2)\ \frac{21\sqrt{3}}{32}-\frac{\pi}{4}$$