

# 논술에서 수능으로

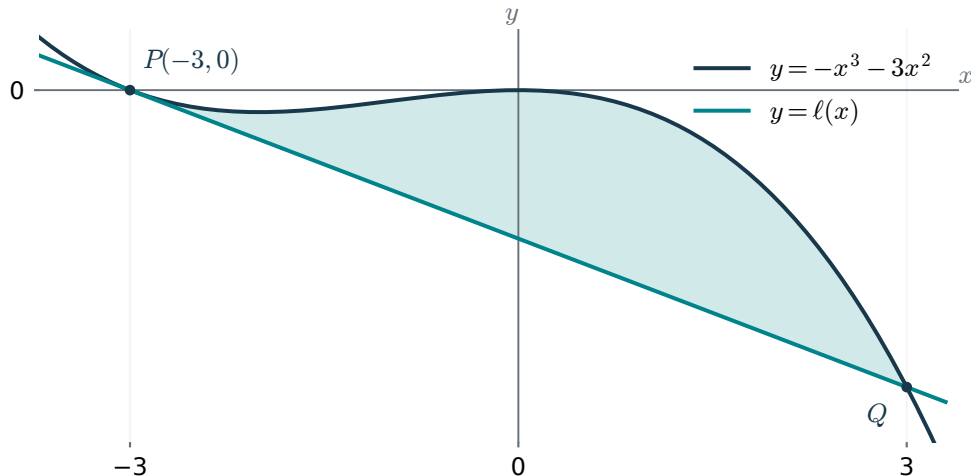
## ② 접선과 넓이

접점의 조건에서 함수의 그래프와 넓이까지

2027학년도 문제편

수학 II 공통 범위 · 다항함수의 미분과 정적분

대학 모의논술 2문항 · 수능형 변형 5문항 · 평가원 기출 2문항



접선의 방정식에서 멈추지 않고, 어떤 조건이 교점과 넓이를 결정하는지 공부합니다.

원문 조건 재서술과 BlueMath 변형을 구분한 주제별 학습서입니다.

제작·해설 최민구 T

## 학습 안내

# 무엇을 알고 무엇을 연결할까요

이 책은 접선의 기울기를 구할 수 있는 학생이 접점의 조건, 교점의 개수, 넓이의 조건을 연결하도록 설계했습니다. 모든 풀이 도구는 수학 II의 다항함수 미분·정적분과 공통 선수개념 안에 있습니다. 선택과목 미적분의 치환적분·부분적분은 사용하지 않습니다.

## 문제의 순서

| 문항    | 학습할 판단                            | 성격     |
|-------|-----------------------------------|--------|
| 01-02 | 접점과 기울기에서 직선을 결정하고 추가 조건으로 고르기    | 평가원 기출 |
| 03-05 | 접선과 곡선의 차, 적분 구간, 넓이에서 조건을 거꾸로 읽기 | 논술과 변형 |
| 06-07 | 접점이 움직일 때 삼각형의 넓이와 접점 개수 살피기      | 논술과 변형 |
| 08-09 | 접선의 개수를 실근의 개수로 바꾸고 넓이 조건과 연결하기   | 자체 변형  |

## 두 번에 나누어 공부하세요

첫째 학습에서는 01-04와 06을 먼저 풀어 기본 식을 세우는 이유를 익히세요. 둘째 학습에서는 05, 07-09를 해설 없이 다시 시도해 보세요. 막혔다면 정답보다 먼저 해설의 첫 단락에서 어떤 조건을 사용했는지 확인하세요.

## 문항 수와 출처를 정확히 구분합니다

전체는 9문항입니다. 평가원 기출 조건 재서술 2문항, 대학 모의논술 조건 재서술 2문항, BlueMath 변형 5문항입니다. 변형 5문항 중 3문항은 검수한 기존 자료를 다시 편집했고, 05·09는 이 권에서 새로 설계했습니다. 9문항을 모두 새로운 창작 문제로 세지 않습니다.

03은 원문 문제 1의 공통 함수 정의를 포함하고 독립적으로 풀 수 있는 논제 2만 발췌했습니다. 08의 출발 자료는 대학 공식 기출이 아닌 BlueMath 자체 예상입니다.

## 사용 범위

연습 시간은 학생에 따라 달라지므로 실측 시간을 제시하지 않습니다. 이 책은 전체 범위 실모가 아니며, 예상 등급컷·적중을 주장하지 않습니다. 상세 출처와 검수·이용 범위는 해설편과 교사용 기록에서 확인할 수 있습니다.

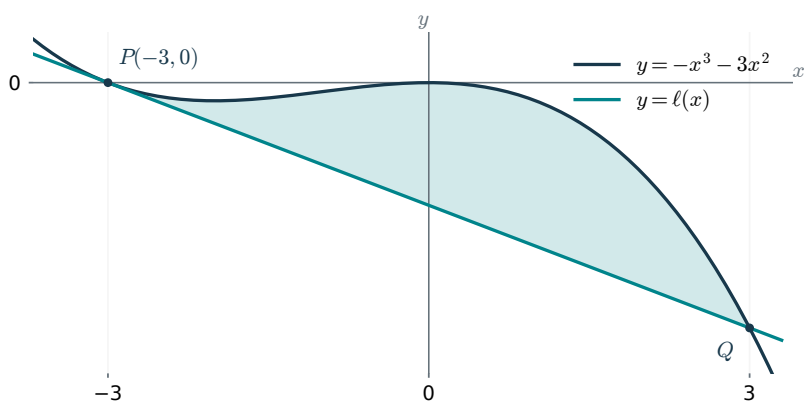
## 03 · 대학 모의논술 조건 재서술

## 접선과 곡선의 차를 넓이로 읽기

삼차함수  $f(x) = -x^3 - 3x^2$ 가 있다. 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $P(-3, f(-3))$ 에서의 접선과 곡선  $y = f(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S$ 라 하자.

$$S = \int_{-3}^3 \{f(x) - p\} dx$$

를 만족시키는 상수  $p$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오.



그림은 조건을 이해하기 위한 BlueMath 재작성입니다. 넓이와 좌표는 식으로 확인하세요.

## 풀이

## 04 · BlueMath A형 직접변형 · 기존 문항 재편집

## 주어진 접선에서 함수와 넓이 복원하기

실수  $a$ 에 대하여  $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax$ 라 하자. 직선  $y = 5x - 4$ 가 곡선  $y = f(x)$  위의  $x$ 좌표가  $t > 1$ 인 점에서 접한다. 다음은 접선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이  $S$ 를 구하는 과정이다.

접점의 좌표와 접선의 기울기에서

$$f(t) = 5t - 4, \quad f'(t) = 5$$

이고, 두 번째 식에서  $a = 5 - 3t^2 + 6t$ 이다. 이를 첫 번째 식에 대입하면

$$2t^3 - 3t^2 - 4 = 0$$

이다.  $t > 1$ 이고 위 식을 만족시키는 실수는 하나뿐이므로  $t = \boxed{\text{가}}$ ,  $a = \boxed{\text{나}}$ 이다. 접점 이외의 교점의  $x$ 좌표를  $s$ 라 하면

$$f(x) - (5x - 4) = (x - t)^2(x - s), \quad s = 3 - 2t < t$$

이다. 따라서

$$S = \int_s^t (x - t)^2(x - s) dx = \boxed{\text{다}}$$

이다. 위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각  $p, q, r$ 라 할 때,  $p + q + 4r$ 의 값을 구하시오.

**풀이**

## 공통 개념 1

## 접한다는 말에는 두 조건이 있습니다

곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서 접선의 기울기는  $f'(t)$ 입니다. 그 점을 지나면서 그 기울기를 갖는 직선은

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

입니다. 따라서 접선이  $y = mx + b$ 로 주어졌다면 반드시 다음 두 조건을 함께 만족해야 합니다.

$$f(t) = mt + b, \quad f'(t) = m.$$

첫 번째는 접점이 주어진 직선 위에 있다는 조건이고, 두 번째는 그 점에서 기울기가 같다는 조건입니다. 기울기만 맞추면 평행한 다른 직선까지 후보에 남을 수 있습니다.

## 접점을 모르면 왜 먼저 문자로 놓나요

접선의 기울기와 절편은 접점에 따라 달라집니다. 접점의 가로좌표를  $t$ 로 두면 이를 하나의 변수로 표현할 수 있습니다.  $t$ 를 정하고 나서 직선을 정하는 순서가 자연스럽습니다.

## 왜 접점이 중근이 되나요

두 그래프의 차를  $D(x) = f(x) - (mx + b)$ 라 하면

$$D(t) = 0, \quad D'(t) = 0$$

입니다. 다항식  $D$ 가  $D(t) = 0$ 을 만족하므로  $D(x) = (x - t)Q(x)$ 로 놓을 수 있습니다. 이를 미분하면

$$D'(x) = Q(x) + (x - t)Q'(x), \quad D'(t) = Q(t) = 0.$$

따라서  $Q(x)$ 도  $(x - t)$ 를 인수로 가지므로  $D(x)$ 는  $(x - t)^2$ 를 인수로 가집니다. 삼차함수라면

$$D(x) = A(x - t)^2(x - s)$$

꼴입니다. 여기서  $A$ 는 삼차함수의 최고차항 계수이고,  $s$ 는 나머지 교점의 가로좌표입니다.

## 서로 다른 교점을 세는 것과 중근을 세는 것은 다릅니다

$(x - t)^2 = 0$ 의 서로 다른 실근은  $t$  하나입니다. 또  $s = t$ 라면 두 그래프의 교점은 하나뿐이어서 두 그래프만으로 양수인 넓이를 둘러싸지 못합니다. 마지막 문항에서 이 예외가 실제로 중요해집니다.

## 03 상세해설 1

## 먼저 접선과 적분 구간을 결정합니다

정답  $p = -27$ 넓이  $S$ 가 있는데 왜 접선부터 구하나요

문제에서  $S$ 를 만드는 아래쪽 또는 위쪽 경계가 접선입니다. 접선의 식을 알아야 곡선과의 차를 만들고, 두 그래프가 만나는 구간을 찾을 수 있습니다.

$$f(x) = -x^3 - 3x^2, \quad f'(x) = -3x^2 - 6x.$$

따라서

$$f(-3) = 27 - 27 = 0, \quad f'(-3) = -27 + 18 = -9.$$

접선의 식을  $y = \ell(x)$ 라 하면

$$\ell(x) = -9(x + 3) = -9x - 27.$$

## 접점 말고 다른 교점은 어디인가요

교점에서는  $f(x) = \ell(x)$ 이므로 차를 인수분해합니다.

$$\begin{aligned} f(x) - \ell(x) &= -x^3 - 3x^2 + 9x + 27 \\ &= -x^2(x + 3) + 9(x + 3) \\ &= -(x + 3)(x^2 - 9) = -(x + 3)^2(x - 3). \end{aligned}$$

교점의 가로좌표는  $-3, 3$ 입니다.  $-3$ 은 접점이어서 중근이지만 실제 교점 하나로 셉니다.

## 왜 절댓값을 없앨 수 있나요

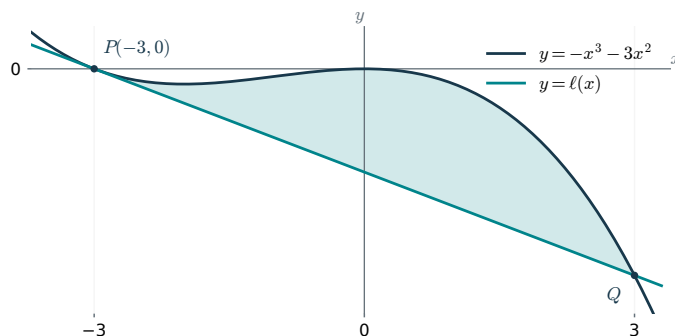
$-3 \leq x \leq 3$ 에서는  $(x + 3)^2 \geq 0, x - 3 \leq 0$ 이므로

$$f(x) - \ell(x) = -(x + 3)^2(x - 3) \geq 0.$$

즉 이 구간에서는 곡선이 접선보다 위에 있습니다. 따라서 넓이는

$$S = \int_{-3}^3 \{f(x) - \ell(x)\} dx$$

입니다. 교점만 찾고 적분부터 하는 것이 아니라 차의 부호까지 확인했습니다.



음영의 세로 높이는  $f(x) - \ell(x)$ 입니다. 두 그래프의 높이가 음수인 곳에서도 위쪽 값에서 아래쪽 값을 빼면 세로 길이는 양수가 됩니다.

## 03 상세해설 2

## 적분값이 같아도 함수가 같은 것은 아닙니다

## 문제의 두 넓이 식을 비교합니다

문제의 조건과 앞에서 구한 식을 나란히 놓으면

$$\int_{-3}^3 \{f(x) - \ell(x)\} dx = \int_{-3}^3 \{f(x) - p\} dx.$$

양쪽에 공통으로 들어 있는  $\int_{-3}^3 f(x) dx$ 를 빼면

$$\int_{-3}^3 \ell(x) dx = \int_{-3}^3 p dx.$$

오른쪽은 상수  $p$ 를 길이 6인 구간에서 적분하므로  $6p$ 입니다. 왼쪽은

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (-9x - 27) dx &= -9 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^3 - 27[x]_{-3}^3 \\ &= -9 \left( \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) - 27 \cdot 6 = -162. \end{aligned}$$

따라서  $6p = -162$ 이므로  $p = -27$ 입니다.  $6 \neq 0$ 이므로 이 값은 하나로 정해집니다.

왜 접선의 식을  $p$ 와 같다고 놓으면 안 되나요

$\ell(x)$ 는  $x$ 에 따라 변하는 일차함수이고  $p$ 는 상수입니다. 두 적분값이 같다는 이유로 모든  $x$ 에 대해  $\ell(x) = p$ 라고 할 수 없습니다. 여기서는  $-9x$ 의 적분이 좌우 대칭 구간에서 0이 되어 접선의 상수항만 남은 것입니다.

## 넓이를 직접 계산하여 검산합니다

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^3 (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27) dx \\ &= 0 - 3 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 + 0 + 27 \cdot 6 \\ &= -54 + 162 = 108. \end{aligned}$$

한편  $p = -27$ 을 원조건에 대입하면  $\int_{-3}^3 (f(x) + 27) dx = -54 + 162 = 108$ 로 같습니다.

## 제출용 답안과 채점 확인

접선  $\ell(x) = -9x - 27$ , 차  $f(x) - \ell(x) = -(x+3)^2(x-3) \geq 0$ 인 구간  $[-3, 3]$ 을 밝힙니다. 두 적분식을 비교하여  $6p = \int_{-3}^3 \ell(x) dx = -162$ , 따라서  $p = -27$ 로 마무리하면 됩니다. BlueMath 학습용 확인 요소: 접선 결정, 다른 교점, 구간에서의 부호, 적분식 비교. 이는 대학 공식 세부 부분점수표가 아닙니다. 원문 문제 1의 논제 1·3 결과는 사용하지 않습니다.

## 04 상세해설 1

## 접선이 주어졌다면 두 조건을 연립합니다

정답 34

## 03과 무엇이 달라졌나요

03은 함수와 접점이 주어져 접선을 구했습니다. 이번에는 접선이 주어지고 함수의 계수  $a$ 와 접점  $t$ 가 미정입니다. 따라서 접점이 주어진 직선 위에 있다는 조건과 기울기 조건을 함께 사용해야 합니다.

$$\begin{cases} t^3 - 3t^2 + at = 5t - 4, \\ 3t^2 - 6t + a = 5. \end{cases}$$

두 번째 식에서  $a = 5 - 3t^2 + 6t$ 를 얻습니다. 이를 첫 번째 식에 대입하면

$$\begin{aligned} t^3 - 3t^2 + (5 - 3t^2 + 6t)t &= 5t - 4, \\ -2t^3 + 3t^2 + 5t &= 5t - 4, \\ 2t^3 - 3t^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

후보가  $t=2$  하나라는 것을 어떻게 보이나요

$t = 2$ 를 대입하면  $16 - 12 - 4 = 0$ 이므로  $(t - 2)$ 를 인수로 가집니다. 실제 인수분해는

$$2t^3 - 3t^2 - 4 = (t - 2)(2t^2 + t + 2)$$

입니다. 나머지 이차식은

$$2t^2 + t + 2 = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0$$

이므로 실수  $t$ 에 대해 0이 될 수 없습니다. 따라서  $t = 2$ 만 남고, 주어진  $t > 1$ 도 만족합니다. 이어서

$$a = 5 - 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 5$$

이므로 (가)는 2, (나)는 5입니다.

## 함수값 조건은 정말 필요한가요

$f'(t) = 5$ 만 쓰면  $a = 5 - 3t^2 + 6t$ 라는 여러 후보가 남습니다. 그 기울기를 가진 접선이 반드시  $y = 5x - 4$ 일 필요는 없습니다. 위 대입 과정이 접선의 절편까지 맞추는 단계입니다.

## 원조건을 먼저 확인합니다

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ 이면  $f(2) = 6$ ,  $f'(2) = 5$ 입니다. 직선  $y = 5x - 4$ 도  $(2, 6)$ 을 지나므로 실제로 그 점에서 접합니다.

## 04 상세해설 2

# 차의 인수에서 구간과 부호를 함께 읽습니다

## 다른 교점의 위치

함수에서 접선을 빼면

$$f(x) - (5x - 4) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1).$$

따라서 접점 이외의 교점은  $x = -1$ 입니다. 문제의  $s = 3 - 2t$ 에  $t = 2$ 를 넣어도  $s = -1$ 로 같습니다.

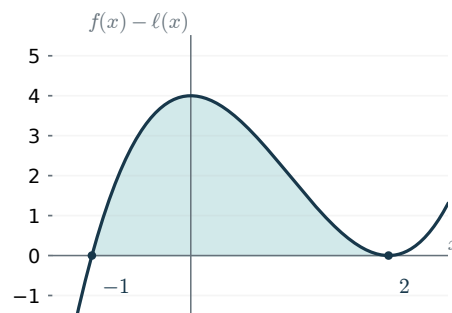
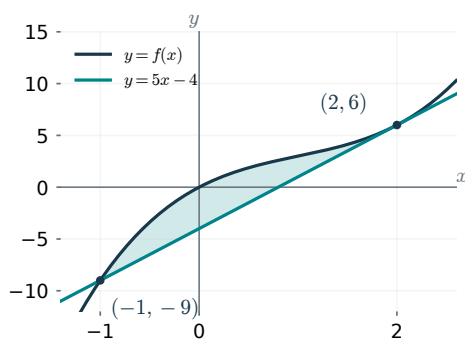
## 왜 -1부터 2까지 적분하나요

두 그래프가 만나는 가로좌표가  $-1, 2$ 이고 그 사이에서 둘러싸인 부분이 생깁니다.  $-1 \leq x \leq 2$ 에서는  $(x - 2)^2 \geq 0, x + 1 \geq 0$ 이므로 곡선이 직선보다 위에 있습니다.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x - 2)^2(x + 1) dx \\ &= \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 \\ &= (4 - 8 + 8) - \left( \frac{1}{4} + 1 - 4 \right) \\ &= 4 + \frac{11}{4} = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

그러므로 (다)는  $\frac{27}{4}$ 이고,

$$p + q + 4r = 2 + 5 + 4 \cdot \frac{27}{4} = 34.$$



왼쪽은 원래 두 그래프, 오른쪽은 그 차의 그래프입니다. 오른쪽에서는 음영이 가로축 위에 놓여 위아래 판단을 더 쉽게 할 수 있습니다. 두 음영의 세로 높이가 같으므로 넓이도 같습니다.

## 빠른 계산의 근거와 한계

다른 교점과 접점 사이의 가로 거리가 3이고 최고차항 계수가 1이므로 공통 개념에서 증명한 식으로  $S = \frac{3^4}{12} = \frac{27}{4}$ 를 확인할 수 있습니다. 먼저 다른 교점과 계수를 확인해야 하며, 모든 곡선 사이 넓이에 쓰는 공식은 아닙니다. 기존 공통20-09의 조건·빈칸·정답은 유지했습니다. 이 책에서는 첫 식의 이유, 실근 유일성, 부호와 적분 계산, 실제 그래프 읽기를 보강했습니다.