

논술에서 수능으로

③ 확률의 구조와 기댓값

분기·선택·반복 시행을 확률로 읽고
관측 조건과 구할 양에 맞게 다시 세는 주제별 학습

2027학년도 | 문제편 | 확률과 통계 중심

문제편

대학 실제 원형 5문항 → BlueMath 수능형 변형 5문항
→ 평가원 실제 4점 기출 4문항 · 전체 14문항

문항	출처·학습 범위
01	중앙대 2024 자연 I 문제1 · 분기 추출과 부피 보상
02	중앙대 2025 자연 II 문제1 · 비용을 포함한 전략 비교
03	연세대 2026 자연 문제1 · 선택 사건과 가중된 합
04	연세대 2026 자연 문제2 · 반복 시행과 기댓값의 극한
05	중앙대 2015 모의 문제1 · 유한한 재시합 횟수
06-10	BlueMath 새 변형 · 관측 조건·역방향 복원·상태 관계
11-14	2025·2026 수능, 2027 9월 모의평가 확통 실제 4점

이 책을 공부하는 순서

원문과 변형을 구별하고 같은 소재 속의 다른 판단을 찾습니다

먼저 실제 대학 문항을 품니다

01-05는 실제 대학 문항의 수학적 조건과 물음을 보존한 원형입니다. 전형·학년도·원래 번호를 출처에 표시했습니다. 2016학년도 중앙대 백서의 05는 **2015학년도 모의논술**, 2026학년도 중앙대 가이드의 02는 **2025학년도 자연II** 문항입니다. 책이 나온 해와 시험의 학년도를 구별하세요.

대학 원문은 각각 하나의 독립된 물음으로 총5문항입니다. 해설의 단계나 자체 확인 질문을 원문의 소문항으로 부풀리지 않았습니다. 05의 각 경기 독립성은 공식 해설의 전제를 편집 주석에 명시했습니다.

변형에서는 다시 표본공간을 정합니다

06-10은 대학 원문이 아니라 **BlueMath 수능형 변형**입니다. 원문을 푼 기억만으로 공식을 대입하지 말고, 무엇을 관측했으며 무엇을 구하는지부터 새로 확인하세요. 원형과 변형을 짝지어 바로 풀 수도 있지만, 답을 기억해 푸는지 점검하려면 원형 묶음을 먼저 마친 뒤 변형 묶음을 푸는 편이 좋습니다.

대학 원형	01	02	03	04	05
연결 변형	06	07	08	09	10

09는 둘 이상의 카드 상태를 함께 다루는 본격 심화 변형입니다. 한 문항 안에서 여러 판단을 연결하는 연습으로 활용하세요. 07은 제거 과정에서 이전 사건을 추론하고, 08은 카드의 포함 개수와 합의 조건을 함께 다룹니다. 나머지 변형도 조건과 목표가 실제로 달라졌으며, 단순 수치반복으로 세지 않았습니다.

평가원 4점에서 수능의 질문 방식으로 확인합니다

11-14는 실제 평가원 4점 기출입니다. 11은 최종 상태의 조건, 12는 주어진 정보에 맞는 확률, 13은 반복 시행의 중간 관측, 14는 확률변수로 표현한 합을 말합니다. 같은 4점이라도 필요한 판단과 계산 부담은 다릅니다. 특히 14는 짧은 발상형 연결 문항이지 번호30만으로 최고난도를 뜻하지 않습니다.

범위와 답안 형식을 확인합니다

04는 확률과 통계에서 출발해 **선택 미적분의 수열의 극한**으로 이어집니다. 미적분을 배우지 않았다면 유한한 n 에 대한 식까지 먼저 공부한 뒤 극한 부분을 나중에 읽어도 됩니다. 09는 유한 횟수의 시행만 다루며 극한을 요구하지 않습니다.

원형은 이유를 서술하는 연습을 하고, 수능형은 먼저 객관식 또는 단답형 형식으로 답을 결정합니다. 상세 해설 뒤의 논술 제출용 모범답안은 이해용 해설보다 짧습니다. **모범답안을 외우는 것만으로 상세해설을 대신하지 마세요.** 자체 연습 채점 요소는 대학 공식 채점표와 구별해 표시했습니다.

이 책의 난도 표현은 요구되는 판단에 대한 편집상 분석입니다. 학생 실측 정답률·평균 풀이 시간·등급컷 자료는 없습니다. 문제·해설에 표시한 학년도는 출처 또는 대비 범위이며 제작 날짜가 아닙니다.

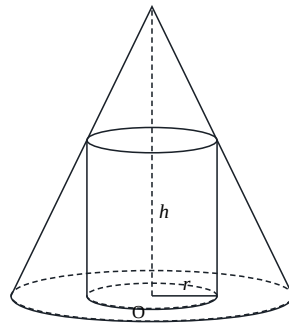
01 추출 결과를 부피로 바꾸기

중앙대학교 2024학년도 수시 자연계열 I 문제 1 · 대학 배점 20점

공식 원문의 수학적 조건과 요구를 보존하여 재서술했습니다. 그림은 같은 관계를 새로 그렸습니다. 원문 PDF는 교사용 출처표에서 확인할 수 있습니다.

밑면의 반지름이 5, 높이가 10인 원뿔과 두 주머니 A, B가 있다. A에는 1, 2, 3이 하나씩 적힌 공 세 개, B에는 1, 2가 하나씩 적힌 공 두 개가 들어 있다. 다음 순서로 한 번 시행한다.

1. 주사위 한 개를 던진다. 눈의 수가 3의 배수이면 A에서 두 공을 동시에, B에서 한 공을 임의로 꺼낸다. 그렇지 않으면 A에서 한 공을, B에서 두 공을 동시에 임의로 꺼낸다.
2. 꺼낸 세 공의 수를 모두 더한 값을 k 라 하자. 아래 그림처럼 주어진 원뿔에 내접하면서 밑면의 반지름이 $k - 3$ 인 원기둥을 만든다.
3. 이 원기둥의 부피를 점수로 정한다.



원뿔의 밑면과 원기둥의 밑면은 같은 평면에 있고 두 도형의 축은 같다.
점수의 기댓값을 구하시오.

[20점]

풀이 공간

01 추출 결과를 부피로 바꾸기

정답 24π · 서로 다른 경로가 같은 k 를 만드는 경우를 합칩니다.

1 무엇을 먼저 확률변수로 정할까요

바로 부피를 나열하면 공의 추출과 도형의 계산이 한꺼번에 섞입니다. 공에 적힌 수의 합을 K 로 정하고, 먼저 K 의 분포를 구하겠습니다. 이후 각 k 에 대응하는 부피를 계산하면 됩니다. 주사위 눈이 3의 배수인 사건을 D 라고 놓으면

$$P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(D^c) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

두 경우는 꺼내는 공의 수가 다르므로 반드시 나누어 씁니다.

2 두 추출 방식의 확률을 구합니다

D 가 일어나면 A에서 꺼내는 두 수는 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 중 하나이고 B의 수는 1, 2 중 하나입니다. 여섯 조합은 D 라는 조건 아래에서 각각 확률 $\frac{1}{6}$ 입니다. 주사위까지 포함한 확률은 각각 $(\frac{1}{3})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{18}$ 입니다.

A의 두 수	B의 수	K	주사위까지 포함한 확률
1, 2	1	4	$\frac{1}{18}$
1, 2	2	5	$\frac{1}{18}$
1, 3	1	5	$\frac{1}{18}$
1, 3	2	6	$\frac{1}{18}$
2, 3	1	6	$\frac{1}{18}$
2, 3	2	7	$\frac{1}{18}$

D^c 가 일어나면 B의 두 수는 반드시 1, 2입니다. A의 수가 1, 2, 3인 세 경우의 K 는 각각 4, 5, 6이고, 주사위까지 포함한 확률은 각각 $(\frac{2}{3})(\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ 입니다.

k	4	5	6	7
$P(D \cap \{K = k\})$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$
$P(D^c \cap \{K = k\})$	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$	0
$P(K = k)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

확률의 합은 $\frac{5+6+6+1}{18} = 1$ 입니다. 특히 $K = 7$ 은 D 에서만 가능하지만, $K = 4, 5, 6$ 은 두 경로 모두에서 가능합니다.

3 부피를 k 의 함수로 나타냅니다

원기둥의 반지름을 r , 높이를 h 라 하겠습니다. 축을 포함하는 평면으로 잘랐을 때 작은 삼각형과 전체 삼각형이 닮음이므로

$$\frac{r}{5} = \frac{10-h}{10}, \quad h = 10 - 2r.$$

$r = k - 3$ 을 대입하면 $h = 16 - 2k$ 이고, 점수 V 는

$$V = \pi r^2 h = \pi(k-3)^2(16-2k)$$

입니다. 가능한 모든 k 에 대해 $r > 0, h > 0$ 도 확인됩니다.

k	확률	r	h	V
4	$\frac{5}{18}$	1	8	8π
5	$\frac{6}{18}$	2	6	24π
6	$\frac{6}{18}$	3	4	36π
7	$\frac{1}{18}$	4	2	32π

반지름이 커지면 높이는 작아집니다. 따라서 k 가 커질수록 부피도 커진다고 단정하면 안 됩니다. 실제로 $k=7$ 의 부피는 $k=6$ 의 부피보다 작습니다.

4 값과 그 확률을 곱해 더합니다

$$\begin{aligned} E(V) &= 8\pi \cdot \frac{5}{18} + 24\pi \cdot \frac{6}{18} + 36\pi \cdot \frac{6}{18} + 32\pi \cdot \frac{1}{18} \\ &= \frac{40 + 144 + 216 + 32}{18}\pi = \frac{432}{18}\pi = \boxed{24\pi}. \end{aligned}$$

5 다른 분류로 계산합니다

D 에서 점수 여섯 개의 평균은

$$\frac{8 + 24 + 24 + 36 + 36 + 32}{6}\pi = \frac{80}{3}\pi.$$

D^c 에서 점수 세 개의 평균은 $\frac{(8+24+36)\pi}{3} = \frac{68\pi}{3}$ 입니다. 두 경우의 확률로 다시 가중평균을 내면

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{80}{3}\pi + \frac{2}{3} \cdot \frac{68}{3}\pi = 24\pi$$

로 같습니다.

왜 공을 꺼낸 아홉 가지 경우를 모두 같은 확률로 두면 안 되나요?

첫 여섯 경우는 각각 $\frac{1}{18}$, 나머지 세 경우는 각각 $\frac{2}{9}$ 입니다. 주사위가 결정하는 두 가지 추출 방식의 확률부터 다르기 때문입니다.

K 의 평균을 먼저 구해 부피식에 넣으면 되나요?

안 됩니다. 부피식은 k 에 대한 삼차식입니다. 일반적으로 $E(f(K)) = f(E(K))$ 가 성립하지 않습니다. 이 문제에서는 각 k 에 대응하는 부피를 구한 뒤 평균을 내야 합니다.

06번에서는 무엇이 달라지나요?

한 번의 평균을 계산하는 대신, 두 번의 결과가 같았다는 관측으로 표본공간을 제한합니다. 위 표의 두 행을 합치지 않고 보존하면 숨겨진 주사위 사건까지 추적할 수 있습니다.

06 같은 부피라는 관측이 남기는 정보

01번 연결 신규 변형 · 단답형 · 연습 배점 4점

주머니 A에는 1, 2, 3이 하나씩 적힌 공 세 개, B에는 1, 2가 하나씩 적힌 공 두 개가 있다. 다음 시행을 서로 독립적으로 두 번 한다. 매번 처음 상태의 주머니와 주사위를 사용한다.

- 주사위 눈이 3의 배수이면 A에서 두 공을 동시에, B에서 한 공을 임의로 꺼낸다. 그렇지 않으면 A에서 한 공, B에서 두 공을 동시에 임의로 꺼낸다.
- 꺼낸 세 공의 수의 합을 k 라 하자. 밑면의 반지름이 5, 높이가 10인 원뿔에, 밑면이 같은 평면에 놓고 축이 같은 원기둥을 내접시킨다. 이 원기둥의 밑면의 반지름은 $k - 3$ 이다.

두 시행에서 얻은 원기둥의 부피를 각각 V_1, V_2 라 하고, 두 번 던진 주사위에서 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 X 라 하자.

두 부피가 같았다는 조건 아래에서 X 의 기댓값을 $\frac{p}{q}$ 라 할 때, $p + q$ 의 값을 구하시오. 단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.

풀이 공간

06 같은 부피라는 관측이 남기는 정보

정답 79 · 주어진 조건 아래 평균은 $\frac{30}{49}$ 입니다.

1 어떤 값들이 같아졌는지부터 확인합니다

한 시행의 수의 합을 K 라 하면 원기둥의 부피는

$$v(k) = \pi(k-3)^2(16-2k)$$

입니다. 가능한 $k = 4, 5, 6, 7$ 에 대해 부피는 각각 $8\pi, 24\pi, 36\pi, 32\pi$ 입니다. 네 부피가 서로 다르므로

$$V_1 = V_2 \iff K_1 = K_2.$$

부피식이 전체 구간에서 증가하는 것은 아닙니다. 여기서는 가능한 네 값에 대응하는 부피가 서로 다르다는 사실만 사용합니다.

2 주사위 사건과 합을 함께 기록합니다

한 시행에서 주사위 눈이 3의 배수인 사건을 D 라 하겠습니다. D 와 각 추출 결과가 함께 일어나는 여섯 사건의 확률이 각각 $\frac{1}{18}$ 이고, 그 합은 4, 5, 5, 6, 6, 7입니다. D^c 와 각 추출 결과가 함께 일어나는 세 사건의 확률이 각각 $\frac{2}{9}$ 이고, 그 합은 4, 5, 6입니다. 따라서 다음 표를 얻습니다.

k	4	5	6	7
$d_k = P(D \cap \{K = k\})$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$
$c_k = P(D^c \cap \{K = k\})$	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$	0
$d_k + c_k$	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

d_k, c_k 는 $K = k$ 라는 조건 아래의 확률이 아닙니다. 주사위와 공의 추출을 모두 포함한 사건의 확률입니다. 이 구별을 해야 두 시행의 확률을 바로 곱할 수 있습니다.

3 같은 부피가 나오는 사건을 구합니다

$H = \{V_1 = V_2\}$ 라 하겠습니다. 두 시행은 독립이므로, 두 합이 모두 k 일 확률은 $(d_k + c_k)^2$ 입니다. 서로 다른 k 의 경우는 겹치지 않으므로

$$P(H) = \sum_{k=4}^7 (d_k + c_k)^2 = \frac{5^2 + 6^2 + 6^2 + 1^2}{18^2} = \frac{98}{324}.$$

조건을 걸기 전에는 두 시행이 독립입니다. 그러나 H 를 알게 된 뒤의 두 시행까지 독립이라고 생각하면 안 됩니다.

4 숨겨진 횟수의 세 경우를 모두 셉니다

X 는 0, 1, 2 중 하나입니다. H 와 함께 일어날 확률을 계산하면

$$\begin{aligned} P(X=0, H) &= \sum c_k^2 = \frac{16+16+16+0}{324} = \frac{48}{324}, \\ P(X=1, H) &= \sum 2d_k c_k = \frac{2(4+8+8+0)}{324} = \frac{40}{324}, \\ P(X=2, H) &= \sum d_k^2 = \frac{1+4+4+1}{324} = \frac{10}{324}. \end{aligned}$$

$X = 1$ 일 때는 첫 시행만 D 인 경우와 둘째 시행만 D 인 경우가 있어 2를 곱했습니다. 세 분자의 합 $48 + 40 + 10 = 98$ 은 앞에서 계산한 H 의 분자와 같습니다. 각 값을 $P(H) = \frac{98}{324}$ 로 나누면 조건부 분포는

x	0	1	2
$P(X = x H)$	$\frac{24}{49}$	$\frac{20}{49}$	$\frac{5}{49}$

입니다. 따라서

$$\sum_{x=0}^2 xP(X = x | H) = 0 \cdot \frac{24}{49} + 1 \cdot \frac{20}{49} + 2 \cdot \frac{5}{49} = \frac{30}{49}.$$

30과 49는 서로소이므로 $p + q = \boxed{79}$ 입니다.

5 한 시행에 집중하여 다시 확인합니다

H 가 일어났을 때 첫 주사위가 3의 배수일 확률은

$$\frac{\sum d_k(d_k + c_k)}{P(H)} = \frac{5 + 12 + 12 + 1}{98} = \frac{15}{49}.$$

둘째 주사위도 대칭성으로 같습니다. 각 시행에서 D 이면 1, 아니면 0인 값을 정하면 X 는 이 두 값의 합입니다. 유한한 결과별 가중합을 전개하면 두 평균을 더할 수 있으므로 그 값은 $\frac{15}{49} + \frac{15}{49} = \frac{30}{49}$ 입니다. 두 값이 조건 아래에서 독립일 필요는 없습니다. 기댓값의 합 성질은 독립 여부와 관계없이 성립합니다.

두 번 모두 같은 부피면 같은 추출 방식이었던 것 아닌가요?

그렇지 않습니다. 예를 들어 $k = 4$ 는 D 에서도 D^c 에서도 나옵니다. 그래서 $X = 1$ 인 경우도 반드시 포함해야 합니다.

조건을 걸어도 X 가 이항분포를 따르지 않나요?

조건 전에는 X 가 성공확률 $\frac{1}{3}$ 인 두 번의 독립 시행 횟수입니다. 하지만 부피가 같다는 관측이 두 시행을 연결하므로 조건부 분포를 새로 구해야 합니다. 무조건 기댓값 $\frac{2}{3}$ 을 그대로 사용하면 안 됩니다.

이 문제에서 01번 표를 어떻게 확장했나요?

01번에서는 두 행을 더해 K 의 분포만 남겨도 됐습니다. 여기서 숨겨진 사건 D 의 횟수를 몰으므로, 두 행을 보존한 뒤 같은 k 끼리 곱했습니다. 무엇을 묻는지에 따라 남겨 두어야 할 정보가 달라집니다.