2022 개정 교육과정

평가원 기출 205문항 완전 수록

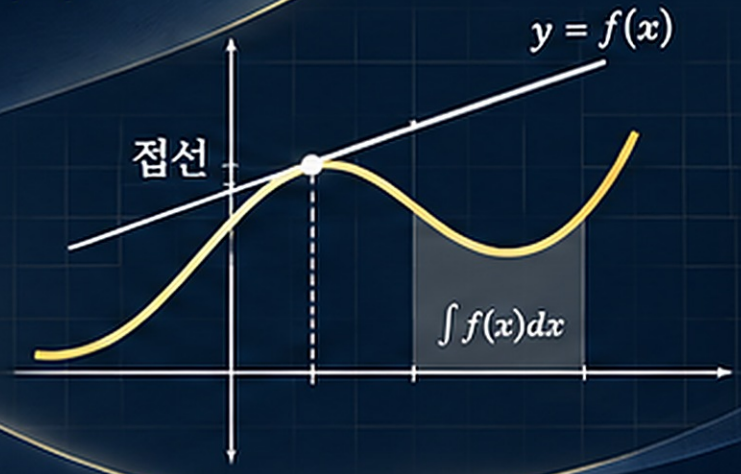
그래서 왜 수학?

미적분 Ⅱ 편

수열의 극한 · 미분법 · 적분법

원래 잘하던 사람은 몰랐던
답답함을 풀어주는 수학

김소희 지음



205
평가원 기출 문항
수능 126 · 모의평가 79

100%
기출 전 문항
사고 흐름 · 풀이 수록

38+27
교과 개념 + 수능 개념
미적분 Ⅱ 전 범위 9챕터

2014~2026학년도 수능 · 2023~2027학년도 6월/9월 모의평가 수록

2022 개정 · 미적분 Ⅱ

지은이

김소희

연세대학교 시스템생물학과 졸업

그래서 왜 수학 · 미적분 II 편 (2022 개정 교육과정)

지은이 김소희

이 책의 수능·모의평가 기출 문항 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

교과 개념, 수능 개념, 대표 문제, 단계별 연습의 문장과 풀이는 이 책을 위해 새로 썼습니다.

차례

Ⅰ. 수열의 극한

A 수열의 극한 5
A-1 수열의 수렴과 발산 · A-2 수열의 극한값의 계산 · A-3 수열의 극한의 대소 관계 · A-4 등비수열의 극한
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 8 · 모평 10

B 급수 28
B-1 급수의 뜻과 수렴·발산 · B-2 급수와 일반항의 관계 · B-3 등비급수
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 9 · 모평 13

Ⅱ. 미분법

C 지수함수와 로그함수의 미분 56
C-1 지수함수와 로그함수의 극한 · C-2 수 e와 자연로그 · C-3 지수·로그함수의 기본 극한 · C-4 지수함수와 로그함수의 도함수
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 11 · 모평 6

D 삼각함수의 미분 77
D-1 여러 가지 삼각함수 · D-2 삼각함수의 덧셈정리 · D-3 삼각함수의 극한 · D-4 삼각함수의 도함수
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 20 · 모평 8

E 여러 가지 미분법 105
E-1 몫의 미분법 · E-2 합성함수의 미분법 · E-3 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 · E-4 음함수의 미분법 · E-5 역함수의 미분법 · E-6 이계도함수
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 18 · 모평 19

F 접선과 그래프 135
F-1 접선의 방정식 · F-2 함수의 증가·감소와 극대·극소 · F-3 이계도함수를 이용한 극값 판정 · F-4 곡선의 오목·볼록과 변곡점 · F-5 함수의 그래프의 개형
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 18 · 모평 4

G 도함수의 활용 161
G-1 함수의 최대·최소 · G-2 방정식의 실근의 개수 · G-3 부등식의 증명 · G-4 평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 5 · 모평 3

Ⅲ. 적분법

H 여러 가지 적분법 179
H-1 여러 가지 함수의 부정적분 · H-2 치환적분법 · H-3 부분적분법 · H-4 삼각함수의 적분과 반각 공식
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 22 · 모평 11

I 정적분의 활용 208
I-1 정적분과 급수의 합 · I-2 넓이 · I-3 입체도형의 부피 · I-4 속도와 거리
수능 개념 3 · 대표 문제 3 · 단계별 연습 11 · 기출 수능 15 · 모평 5

이 책의 구성

이 책은 ‘원래 잘하던 사람’이 당연하게 넘어가는 곳에서 멈춥니다. 각 챕터는 아래 순서로 읽습니다.

01 이야기로 시작하기 챕터 첫 쪽
생활 속 장면 하나로 이 챕터가 답할 질문을 먼저 던집니다.

02 교과 개념 한 줄 요약 · 이야기로 이해하기
정의를 외우기 전에, 왜 그렇게 정할 수밖에 없었는지부터 설명합니다.

03 사고 흐름 모든 개념과 문제에
“이걸 어떻게 떠올려요?”에 대한 답. 잘하는 사람이 머릿속에서 건너뛰는 한 줄을 적었습니다.

04 수능 개념 교과서에는 없지만 시험에 반복되는 관점
모두 교과 개념으로 증명되는 것만 담았습니다.

05 대표 문제 정석 → 빠른 길
교과서 풀이를 먼저 완성하고, 수능 풀이는 어느 수능 개념을 썼는지 번호로 표시합니다.

06 단계별 연습 기본 · 유형 · 실전
기본은 1회독, 실전은 2회독부터. 해설은 정답, 핵심 한 줄, 개념 번호로 정리했습니다.

07 기출 연습 · 기출 해설 수능 2014~2026, 모의평가 6월·9월
문항마다 사고 흐름과 풀이를 붙였습니다.

08 Review 진단 · 발상 정리 · 개인 발상 노트
답하지 못한 항목은 표시된 절로 돌아가 다시 읽습니다.

색 약속 정석 · 교과서 풀이 빠른 길 · 수능 풀이 다른 관점 · 검산 날개 메모

A

Ⅰ. 수열의 극한 · 1. 수열의 극한

수열의 극한

이야기로 시작하기 — 튀어 오르는 공은 언제 멈출까?

고무공을 1 m 높이에서 떨어뜨리면, 바닥에 닿을 때마다 직전 높이의 절반까지 튀어 오른다고 해 봅시다. 튀어 오르는 높이를 차례로 적으면 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$입니다.

튀어 오른 횟수 n	1	2	5	10	20
높이 (m)	0.5	0.25	0.03125	약 0.00098	약 0.00000095

높이는 어느 순간에도 정확히 0이 되지는 않습니다. 하지만 n이 커질수록 0에 얼마든지 가까워집니다.

미적분 Ⅰ 에서 x가 a에 다가갈 때 함수값이 향하는 값을 보았다면, 이번에는 자연수 n이 끝없이 커질 때 수열이 향하는 값을 봅니다.

이 챕터에서는 세 가지 질문에 답합니다.

이 챕터에서 답할 질문

질문 1 · 끝없이 가면 어디에 도착할까?
수렴과 발산 (A-1)

질문 2 · ∞/∞처럼 둘 다 커지면 어떻게 비교할까?
극한값의 계산과 대소 관계 (A-2, A-3)

질문 3 · 거듭제곱 r^n은 언제 0으로 가고 언제 터질까?
등비수열의 극한 (A-4)

이 챕터의 길

A-1 수열의 수렴과 발산 — 교과서 개념
A-2 수열의 극한값의 계산 — 교과서 개념
A-3 수열의 극한의 대소 관계 — 교과서 개념
A-4 등비수열의 극한 — 교과서 개념
수능 A-① 가장 빨리 커지는 항만 살아남는다 — 수능 개념
수능 A-② x^n이 들어간 극한으로 정의된 함수는 |x|와 1을 비교한다 — 수능 개념
수능 A-③ 구하는 식을 주어진 수열로 다시 쓴다 — 수능 개념
대표 문제 3문항 — 사고 흐름 · 두 풀이
단계별 연습 11문항 — 기본 · 유형 · 실전
기출 연습 수능 8 · 모평 10 — 기출 해설 · Review

1부 · 교과 개념

교과서 개념

이 챕터의 목표는 하나입니다. **n이 커질 때 가장 빨리 커지는 항이 무엇인지 찾는 것.**
분수식도, 무리식도, 거듭제곱도 모두 이 질문 하나로 풀립니다.

A-1 수열의 수렴과 발산 교과서 개념

> **한 줄 요약**
> 수열의 극한은 n이 끝없이 커질 때 a_n이 '향하는 값'이다.

이야기로 이해하기

멀리 있는 등대를 향해 걸어간다고 해 봅시다. 한 걸음마다 남은 거리의 절반만 간다면 등대에 영원히 닿지는 못하지만, 등대가 도착점이라는 것은 분명합니다. 극한은 '닿았는가'가 아니라 '어디로 향하는가'를 묻습니다.

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때 a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 하고, α를 **극한값**이라 합니다. 수렴하지 않으면 **발산**한다고 합니다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{또는} \quad n \to \infty \text{일 때 } a_n \to \alpha$$

경우	쓰는 법	예
α에 수렴	$\lim a_n = \alpha$	$a_n = \frac{1}{n}$ 은 0에 수렴
양의 무한대로 발산	$\lim a_n = \infty$	$a_n = n^2$
음의 무한대로 발산	$\lim a_n = -\infty$	$a_n = -2n$
진동	극한 없음	$a_n = (-1)^n$

사고 흐름 $(-1)^n$은 값이 1과 −1로 정해져 있는데 왜 발산일까요? 극한값은 '하나의' 값에 가까워져야 합니다. 두 값을 오가면 어느 하나로도 다가가지 않으므로 수렴하지 않습니다. 이런 발산을 **진동**이라고 합니다.

A-2 수열의 극한값의 계산 교과서 개념

> **한 줄 요약**
> ∞/∞ 꼴은 가장 큰 항으로 나누고, ∞ − ∞ 꼴은 유리화한다.

이야기로 이해하기

★ 날개 메모

미적분 I 의 함수의 극한과 다른 점은 '한쪽으로만 간다'는 것입니다. n은 자연수라 좌극한·우극한이 없고, 커지는 방향 하나만 봅니다.

백만장자의 재산에 커피값 몇 천 원을 더해도 재산의 크기는 거의 그대로입니다. $3n^2 - n$에서 n이 아주 커지면 −n은 커피값입니다. 비교할 때는 가장 큰 항끼리만 보면 됩니다.

두 수열이 수렴하면($\lim a_n = \alpha$, $\lim b_n = \beta$) 다음이 성립합니다.

극한의 성질	식
상수배	$\lim k a_n = k\alpha$
합·차	$\lim (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
곱	$\lim a_n b_n = \alpha\beta$
몫	$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ $(b_n \neq 0, \beta \neq 0)$

성질을 바로 쓸 수 없는 꼴은 모양을 바꾼 뒤 씁니다.

꼴	방법	예
∞/∞	분모의 가장 큰 항으로 분자·분모를 나눈다	$\frac{3n^2 - n}{n^2 + 2}$ 은 3에 수렴
∞ − ∞ (무리식)	분자를 유리화한다	$\sqrt{(n^2 + 4n)} - n$ 은 2에 수렴
∞ − ∞ (다항식)	가장 큰 항으로 묶는다	$n^2 - 5n = n^2(1 - \frac{5}{n})$ 은 ∞로 발산

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=2$$

사고 흐름 왜 분모의 가장 큰 항으로 나눌까요? 나눈 뒤에 분모가 '0이 아닌 수'로 수렴해야 몫의 성질을 쓸 수 있기 때문입니다. 분모를 기준으로 잡으면 분모는 항상 상수로 갑니다.

★ 날개 메모

∞/∞의 결과는 차수만 보고 알 수 있습니다. 분자의 차수가 더 낮으면 0, 같으면 최고차항 계수의 비, 더 높으면 발산입니다(수능 개념 A-①).

A-3 수열의 극한의 대소 관계 교과서 개념

한 줄 요약

양쪽에서 같은 값으로 조여 오면 가운데도 그 값으로 간다.

이야기로 이해하기

두 친구 사이에 끼어서 걸으면, 두 친구가 같은 식당 문 앞에 도착할 때 가운데 사람도 그 문 앞에 서 있습니다.

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음이 성립합니다.

★ 날개 메모

주어진 부등식을 그대로 쓰지 말고, 구하려는 식 모양이 되도록 양변을 나누거나 곱한 뒤 끼웁니다.

조건	결론
모든 n에 대하여 $a_n \le b_n$	$\lim a_n \le \lim b_n$
$a_n \le c_n \le b_n$ 이고 $\lim a_n = \lim b_n = \alpha$	$\lim c_n = \alpha$

사고 흐름 $a_n < b_n$이면 극한값도 '<'일까요? 아닙니다. $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$이면 항상 $a_n < b_n$이지만 두 극한값은 모두 0입니다. 극한을 취하면 부등호에 등호가 붙을 수 있습니다.

A-4 등비수열의 극한 교과서 개념

한 줄 요약

r^n은 $|r|$이 1보다 작으면 줄어들고, 1보다 크면 터진다.

이야기로 이해하기

복사기에서 90%로 축소를 계속 누르면 그림은 점이 되어 사라지고, 110%로 확대를 계속 누르면 종이를 뚫고 나갑니다. 100%이면 그대로입니다.

r의 범위	$\lim r^n$
$r > 1$	∞ (발산)
$r = 1$	1 (수렴)
$-1 < r < 1$	0 (수렴)
$r \le -1$	진동 (발산)

그러므로 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 조건은 **$-1 < r \le 1$**입니다.

증명($r > 1$): $r = 1 + h$ ($h > 0$)로 두면 이항정리에서 $r^n = (1+h)^n \ge 1 + nh$이고, $1 + nh$는 ∞로 발산하므로 r^n도 ∞로 발산합니다. $0 < |r| < 1$이면 $1/|r| > 1$이므로 $|r|^n = \frac{1}{(1/|r|)^n}$은 0으로 수렴합니다.

사고 흐름 $r = -1$은 왜 수렴하지 않을까요? $(-1)^n$은 $-1, 1, -1, 1, \cdots$을 오가므로 진동입니다. 크기는 그대로이지만 부호가 계속 바뀝니다. 그래서 수렴 조건의 왼쪽에는 등호가 없고 오른쪽에는 등호가 있습니다.

★ 날개 메모

등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴할 조건은 $a = 0$ 또는 $-1 < r \le 1$입니다. 첫째항이 0이면 모든 항이 0이라 항상 수렴합니다.

개념 예제 한 줄씩 따라 쓰기

EX 01 $\lim \dfrac{3n^2-n}{n^2+2}$의 값을 구하시오.

1. 도구: ∞/∞는 분모의 최고차항으로 나눈다 (A-2)
2. 분자·분모를 n^2으로 나누면 $\dfrac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}$
3. **3**

EX 02 $\lim(\sqrt{(n^2+4n)}-n)$의 값을 구하시오.

1. 도구: $\infty-\infty$ 무리식은 유리화 (A-2)
2. $\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$을 n으로 나누면 $\dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}$
3. **2**

EX 03 $\lim \dfrac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}-2^n}$의 값을 구하시오.

1. 도구: 밑이 가장 큰 거듭제곱으로 나눈다 (A-2, A-4)
2. 3^n으로 나누면 $\dfrac{2(\frac{2}{3})^n+1}{3-(\frac{2}{3})^n}$이고 $(\dfrac{2}{3})^n$은 0으로 갑니다.
3. $\dfrac{1}{3}$

EX 04 등비수열 $\{(\dfrac{x-1}{3})^n\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수를 구하시오.

1. 도구: 수렴 조건 $-1 < r \leq 1$ (A-4)
2. $-1 < \dfrac{x-1}{3} \leq 1$에서 $-2 < x \leq 4$
3. x = −1, 0, 1, 2, 3, 4의 **6**개

EX 05 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $3n^2-1 < a_n < 3n^2+2$를 만족시킬 때, $\lim \dfrac{a_n}{n^2+1}$의 값을 구하시오.

1. 도구: 구하는 모양으로 바꾼 뒤 끼우기 (A-3)
2. 각 변을 n^2+1로 나누면 $\dfrac{3n^2-1}{n^2+1} < \dfrac{a_n}{n^2+1} < \dfrac{3n^2+2}{n^2+1}$
3. 양 끝이 모두 3으로 수렴하므로 **3**

2부 · 수능 개념

시험에서 반복되는 관점

아래 세 가지는 교과서 본문에는 없지만 시험에 반복해서 나오는 관점입니다. 모두 1부 개념으로 증명할 수 있습니다.

수능 개념 A-① 가장 빨리 커지는 항만 살아남는다

n이 커질 때 커지는 속도는 다음 순서입니다.

느림	→	빠름
$\sqrt{n}$, n, n^2, n^3 (차수가 높을수록 빠름)	보다 빠른	2^n, 3^n, 5^n (밑이 클수록 빠름)

∞/∞ 꼴에서는 분자와 분모에서 가장 빨리 커지는 항만 남겨서 비교합니다. 예를 들어 $\frac{5n^3+n}{2n^3-7}$은 $\frac{5n^3}{2n^3}=\frac{5}{2}$로, $\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}$은 $3\times\frac{3^n}{3^n}=3$으로 바로 읽습니다.

증명은 A-2와 같습니다. 분모의 가장 빠른 항으로 나누면 나머지 항은 모두 0으로 갑니다.

★ 날개 메모

다항식과 지수가 섞이면 지수가 항상 이깁니다. 이 사실은 챕터 C에서 다시 씁니다.

수능 개념 A-② x^n이 들어간 극한으로 정의된 함수는 $|x|$와 1을 비교한다

$f(x)=\lim\frac{x^{2n+1}+2x}{x^{2n}+1}$처럼 n에 대한 극한으로 정의된 함수는 x에 따라 x^n의 움직임이 달라집니다. 그래서 네 경우로 나눕니다.

x의 범위	x^{2n}	f(x)
$\|x\|<1$	0으로 감	$\frac{0+2x}{0+1}=2x$
$x=1$	1	$\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$
$x=-1$	1	$\frac{-1-2}{1+1}=-\frac{3}{2}$
$\|x\|>1$	∞로 감	분자·분모를 x^{2n}으로 나누면 x

증명은 A-4 하나입니다. $|x|<1$이면 $x^{2n}=(x^2)^n$에서 $0\le x^2<1$이므로 0으로 갑니다. $|x|>1$이면 $x^2>1$이므로 ∞로 갑니다.

★ 날개 메모

경계인 $x=1$, $x=-1$을 따로 계산하는 것을 잊지 마세요. 이 두 점에서는 함수값이 양쪽 식과 다르게 나오는 경우가 많고, 그래서 불연속점이 생깁니다.

수능 개념 A-③ 구하는 식을 주어진 수열로 다시 쓴다

$\lim n a_n=2$처럼 '어떤 식의 극한'만 주어지고 a_n 자체는 모를 때가 많습니다. 이때는 구하는 식을 '주어진 식 × 극한을 아는 식'으로 쪼갭니다.

$$\frac{(n^2+1)a_n}{2n-1} = na_n \times \frac{n^2+1}{n(2n-1)} \;\to\; 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

주어진 식이 $\frac{2a_n - 1}{a_n + 3}$처럼 복잡하면, 그 식을 b_n으로 놓고 a_n을 b_n에 대한 식으로 풀어서 씁니다.

★ 날개 메모

'lim a_n = α로 놓고 바로 대입'은 a_n이 수렴한다는 보장이 있을 때만 쓸 수 있습니다. a_n을 주어진 수열로 나타내면 수렴까지 한꺼번에 보장됩니다.

대표 문제

사고 흐름 → 정석 → 빠른 길

모든 대표 문제는 교과서적 해법을 먼저 완성하고, 수능적 해법에는 사용한 수능 개념의 번호를 표시합니다.

대표 01

이해 · 3점

정답 1

수열 $\{a_n\}$이 $\lim n\,a_n = 2$를 만족시킬 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)a_n}{2n-1}$$

사고 흐름 a_n은 모르지만 $n\,a_n$의 극한은 압니다. 그러니 구하는 식에서 $n\,a_n$을 떼어 내면 됩니다.

교과서적 해법

- $b_n = n\,a_n$이라 하면 $a_n = \frac{b_n}{n}$입니다.
- 구하는 식은 $\frac{b_n(n^2+1)}{2n^2-n}$이고, $\lim b_n = 2$, $\lim \frac{n^2+1}{2n^2-n} = \frac{1}{2}$이므로 극한의 성질에서 $2 \times \frac{1}{2} = \mathbf{1}$입니다.

수능적 해법

[수능 개념 A-③] — $n\,a_n \times \frac{n^2+1}{n(2n-1)}$로 쪼개고, 두째 인수는 최고차항만 보면 $\frac{1}{2}$입니다(수능 개념 A-①).

대표 02

추론 · 4점 · 단답형

정답 3

함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의할 때, $f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(-1) + f(2)$의 값을 구하시오.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1} + 2x}{x^{2n} + 1}$$

사고 흐름 x가 바뀌면 x^{2n}이 0으로 가기도 하고 ∞로 가기도 합니다. $|x|$와 1의 크기를 비교해 네 경우로 나눕니다.

교과서적 해법

- $x = \frac{1}{2}$이면 $(\frac{1}{4})^n$은 0으로 가므로 $f(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$입니다.
- $x = 1$이면 $f(1) = \frac{3}{2}$, $x = -1$이면 $f(-1) = -\frac{3}{2}$입니다.
- $x = 2$이면 분자·분모를 4^n으로 나누어 $f(2) = 2$입니다.
- 합은 $1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2 = \mathbf{3}$입니다.

수능적 해법

- [수능 개념 A-②] — $f(x)$는 $|x| < 1$에서 $2x$, $|x| > 1$에서 x, $x = \pm 1$에서 $\pm\frac{3}{2}$인 함수입니다.
- 표를 한 번 만들면 어떤 값이든 바로 읽습니다.

대표 03

추론 · 4점

정답 ③

양수 a에 대하여 $g(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + 2^n}{a^n + 2^{n+1}}$이라 할 때, $g(1) + g(2) + g(4)$의 값은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

사고 흐름 a^n과 2^n 중 누가 더 빨리 커지는지가 a에 따라 바뀝니다. a와 2의 크기를 비교해 세 경우로 나눕니다.

교과서적 해법

- $a = 1$이면 분자·분모를 2^n으로 나누어 $\frac{(\frac{1}{2})^n + 1}{(\frac{1}{2})^n + 2}$이므로 $g(1) = \frac{1}{2}$입니다.
- $a = 2$이면 $\frac{2 \times 2^n + 2^n}{2^n + 2 \times 2^n} = 1$이므로 $g(2) = 1$입니다.
- $a = 4$이면 4^n으로 나누어 $\frac{4 + (\frac{1}{2})^n}{1 + 2(\frac{1}{2})^n}$이므로 $g(4) = 4$입니다.
- 합은 $\frac{11}{2}$ (③)입니다.

수능적 해법

- [수능 개념 A-①] — 가장 빠른 항만 남기면 $a < 2$일 때 $\frac{2^n}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2}$, $a > 2$일 때 $a \times \frac{a^n}{a^n} = a$입니다.
- $a = 2$는 두 항이 같은 속도라 계수끼리 더해 $\frac{3}{3} = 1$입니다.

★ 날개 메모

밑이 같아지는 경계($a = 2$)에서는 '가장 빠른 항'이 둘이므로 둘 다 남겨야 합니다.

단계별 연습

기본 1회독 · 실전 2회독

기본은 1회독, 실전은 2회독부터 푹니다.

기본 2점 · 정의와 계산

1 계산

$\lim \dfrac{4n^2+3n}{2n^2-1}$의 값을 구하시오.

2 계산

$\lim (\sqrt{n^2+6n}-n)$의 값을 구하시오.

3 계산

$\lim \dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^n}$의 값을 구하시오.

4 이해

다음 중 수렴하는 수열은?

① $\{(-1)^n\}$ ② $\{(\frac{3}{2})^n\}$ ③ $\{(-\frac{2}{3})^n\}$ ④ $\{n^2\}$ ⑤ $\{(-1)^n n\}$

유형 3점 · 내신 서술형 · 수능형

5 이해 · 단답형

등비수열 $\{(\dfrac{x-2}{4})^n\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수를 구하시오.

6 이해

수열 $\{a_n\}$이 $\lim \dfrac{2a_n-1}{a_n+3}=\dfrac{1}{3}$을 만족시킬 때, $\lim a_n$의 값은?

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

7 이해 · 단답형

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n^2+n<a_n<2n^2+3n$을 만족시킬 때, $\lim \dfrac{a_n}{n^2+5}$의 값을 구하시오.

8 계산 · 단답형

$\lim (\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+2n})=4$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

실전 4점 · 조건 추론 · 타 교과 소재

9 추론 · 단답형

함수 f(x)가 아래와 같을 때, 방정식 $f(x)=\dfrac{x+3}{2}$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{2n}+x}{x^{2n}+1}$$

10 추론 · 단답형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim n a_n=3$, $\lim \dfrac{b_n}{n}=2$를 만족시킬 때, $\lim \dfrac{a_n b_n+2}{na_n+\frac{b_n}{n}}$의 값을 p라 하자. 5p의 값을 구하시오.

11

문제 해결 · 타 교과 소재 · 단답형

어떤 약을 매일 같은 시각에 100 mg씩 복용한다. 몸에 들어온 약은 24시간이 지나면 $\frac{1}{4}$만 남는다. n번째 복용 직후 몸속의 약의 양을 a_n mg이라 할 때, $\lim a_n = L$이다. 3L의 값을 구하시오.

단계별 연습 해설

정답 · 핵심 한 줄 · 개념 번호

각 문항의 핵심 한 줄과 사용한 개념 번호입니다. 실전은 풀이 전체를 씁니다.

번호	정답	핵심	개념
1	2	n^2으로 나누면 $\frac{4+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n^2}}$	A-2
2	3	유리화하면 $\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}$이고 $\frac{6}{2}=3$	A-2
3	3	3^n으로 나누면 $\frac{3-(\frac{2}{3})^n}{1+(\frac{2}{3})^n}$	A-4
4	③	공비 $-\frac{2}{3}$은 −1과 1 사이. ①은 진동, ②④⑤는 발산	A-4
5	8	$-1<\frac{x-2}{4}\le 1$에서 $-2<x\le 6$	A-4
6	②	$b_n=\frac{2a_n-1}{a_n+3}$이면 $a_n=\frac{3b_n+1}{2-b_n}$이고 $\frac{2}{\frac{5}{3}}=\frac{6}{5}$	수능 A-③
7	2	n^2+5로 나누면 양 끝이 모두 2로 수렴	A-3
8	10	유리화하면 $(a-2)\frac{n}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+2n}}$이고 $\frac{a-2}{2}=4$	A-2
9	3	아래 참고	수능 A-②
10	8	아래 참고	수능 A-③
11	400	아래 참고	A-4

실전 9

사고 흐름: |x|와 1을 비교해 f(x)를 먼저 정리하고, 경우마다 방정식을 풉니다.

1. $|x|<1$이면 $f(x)=x$, $x=1$이면 $f(1)=2$, $x=-1$이면 $f(-1)=1$, $|x|>1$이면 $f(x)=3$입니다.
2. $|x|<1$에서 $x=\frac{x+3}{2}$이면 $x=3$이라 범위 밖입니다.
3. $x=1$이면 $\frac{1+3}{2}=2=f(1)$이므로 근입니다. $x=-1$이면 $\frac{-1+3}{2}=1=f(-1)$이므로 근입니다.
4. $|x|>1$에서 $3=\frac{x+3}{2}$이면 $x=3$이므로 근입니다.
5. 실근은 −1, 1, 3의 **3**개입니다.

함정: 경계 $x=\pm1$을 빼면 답이 1개로 나옵니다.

실전 10

- 사고 흐름: a_n과 b_n은 모르지만 $n\,a_n$과 $\frac{b_n}{n}$의 극한은 압니다.